MAT216 – Cálculo Diferencial e Integral III
Lista de Exercícios 1 – 28/02/2015

Prof. Claudio Gorodski

1. Esboçar um desenho das curvas de nível das seguintes funções:

   a. $f(x, y) = x - y$

   b. $f(x, y) = (x + y)^2$

   c. $f(x, y) = xe^{-y}$

   d. $f(x, y) = \sin(x - y)$

   e. $f(x, y) = y - x^2$

   f. $f(x, y) = y/x^2$.

   g. $f(x, y)$, sendo que $\nabla f(x, y) = (x, y)$.

2. Dê um exemplo de uma função $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ cuja curva de nível $f = 0$ seja desconexa (consista de dois ou mais "pedaços" disjuntos).

3. Mostre que a função $f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$ satisfaz $f_t = f_{xx}$. (Esta equação diferencial parcial é a chamada *equação do calor na reta*, e descreve a temperatura $f(t, x)$ na posição x da reta no instante t causada por uma fonte de calor em $x = 0$, $t = 0$.)

4. Mostre que as funções $f_1(t, x) = \sin(x+t)$ e $f_2(t, x) = \sin(x-t)$ satisfazem $f_{tt} = f_{xx}$. (Esta equação diferencial parcial é a chamada *equação da onda na reta*.) Qual onda está se movendo para a direita e qual para a esquerda? Voce consegue encontrar outras soluções para esta equação?

5. Calcular as derivadas parciais das seguintes funções:

   a. $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

   b. $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, onde $a_{ij} = a_{ji}$.

   c. $f(x) = a \cdot x$, onde $a \in \mathbf{R}^n$ está fixado, e $x \in \mathbf{R}^n$.

   d. $f(x) = ||x||^2$ onde $x \in \mathbf{R}^n$,

6. Calcular a derivada direcional de $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ na direção $v \in \mathbf{R}^n$:

   a. $f(x) = a \cdot x$, onde $a \in \mathbf{R}^n$ está fixado.

   b. $f(x) = ||x||^2$

7.

   a. Mostre que não existe função $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, tal que $\frac{\partial f}{\partial v}(p) > 0$ para $p \in \mathbf{R}^n$ fixado e $v \in \mathbf{R}^n$ arbitrário.

b. Exiba um exemplo de uma função $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial v}(p) > 0$ para $v \in \mathbf{R}^n$ fixado e $p \in \mathbf{R}^n$ arbitrário.

8. Calcular o campo gradiente onde ele existe:

a. $f(x, y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$

b. $f(x, y) = e^x \cos y$

c. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2$

9. Calcular a derivada direcional de $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ no ponto $p = (1, 1, 0)$ na direção $v = (1, -1, 2)$.

10. Calcular os pontos (x, y) e as direções para os quais a derivada direcional de $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ tem o maior valor possível, sendo (x, y) um ponto do círculo $x^2 + y^2 = 1$.

11. Sabendo que f tem, em $p = (1, 2)$, derivadas direcionais $+2$ na direção **do vetor unitário que aponta para o ponto** $(2, 2)$ e -2 na direção do vetor unitário que aponta para o ponto $(1, 1)$, calcular o gradiente de f em p e sua derivada direcional em p na direção do vetor unitário que aponta para o ponto $(4, 6)$.

12. Em $\mathbf{R}^3$, sejam $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ e $r(x, y, z) = ||\mathbf{r}(x, y, z)||$.

a. Mostre que $\nabla r(x, y, z)$ é um vetor unitário na direção de $\mathbf{r}(x, y, z)$.

b. Exiba uma função $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ tal que $\nabla f = \mathbf{r}$.

13. Calcular a derivada direcional de f nos pontos e direções especificados:

a. $f(x, y, z) = 3x - 5y + 2z$, $p = (2, 2, 1)$, v é o vetor normal unitário exterior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

b. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, $p = (3, 4, 5)$, v é um vetor unitário tangente à curva intersecção das superfícies $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25$ e $x^2 + y^2 = z^2$.

14. Escrever uma equação para o plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ no ponto $p = (1, 2)$.

15. Escrever uma equação para o plano tangente a $xyz = 1$ no ponto (x_0, y_0, z_0).

16. As superfícies $S_1 : z = x^2 + 4y$ e $S_2 : z = 2x + 3y^2$ se encontram no ponto $p = (1, 1, 5)$. Calcular vetores (não-nulos) N_1, N_2 respectivamente normais a essas superfícies nesse ponto e seu produto vetorial $v = N_1 \times N_2$. A reta por p na direção de v é tangente a que curva?

17. Escrever equações paramétricas para a reta tangente à intersecção das superfícies $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ e $z = e^{x-y}$ no ponto $(1, 1, 1)$.

18. Seja $f(x, y) = xe^{xy}$.

a. Usar a diferencial para calcular uma aproximação para $f(11/10, -1/10)$.

b. Usar a Hessiana para calcular uma aproximação para $f(11/10, -1/10)$.

c. Comparar os resultados obtidos acima com o valor obtido através de uma calculadora eletrônica.