MAT216 – Cálculo Diferencial e Integral III
Lista de Exercícios 3 – 28/03/2011

Prof. Claudio Gorodski

`É permitido assumir a diferenciabilidade de todas as funções sob consideração.`

1. Mostrar que a equação indicada pode ser resolvida para y em termos de x numa vizinhança do ponto indicado, e calcular a primeira derivada nesse ponto da função obtida:

a. $x\cos(xy) = 0$, $(x_0, y_0) = (1, \pi/2)$.

b. $xy + \log(xy) = 1$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

2. Verificar se a equação dada determina z como função das demais variáveis numa vizinhança do ponto dado e, em caso afirmativo, calcular as derivadas parciais de z nesse ponto:

a. $\sin x + \cos y + \tan z = 0$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, \pi/2, \pi)$

b. $x^2 + 2y + 3z^2 - w = 0$, $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (1, 2, -1, 8)$

c. $1 + x + y = \cosh(x + z) + \sinh(y + z)$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$

3. Escrever uma equação para o plano tangente da superfície

$$\sin^2 x + \cos(y + z) = \frac{3}{4}$$

no ponto $(\pi/6, \pi/3, 0)$.

4. Calcular o ângulo de intersecção das superfícies $2x^4 + 3y^3 - 4z^2 = -4$ e $1 + x^2 + y^2 = z^2$ no ponto $(0, 0, 1)$.

5. Se $t = g(x, y)$ e $s = F(t)$, calcular $\frac{\partial s}{\partial x}$ e $\frac{\partial s}{\partial y}$.

6. Um cilindro no $\mathbf{R}^3$, que está definido pela equação $y = f(x)$, é tangente à superfície $z^2 + 2xz + y = 0$ em todos os pontos comuns às duas superfícies. Calcular $f(x)$.

7. Verificar se as equações $x + y = uv$ e $xy = u - v$ determinam x e y em termos de u e v e calcular $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$.

8. Repetir o exercício anterior considerando x e v como funções de u e y.

9. A equação $x + z + (y + z)^2 = 6$ define z implicitamente como função de x e y, digamos, $z = f(x, y)$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ em termos de x, y e z.

10. A intersecção das superfícies descritas pelas equações

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x^2 + 3y^2 - z^2 & = & 25, \\ x^2 + y^2 & = & z^2, \end{array} \right.$$

é uma curva C passando pelo ponto $P = (\sqrt{7}, 3, 4)$. Calcular o vetor tangente unitário a C no ponto P de duas maneiras diferentes:

a. Escrevendo uma representação paramétrica explícita para C.

b. Usando o teorema da função implícita.

11. As três equações

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y\cos(uv) + z^2 & = & 0, \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 & = & 2, \\ xy - \sin u \cos v + z & = & 0 \end{array}\right.$$

definem x, y e z como funções de u e v numa certa região. Calcular $\frac{\partial x}{\partial u}$ e $\frac{\partial x}{\partial v}$ no ponto $x = y = 1$, $u = \pi/2$, $v = z = 0$.

12. As duas equações

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1^2 + 2x_2 + y_1^2 + 2y_2 - 8 & = & 0, \\ x_1 - x_2^2 + y_1 - y_2^2 + 3 & = & 0 \end{array}\right.$$

definem y_1, y_2 como funções continuamente diferenciáveis de x_1, x_2 numa vizinhança de $(1,1)$, $(y_1, y_2) = F(x_1, x_2)$ com $F(1,1) = (1,2)$. Calcular a matrix Jacobiana $JF(1,1)$.