

MAT216 – Cálculo Diferencial e Integral III
Lista de Exercícios 8 – 06/06/2011

PROF. CLAUDIO GORODSKI

1. Uma superfície esférica de raio R é cortada por uma metade do cone circular reto cujo vértice coincide com o centro da esfera, e cujo ângulo de abertura é $\alpha \in (0, \pi)$. Calcular, em termos de R e α , o centro de massa da porção da esfera que está no interior do cone.

2. Usar o teorema de Stokes para transformar a integral de superfície $\iint_S (\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) dS$ em uma integral de linha e calcular esta.

a. $\vec{F}(x, y, z) = y^2 \vec{i} + xy \vec{j} + xz \vec{k}$, onde S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, e \vec{n} é a normal unitária com componente z não-negativa.

b. $\vec{F}(x, y, z) = y \vec{i} + z \vec{j} + x \vec{k}$, onde S é a porção do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ com $z \geq 0$ e \vec{n} é a normal unitária com componente z não-negativa.

c. $\vec{F}(x, y, z) = (y - z) \vec{i} + yz \vec{j} - xz \vec{k}$, onde S consiste das cinco faces do cubo $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$ que não estão no plano xy , e a normal é exterior.

3. Usar o teorema de Stokes para transformar a integral de linha em uma integral de superfície e verificar que ela tem o valor indicado. (explicar a orientação usada).

a. $\int_C (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz = 0$, onde C é a curva de intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $y = z$.

b. $\int_C y^2 dx + xy dy + xz dz = 0$, onde C é a curva do item anterior.

c. $\int_C (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz = 2\pi ab^2$, onde C é a curva de intersecção do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, $z > 0$, e o cilindro $x^2 + y^2 = 2bx$, onde $0 < b < a$.

d. $\int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz = 9a^3/2$, onde C é a curva de intersecção da fronteira do cubo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$ e o plano $x + y + z = 3a/2$.

4. Calcular o rotacional e o divergente dos seguintes campos de vetores:

a. $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + yz) \vec{i} + (y^2 + xz) \vec{j} + (z^2 + xy) \vec{k}$.

b. $\vec{F}(x, y, z) = (2z - 3y) \vec{i} + (3x - z) \vec{j} + (y - 2x) \vec{k}$.

c. $\vec{F}(x, y, z) = (z + \sin y) \vec{i} - (z - x \cos y) \vec{j}$.

5. Mostre que o campo $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ não é o campo rotacional de nenhum outro campo.
6. Mostre que $\text{rot}(\text{rot}\vec{F}) = \text{grad}(\text{div}\vec{F}) - \Delta\vec{F}$, onde Δ é o operador Laplaciano aplicado a cada componente de \vec{F} .
7. Seja S a superfície do cubo unitário $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, e seja \vec{n} a normal unitária exterior a S . Sendo $\vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, calcular a integral de superfície $\int \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ usando o teorema de Gauss.
8. Seja S a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientada pela normal unitária exterior \vec{n} . Calcular o fluxo do campo de vetores $\vec{F}(x, y, z) = 2x\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ através de S usando o teorema de Gauss.
9. Calcular a integral de superfície $\int \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (3x + z^{77}, y^2 - \sin(x^2z), xz + ye^{x^5})$ e S é a superfície do cubo $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 2$, orientada pela normal unitária exterior \vec{n} .
10. Seja $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ um campo de vetores continuamente diferenciável em um aberto $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Seja C uma curva fechada simples suave em Ω , seja S o interior de C , e seja \vec{n} a normal unitária exterior a S definida ao longo de C . Usar o teorema de Green para provar que

$$\int \int_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds,$$

onde o membro esquerdo representa uma integral de linha em relação ao comprimento de arco.

11. Sejam $r(u, v)$ e $\tilde{r}(\tilde{u}, \tilde{v})$ duas representações paramétricas da mesma superfície. Mostrar que

$$\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \tilde{v}} = \frac{\partial (u, v)}{\partial (\tilde{u}, \tilde{v})} \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right).$$

(Esta identidade foi usada para ver que o valor da integral de superfície independe da parametrização usada para calculá-la.)