MAT220 – Cálculo Diferencial e Integral IV
Lista de Exercícios 5 – 02/10/2008

Prof. Claudio Gorodski

1. **Prove** que

$$\int_\alpha^\beta z\,dz = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2)$$

onde a integral é efetuada ao longo de uma curva suave por partes unindo α a β.

2. Seja C a fronteira da região delimitada pelo círculo $|z| = 4$ e o quadrado de lados sobre as retas $\Re z = \pm 1$, $\Im z = \pm 1$. Explique porque existe uma orientação para C de modo que $\int_C f(z)\,dz = 0$ quando:

a. $f(z) = \frac{1}{3z^2+1}$

b. $f(z) = \frac{z+2}{\operatorname{sen} \frac{z}{2}}$

c. $f(z) = \frac{z}{1-e^z}$

3. Calcular:

a. $\int_i^{i/2} e^{\pi z}\,dz$.

b. $\int_0^{\pi+2i} \cos \frac{z}{2}\,dz$

c. $\int_1^3 (z-2)^3\,dz$

4.

a. Seja γ **qualquer** curva suave fechada simples que contém a origem no seu interior. Calcular $\int_\gamma \frac{1}{z^2}\,dz$.

b. Repetir o cálculo do item (a) no caso em que a origem está no exterior de γ.

5.

a. Calcular $\int_{-2i}^{2i} \frac{1}{z}\,dz$ para uma caminho suave unindo $-2i$ a $2i$ que está inteiramente contido no semi-plano $\Re z \geq 0$ e não passa pela origem.

b. Repetir o cálculo do item (a) no caso em que o caminho está inteiramente contido no semi-plano $\Re z \leq 0$ e não passa pela origem.

6. Calcular $\int_C (z+1)^{1/2}\,dz$ onde C é um caminho suave unindo $-1-4i$ a $-1+9i$ contido no plano $\Re z \geq -1$ e que não passa pelo ponto -1 (especifique o ramo da raiz quadrada tomando $1^{1/2} = -1$).

7. Calcular as seguintes integrais onde C é a fronteira do quadrado cujos lados estão sobre as retas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$, orientado no sentido anti-horário:

a. $\int_C \frac{e^{-z}}{z-\pi i/2}\,dz$

b. $\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\, dz$

c. $\int_C \frac{z}{2z+1}\, dz$

d. $\int_C \frac{\tan(z/2)}{(z-x_0)^2}\, dz \qquad (|x_0| < 2)$

e. $\int_C \frac{\cosh z}{z^4}\, dz$

8. Suponha que f é analítica no interior e sobre uma curva fechada simples orientada C. Mostre que

$$\int_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\, dz = \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\, dz$$

onde z_0 éum ponto que não está sobre C.

9.

a. Sendo C o círculo $z = e^{it}$, $-\pi < t < \pi$, orientado no sentido anti-horário, e $\alpha \in \mathbf{R}$, mostre que

$$\int_C \frac{e^{\alpha z}}{z}\, dz = 2\pi i$$

b. Use o resultado do item (a) para mostrar que

$$\int_0^\pi e^{\alpha \cos\theta} \cos(\alpha \mathrm{sen}\,\theta)\, d\theta = \pi.$$

10. Calcular $\int_C \frac{(z^2+4)^{1/2}}{4z^2+4z-3}\, dz$ onde C é o quadrado de vértices ± 1, $\pm i$ e o ramo de $(z^2+4)^{1/2}$ está especificado pela condição $4^{1/2} = -2$.