MAT216 – Cálculo Diferencial e Integral III
Lista de Exercícios 4 – 26/04/2015

Prof. Claudio Gorodski

1. Calcular a integral de linha do campo de vetores F ao longo do caminho indicado:

   a. $F(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$, de $(-1,1)$ a $(1,1)$ ao longo da parábola $y = x^2$.

   b. $F(x,y) = (2a - y, x)$, ao longo do caminho descrito por $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

   c. $F(x,y,z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$, ao longo de $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

   d. $F(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, de $(0,0)$ a $(2,0)$ ao longo da curva $y = 1 - |1 - x|$.

   e. $F(x,y) = (x + y, x - y)$ uma volta ao redor da elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ no sentido anti-horário.

   f. $F(x,y,z) = (2xy, x^2 + z, y)$, de $(1,0,2)$ a $(3,4,1)$ ao longo de um segmento de reta.

   g. $F(x,y,z) = (x, y, xz - y)$, de $(0,0,0)$ a $(1,2,4)$ ao longo de um segmento de reta.

   h. $F(x,y,z) = (x, y, xz - y)$, ao longo do caminho descrito por $\gamma(t) = (t^2, 2t, 4t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

2. Calcular a integral de linha indicada:

   a. $\int_C (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$, onde C é um caminho entre $(-2,4)$ e $(1,1)$ ao longo da parábola $y = x^2$.

   b. $\int_C \dfrac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2 + y^2}$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = a^2$ percorrido uma vez no sentido anti-horaŕio.

   c. $\int_C \dfrac{dx + dy}{|x| + |y|}$, onde C é o quadrado de vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$, percorrido uma vez no sentido anti-horário.

   d. $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, onde:

      (a) C é a curva de intersecção das duas superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$. A curva deve ser percorrida uma vez, no sentido horário quando avistada da origem.

      (b) C é a curva de intersecção das duas superfícies $z = xy$ e $x^2 + y^2 = 1$. A curva deve ser percorrida uma vez, no sentido anti-horário quando avistada bem de cima do plano xy.

3. Um campo de força é dado por $F(x,y,z) = (x, y, xz - y)$. Calcular o trabalho realizado por F quando uma partícula se move de $(0,0,0)$ a $(1,2,4)$ ao longo do segmento de reta unindo esses dois pontos.

4. Um campo de força é dado por $F(x,y,z) = (yz, xz, x(y+1))$. Calcular o trabalho realizado por F quando uma partícula se move uma vez ao redor do triângulo de vértices $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ $(-1,1,-1)$ nessa ordem.

5. Calcular as integrais:

a. $\int_C (x+y)\, ds$, onde C é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$, percorrido uma vez no sentido anti-horário.

b. $\int_C y^2\, ds$, onde C é parametrizada por $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

6. Considere um fio semicircular de raio r. Mostre que o centróide se situa no eixo de simetria a uma distância de $2r/\pi$ do centro.

7. Um arame tem a forma circular $x^2 + y^2 = r^2$. Calcular sua massa sabendo que a densidade de massa em (x,y) é $|x| + |y|$.

8. Calcular a massa de uma arame cuja forma é aquela da intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e o plano $x + y + z = 0$, sabendo que a densidade de massa em (x,y,z) é x^2.

9. Verificar que F não é um campo conservativo:

a. $F(x,y) = (y, -x)$

b. $F(x,y) = (y, xy - x)$

c. $F(x,y,z) = (y, x, x)$

d. $F(x,y,z) = (xy, x^2 + 1, z^2)$

10. Um campo de força está definido em $\mathbf{R}^3$ pela equação $F(x,y,z) = (y, z, yz)$.

a. Verificar se F é conservativo.

b. Calcular o trabalho realizado por F durante o movimento de uma partícula ao longo de $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$ para $0 \leq t \leq \pi$.

11. Um campo de força está definido em $\mathbf{R}^2$ pela equação $F(x,y) = (x + y, x - y)$.

a. Mostrar que o trabalho realizado por F durante o movimento de uma partícula ao longo de $\gamma(t) = (f(t), g(t))$ para $a \leq t \leq b$ depende apenas de $f(a)$, $f(b)$, $g(a)$, $g(b)$.

b. Calcular o trabalho realizado quando $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $g(a) = 3$, $g(b) = 4$.

12. Calcular o trabalho realizado por $F(x,y) = (3y^2 + 2, 16x)$ em movendo uma partícula de $(-1,0)$ a $(1,0)$ ao longo da metade superior da elipse $b^2x^2 + y^2 = b^2$. Para qual valor de b o trabalho realizado é mínimo?

13. Determinar se o campo de vetores indicado admite um potencial e, em caso afirmativo, determiná-lo.

a. $F(x,y) = (x,y)$

b. $F(x,y) = (3x^2y, x^3)$

c. $F(x,y) = (2xe^y + y, x^2e^y + x - 2y)$

d. $F(x,y) = (\sin y - y\sin x + x, \cos x + x\cos y + y)$

e. $F(x,y) = (\sin(xy) + xy\cos(xy), x^2\cos(xy))$

f. $F(x,y,z) = (x,y,z)$

g. $F(x,y,z) = (x+z, -(y+z), x-y)$

h. $F(x,y,z) = (2xy^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$

i. $F(x,y,z) = (3y^4z^2, 4x^3z^2, -3x^2y^2)$

j. $F(x,y,z) = (2x^2 + 8xy^2, 3x^3y - 3xy, -(4y^2z^2 + 2x^3z))$

k. $F(x,y,z) = (y^2\cos x + z^3, -(4 - 2y\sin x), 3xz^2 + 2)$

l. $F(x,y,z) = (4xy - 3x^2z^2 + 1, 2(x^2+1), -(2x^3z + 3z^2))$

14. Seja $S = \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ e, para $\alpha \in \mathbf{R}$, defina um campo de vetores $F(x) = ||x||^\alpha x$, onde $x \in S$. Calcular um potencial para F.

15. Seja $F(x,y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ definido em $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

a. Mostre que $\varphi(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$, definida para $x > 0$, é um potencial para F *nessa região.*

b. Calcular $= \int_C F\, d\mathbf{r}$ onde C é o círculo de raio R centrado na origem, orientado no sentido anti-horário.

c. F é conservativo em S?

16. Seja $F : \Omega \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ um campo de vetores contínuo. Assinalar “verdadeira” ou “falsa” para cada uma das seguintes asserções:

(a) Se $\int_\gamma F\, d\mathbf{r} = 0$ para um certo caminho fechado γ em Ω, então F é conservativo em Ω.

(b) Se $\int_\gamma F\, d\mathbf{r} = 0$ para um certo caminho fechado γ em Ω, então F *pode ser* conservativo em Ω.

(c) Se $\int_\gamma F\, d\mathbf{r} \neq 0$ para um certo caminho fechado γ em Ω, então F é conservativo em Ω.

(d) Se $\int_\gamma F\, d\mathbf{r} \neq 0$ para um certo caminho fechado γ em Ω, então F *pode ser* conservativo em Ω.

(e) Se $\int_\gamma F\, d\mathbf{r} = 0$ para *todo* caminho fechado γ em Ω, então F é conservativo em Ω.

(f) Se $\int_\gamma F\, d\mathbf{r} \neq 0$ para *todo* caminho fechado γ em Ω, então nada se pode concluir a respeito de F ser ou não conservativo em Ω.