

MAT211 – Cálculo Diferencial e Integral III
Lista de Exercícios 7 – 21/05/2010

PROF. CLAUDIO GORODSKI

1. Usar o teorema de Green para calcular a integral de linha $\oint_C y^2 dx + x dy$ (sentido anti-horário) onde:

- a. C é o quadrado de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$.
- b. C é o quadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$.
- c. C é o quadrado de vértices $(\pm 2, 0)$, $(0, \pm 2)$.
- d. C é o círculo de raio 2 e centro na origem.
- e. C está parametrizada por $\gamma(t) = 2 \cos^3 t \vec{i} + 2 \sin^3 t \vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

2. Sendo $P(x, y) = xe^{-y^2}$ e $Q(x, y) = -x^2ye^{-y^2} + 1/(x^2 + y^2)$, calcular a integral de linha $\int P dx + Q dy$ ao longo da fronteira do quadrado de lado $2a$ determinado pelas desigualdades $|x| \leq a$ e $|y| \leq a$.

3. Calcular a integral de linha $\int_C P dx + Q dy$ onde

$$P(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad Q(x, y) = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

e C é uma curva fechada simples suave em \mathbf{R}^2 que não contém $(0, 0)$ no seu interior.

4. Esboçar um desenho da região S e expressar a integral $\iint_S f(x, y) dx dy$ como uma integral iterada em coordenadas polares:

- a. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\} \quad (a > 0)$
- b. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$
- c. $S = \{(x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\} \quad (0 < a < b)$
- d. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1\}$
- e. $S = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$

5. Transformar a integral para coordenadas polares e resolvê-la ($a > 0$):

- a. $\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$
- b. $\int_0^a \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$
- c. $\int_0^1 \int_{x^2}^x (x^2 + y^2)^{-1/2} dy dx$

d. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$

6. Efetuar uma mudança de coordenadas conveniente para calcular a integral dupla

$$\iint_S (x - y)^2 \sin^2(x + y) dx dy$$

onde S é o paralelogramo de vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(0, \pi)$.

7. Considere a transformação definida pelas equações

$$x = u + v, \quad y = v - u^2.$$

a. Calcular o determinante Jacobiano $J(u, v)$.

b. Um triângulo T no plano uv tem vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$. Esboçar um desenho de sua imagem S no plano xy .

c. Calcular a área de S por meio de uma integral dupla sobre S e também por meio de uma integral dupla sobre T .

d. Calcular $\iint_S (x - y + 1)^{-2} dx dy$.

8. Considere a transformação definida pelas equações

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv.$$

a. Calcular o determinante Jacobiano $J(u, v)$.

b. Um retângulo T no plano uv tem vértices $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(1, 3)$. Esboçar um desenho de sua imagem S no plano xy .

c. Calcular $\iint_D xy dx dy$, onde $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

9. Mostre que

$$\iint_S f(x + y) dx dy = \int_{-1}^1 f(u) du,$$

onde $S = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$.