

MAT216 – Cálculo Diferencial e Integral III
Lista de Exercícios 4 – 25/04/2011

PROF. CLAUDIO GORODSKI

1. Calcular a integral de linha do campo de vetores F ao longo do caminho indicado:

- a. $F(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$, de $(-1, 1)$ a $(1, 1)$ ao longo da parábola $y = x^2$.
- b. $F(x, y) = (2a - y, x)$, ao longo do caminho descrito por $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- c. $F(x, y, z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$, ao longo de $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.
- d. $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, de $(0, 0)$ a $(2, 0)$ ao longo da curva $y = 1 - |1 - x|$.
- e. $F(x, y) = (x + y, x - y)$ uma volta ao redor da elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ no sentido anti-horário.
- f. $F(x, y, z) = (2xy, x^2 + z, y)$, de $(1, 0, 2)$ a $(3, 4, 1)$ ao longo de um segmento de reta.
- g. $F(x, y, z) = (x, y, xz - y)$, de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 4)$ ao longo de um segmento de reta.
- h. $F(x, y, z) = (x, y, xz - y)$, ao longo do caminho descrito por $\gamma(t) = (t^2, 2t, 4t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

2. Calcular a integral de linha indicada:

- a. $\int_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, onde C é um caminho entre $(-2, 4)$ e $(1, 1)$ ao longo da parábola $y = x^2$.
- b. $\int_C \frac{(x + y) dx - (x - y) dy}{x^2 + y^2}$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = a^2$ percorrido uma vez no sentido anti-horário.
- c. $\int_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, onde C é o quadrado de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$, percorrido uma vez no sentido anti-horário.
- d. $\int_C y dx + z dy + x dz$, onde:
 - (a) C é a curva de intersecção das duas superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$. A curva deve ser percorrida uma vez, no sentido horário quando avistada da origem.
 - (b) C é a curva de intersecção das duas superfícies $z = xy$ e $x^2 + y^2 = 1$. A curva deve ser percorrida uma vez, no sentido anti-horário quando avistada bem de cima do plano xy .

3. Um campo de força é dado por $F(x, y, z) = (x, y, xz - y)$. Calcular o trabalho realizado por F quando uma partícula se move de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 4)$ ao longo do segmento de reta unindo esses dois pontos.
4. Um campo de força é dado por $F(x, y, z) = (yz, xz, x(y + 1))$. Calcular o trabalho realizado por F quando uma partícula se move uma vez ao redor do triângulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, -1)$ nessa ordem.
5. Calcular as integrais:
- $\int_C (x + y) ds$, onde C é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$, percorrido uma vez no sentido anti-horário.
 - $\int_C y^2 ds$, onde C é parametrizada por $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
6. Considere um fio semicircular de raio r . Mostre que o centróide se situa no eixo de simetria a uma distância de $2r/\pi$ do centro.
7. Um arame tem a forma circular $x^2 + y^2 = r^2$. Calcular sua massa sabendo que a densidade de massa em (x, y) é $|x| + |y|$.
8. Calcular a massa de uma arame cuja forma é aquela da intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e o plano $x + y + z = 0$, sabendo que a densidade de massa em (x, y, z) é x^2 .
9. Verificar que F não é um campo conservativo:
- $F(x, y) = (y, -x)$
 - $F(x, y) = (y, xy - x)$
 - $F(x, y, z) = (y, x, x)$
 - $F(x, y, z) = (xy, x^2 + 1, z^2)$
10. Um campo de força está definido em \mathbf{R}^3 pela equação $F(x, y, z) = (y, z, yz)$.
- Verificar se F é conservativo.
 - Calcular o trabalho realizado por F durante o movimento de uma partícula ao longo de $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$ para $0 \leq t \leq \pi$.
11. Um campo de força está definido em \mathbf{R}^2 pela equação $F(x, y) = (x + y, x - y)$.
- Mostrar que o trabalho realizado por F durante o movimento de uma partícula ao longo de $\gamma(t) = (f(t), g(t))$ para $a \leq t \leq b$ depende apenas de $f(a)$, $f(b)$, $g(a)$, $g(b)$.
 - Calcular o trabalho realizado quando $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $g(a) = 3$, $g(b) = 4$.
12. Calcular o trabalho realizado por $F(x, y) = (3y^2 + 2, 16x)$ em movendo uma partícula de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ ao longo da metade superior da elipse $b^2x^2 + y^2 = b^2$. Para qual valor de b o trabalho realizado é mínimo?
13. Determinar se o campo de vetores indicado admite um potencial e, em caso afirmativo, determiná-lo.

- a. $F(x, y) = (x, y)$
- b. $F(x, y) = (3x^2y, x^3)$
- c. $F(x, y) = (2xe^y + y, x^2e^y + x - 2y)$
- d. $F(x, y) = (\sin y - y \sin x + x, \cos x + x \cos y + y)$
- e. $F(x, y) = (\sin(xy) + xy \cos(xy), x^2 \cos(xy))$
- f. $F(x, y, z) = (x, y, z)$
- g. $F(x, y, z) = (x + z, -(y + z), x - y)$
- h. $F(x, y, z) = (2xy^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$
- i. $F(x, y, z) = (3y^4z^2, 4x^3z^2, -3x^2y^2)$
- j. $F(x, y, z) = (2x^2 + 8xy^2, 3x^3y - 3xy, -(4y^2z^2 + 2x^3z))$
- k. $F(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, -(4 - 2y \sin x), 3xz^2 + 2)$
- l. $F(x, y, z) = (4xy - 3x^2z^2 + 1, 2(x^2 + 1), -(2x^3z + 3z^2))$

14. Seja $S = \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ e, para $\alpha \in \mathbf{R}$, defina um campo de vetores $F(x) = \|x\|^\alpha x$, onde $x \in S$. Calcular um potencial para F .

15. Seja $F(x, y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ definido em $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- a. Mostre que $\varphi(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$, definida para $x > 0$, é um potencial para F nessa região.
- b. Calcular $\int_C F d\mathbf{r}$ onde C é o círculo de raio R centrado na origem, orientado no sentido anti-horário.
- c. F é conservativo em S ?

16. Seja $F : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ um campo de vetores contínuo. Assinalar “verdadeira” ou “falsa” para cada uma das seguintes asserções:

- (a) Se $\int_\gamma F d\mathbf{r} = 0$ para um certo caminho fechado γ em Ω , então F é conservativo em Ω .
- (b) Se $\int_\gamma F d\mathbf{r} = 0$ para um certo caminho fechado γ em Ω , então F pode ser conservativo em Ω .
- (c) Se $\int_\gamma F d\mathbf{r} \neq 0$ para um certo caminho fechado γ em Ω , então F pode ser conservativo em Ω .
- (d) Se $\int_\gamma F d\mathbf{r} \neq 0$ para um certo caminho fechado γ em Ω , então F é conservativo em Ω .
- (e) Se $\int_\gamma F d\mathbf{r} = 0$ para *todo* caminho fechado γ em Ω , então F é conservativo em Ω .
- (f) Se $\int_\gamma F d\mathbf{r} \neq 0$ para *todo* caminho fechado γ em Ω , então nada se pode concluir a respeito de F ser ou não conservativo em Ω .