# MAT139 – Álgebra Linear para Computação
# Lista de Exercícios 8 – 27/10/2011

Prof. Claudio Gorodski

`Todas as matrizes consideradas são reais. O processo de diagonalização é sempre sobre` $\mathbf{R}$.

**Questão 1** Calcular o posto e os autovalores das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Questão 2** Quais das seguintes matrizes não podem ser diagonalizadas (sobre $\mathbf{R}$)?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

**Questão 3** Suponha que $A = MDM^{-1}$ onde $D$ é diagonal e $M$ é ortogonal. Verifique que $A$ é simétrica.

**Questão 4** Diagonalize as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Questão 5** Escolha a terceira linha da matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ * & * & * \end{pmatrix}$ de modo que seu polinômio característico seja $-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 6$.

**Questão 6** Fatore a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ na forma $MDM^{-1}$.

**Questão 7** Calcule *todos* os auto-valores e auto-vetores da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e exiba duas matrizes diagonalizadoras diferentes $M$.

**Questão 8** Diagonalizar a matriz $A = \begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

**Questão 9** Suponha que os auto-valores de $A$ são 1, 1 e 2. Decida a veracidade das afirmações seguintes (se verdadeiro, justifique; se falso, dê uma contra-exemplo):

*a* . $A$ é invertível.

*b* . $A$ é diagonalizável.

*c* . $A$ não é diagonalizável.

**Questão 10** Exiba uma matriz cujos auto-valores sejam 1 e 4 e cujos auto-vetores sejam $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Questão 11** Se $A^2 = I$, quais são os possíveis auto-valores de $A$?

**Questão 12** Decida a veracidade das seguintes afirmações:

*a* . Uma matriz com todos os auto-valores reais e mutuamente distintos é diagonalizável.

*b* . Uma matriz diagonalizável tem todos os auto-valores mutuamente distintos.

*c* . Se $A$ e $B$ são diagonalizáveis, então $AB$ tambem é.

*d* . Se uma matriz triangular é conjugada a uma matriz diagonal, então ela já é diagonal.

*e* . Se $A$ ou $B$ é invertível, então $AB$ é conjugada a $BA$.

*f* . Toda matriz invertível é diagonalizável.

*g* . Toda matriz diagonalizável é invertível.

*h* . Ao permutar duas linhas de uma matriz, trocamos o sinal de seus auto-valores.

**Questão 13** Se $A$ tem auto-valores 0, 1, 2, quais são os auto-valores de $A(A-I)(A-2I)$?

**Questão 14** Exiba matrizes 2 por 2 $A$ e $B$ tais que os auto-valores de $AB$ *não* são os produtos dos auto-valores de $A$ e $B$, e os auto-valores de $A + B$ *não* são as somas dos auto-valores de $A$ e $B$.

**Questão 15** Prove que $A$ e $A^t$ têm os mesmos auto-valores.

**Questão 16** Diagonalize a matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ e calcule uma matriz $R$ tal que $R^2 = A$; $R$ é chamada de uma raiz quadrada de $A$; quantas raízes quadradas de $A$ há?