MAT211 – Cálculo Diferencial e Integral III
Lista de Exercícios 9 – 11/06/2010

Prof. Claudio Gorodski

1. Seja S o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, e seja $\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$. Seja $\vec{n}$ a normal unitária exterior de S. Calcular a integral de superfície $\int\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$.

2. Seja S a superfície plana cuja fronteira é o triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, e seja $\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Seja $\vec{n}$ a normal unitária tendo a componente z não-negativa. Calcular a integral de superfície $\int\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ usando uma representação paramétrica de S.

3. O cilindro $x^2+y^2 = 2x$ corta a superfície S da metade superior do cone $x^2+y^2 = z^2$. Calcular

$$\int\int_S (x^4 - y^4 + y^2z^2 - z^2x^2 + 1)\, dS.$$

4. Uma superfície esférica de raio R é cortada por uma metade do cone circular reto cujo vértice coincide com o centro da esfera, e cujo ângulo de abertura é $\alpha \in (0, \pi)$. Calcular, em termos de R e α, o centro de massa da porção da esfera que está no interior do cone.

5. Calcular o fluxo do campo $\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{i} - (2x + y)\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ através do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, orientado na direção da normal unitária exterior $\vec{n}$.

6. Resolver o exercício anterior acrescentando a S a base do hemisfério orientada por $-\vec{k}$.

7. Usar o teorema de Stokes para transformar a integral de superfície $\int\int_S (\mathrm{rot}\vec{F} \cdot \vec{n})\, dS$ em uma integral de linha e calcular esta.

a. $\vec{F}(x, y, z) = y^2\,\vec{i} + xy\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$, onde S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, e $\vec{n}$ é a normal unitária com componente z não-negativa.

b. $\vec{F}(x, y, z) = y\,\vec{i} + z\,\vec{j} + x\,\vec{k}$, onde S é a porção do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ com $z \geq 0$ e $\vec{n}$ é a normal unitária com componente z não-negativa.

c. $\vec{F}(x, y, z) = (y - z)\,\vec{i} + yz\,\vec{j} - xz\,\vec{k}$, onde S consiste das cinco faces do cubo $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$ que não estão no plano xy, e a normal é exterior.

8. Usar o teorema de Stokes para transformar a integral de linha em uma integral de superfície e resolvê-la.

a. $\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz = \pi a^2\sqrt{3}$, onde C é a curva de intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ com o plano $x + y + z = 0$.

b. $\int_C (y + z)\, dx + (z + x)\, dy + (x + y)\, dz = 0$, onde C é a curva de intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $y = z$.

c. $\int_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz = 2\pi a(a+b)$, onde C é a curva de intersecção do cilindro $x^2+y^2=a^2$ com o plano $x/a+y/b=1$, $a>0$, $b>0$.

9. Calcular o rotacional e o divergente dos seguintes campos de vetores:

a. $\vec{F}(x,y,z) = (x^2+yz)\,\vec{i} + (y^2+xz)\,\vec{j} + (z^2+xy)\,\vec{k}$.

b. $\vec{F}(x,y,z) = (2z-3y)\,\vec{i} + (3x-z)\,\vec{j} + (y-2x)\,\vec{k}$.

c. $\vec{F}(x,y,z) = (z+\sin y)\,\vec{i} - (z-x\cos y)\,\vec{j}$.

10. Mostre que o campo $x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ não é o campo rotacional de nenhum outro campo.

11. Mostre que $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{F}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{F}) - \Delta\vec{F}$, onde Δ é o operador Laplaciano aplicado a cada componente de $\vec{F}$.

12. Seja S a superfície do cubo unitário $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$, e seja $\vec{n}$ a normal unitária exterior a S. Sendo $\vec{F}(x,y,z) = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$, calcular a integral de superfície $\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ usando o teorema de Gauss.

13. Seja S a superfície esférica $x^2+y^2+z^2=1$ orientada pela normal unitária exterior $\vec{n}$. Calcular o fluxo do campo de vetores $\vec{F}(x,y,z) = 2x\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$ através de S usando o teorema de Gauss.

14. Calcular a integral de superfície $\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (3x+z^{77}, y^2-\sin(x^2z), xz+ye^{x^5})$ e S é a superfície do cubo $0\le x\le 1$, $0\le y\le 3$, $0\le z\le 2$, orientada pela normal unitária exterior $\vec{n}$.

15. Seja $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$ um campo de vetores continuamente diferenciável em um aberto $\Omega\subset\mathbf{R}^2$. Seja C uma curva fechada simples suave em Ω, seja S o interior de C, e seja $\vec{n}$ a normal unitária exterior a S definida ao longo de C. Usar o teorema de Green para provar que

$$\int\int_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy = \int_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds,$$

onde o membro esquerdo representa uma integral de linha em relação ao comprimento de arco.