MAT216 – Cálculo Diferencial e Integral III
Lista de Exercícios 8 – 10/06/2015

Prof. Claudio Gorodski

1. Uma superfície esférica de raio R é cortada por uma metade do cone circular reto cujo vértice coincide com o centro da esfera, e cujo ângulo de abertura é $\alpha \in (0, \pi)$. Calcular, em termos de R e α, o centro de massa da porção da esfera que está no interior do cone.

2. Usar o teorema de Stokes para transformar a integral de superfície $\int\int_S (\text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n})\, dS$ em uma integral de linha e calcular esta.

a. $\vec{F}(x, y, z) = y^2\,\vec{i} + xy\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$, onde S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, e $\vec{n}$ é a normal unitária com componente z não-negativa.

b. $\vec{F}(x, y, z) = y\,\vec{i} + z\,\vec{j} + x\,\vec{k}$, onde S é a porção do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ com $z \geq 0$ e $\vec{n}$ é a normal unitária com componente z não-negativa.

c. $\vec{F}(x, y, z) = (y - z)\,\vec{i} + yz\,\vec{j} - xz\,\vec{k}$, onde S consiste das cinco faces do cubo $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$ que não estão no plano xy, e a normal é exterior.

3. Usar o teorema de Stokes para transformar a integral de linha em uma integral de superfície e verificar que ela tem o valor indicado. (explicar a orientação usada).

a. $\int_C (y + z)\, dx + (z + x)\, dy + (x + y)\, dz = 0$, onde C é a curva de intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $y = z$.

b. $\int_C y^2\, dx + xy\, dy + xz\, dz = 0$, onde C é a curva do item atnterior.

c. $\int_C (y^2 + z^2)\, dx + (x^2 + z^2)\, dy + (x^2 + y^2)\, dz = 2\pi ab^2$, onde C é a curva de intersecção do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, $z > 0$, e o cilindro $x^2 + y^2 = 2bx$, onde $0 < b < a$.

d. $\int_C (y^2 - z^2)\, dx + (z^2 - x^2)\, dy + (x^2 - y^2)\, dz = 9a^3/2$, onde C é a curva de intersecção da fronteira do cubo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$ e o plano $x + y + z = 3a/2$.

4. Calcular o rotacional e o divergente dos seguintes campos de vetores:

a. $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + yz)\,\vec{i} + (y^2 + xz)\,\vec{j} + (z^2 + xy)\,\vec{k}$.

b. $\vec{F}(x, y, z) = (2z - 3y)\,\vec{i} + (3x - z)\,\vec{j} + (y - 2x)\,\vec{k}$.

c. $\vec{F}(x, y, z) = (z + \sin y)\,\vec{i} - (z - x\cos y)\,\vec{j}$.

5. Mostre que o campo $x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ não é o campo rotacional de nenhum outro campo.

6. Mostre que $\text{rot}(\text{rot}\vec{F}) = \text{grad}(\text{div}\vec{F}) - \Delta\vec{F}$, onde Δ é o operador Laplaciano aplicado a cada componente de $\vec{F}$.

7. Seja S a superfície do cubo unitário $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$, e seja $\vec{n}$ a normal unitária exterior a S. Sendo $\vec{F}(x,y,z) = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$, calcular a integral de superfície $\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ usando o teorema de Gauss.

8. Seja S a superfície esférica $x^2+y^2+z^2 = 1$ orientada pela normal unitária exterior $\vec{n}$. Calcular o fluxo do campo de vetores $\vec{F}(x,y,z) = 2x\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$ através de S usando o teorema de Gauss.

9. Calcular a integral de superfície $\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (3x + z^{77}, y^2 - \sin(x^2 z), xz + ye^{x^5})$ e S é a superfície do cubo $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 3$, $0 \le z \le 2$, orientada pela normal unitária exterior $\vec{n}$.

10. Seja $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$ um campo de vetores continuamente diferenciável em um aberto $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Seja C uma curva fechada simples suave em Ω, seja S o interior de C, e seja $\vec{n}$ a normal unitária exterior a S definida ao longo de C. Usar o teorema de Green para provar que

$$\int\int_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = \int_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds,$$

onde o membro esquerdo representa uma integral de linha em relação ao comprimento de arco.

11. Sejam $r(u,v)$ e $\tilde{r}(\tilde{u},\tilde{v})$ duas representações paramétricas da mesma superfície. Mostrar que

$$\frac{\partial\tilde{r}}{\partial\tilde{u}} \times \frac{\partial\tilde{r}}{\partial\tilde{v}} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}\left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right).$$

(Esta identidade foi usada para ver que o valor da integral de superfície independe da parametrização usada para calculá-la.)