MAT220 – Cálculo Diferencial e Integral IV
Lista de Exercícios 8 – 13/11/2008

Prof. Claudio Gorodski

1. Mostre que todos os pontos singulares das funções seguintes são pólos e, em cada caso, calcule a ordem do pólo e o resíduo da função:

a. $\dfrac{z+1}{z^2-2z}$

b. $\tanh z$

c. $\dfrac{1-\exp(2z)}{z^4}$

d. $\dfrac{\exp(2z)}{(z-1)^2}$

e. $\dfrac{z}{\cos z}$

f. $\dfrac{\exp z}{z^2+\pi^2}$

g. $\csc^2 z$

h. $z^{-3}\csc(z^2)$

i. $z\cos\frac{1}{z}$

2. Seja C o círculo $|z| = 2$ orientado no sentido anti-horário e calcule as seguintes integrais:

a. $\int_C \tan z\, dz$

b. $\int_C \dfrac{dz}{\operatorname{senh} 2z}$

c. $\int_C \dfrac{\cosh \pi z\, dz}{z(z^2+1)}$

3. Seja C o círculo $|z| = 1$ orientado no sentido anti-horário e calcule a integral $\int_C f(z)\, dz$ onde:

a. $f(z) = z^{-2}e^{-z}$

b. $f(z) = z^{-1}\csc z$

c. $f(z) = z^{-2}\csc z$

d. $f(z) = z\exp\frac{1}{z}$

4. Usar a teoria de resíduos para mostrar que:

a. $\int_0^\infty \dfrac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \dfrac{\pi}{6}$

b. $\int_0^\infty \dfrac{dx}{x^4+1} = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$

c. $\int_0^\infty \dfrac{x^2\,dx}{x^6+1} = \dfrac{\pi}{6}$

d. $\int_0^\infty \dfrac{dx}{(x^2+1)^2} = \dfrac{\pi}{4}$

5. Usar a teoria de resíduos para calcular as seguintes integrais impróprias:

a. $\int_{-\infty}^\infty \dfrac{dx}{x^2+2x+2}$

b. $\int_{-\infty}^\infty \dfrac{x\,dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$

c. $\int_0^\infty \dfrac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}$

6. Usar a teoria de resíduos para mostrar que:

a. $\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\cos x\,dx}{5+4\cos x} = -\dfrac{\pi}{3}$

b. $\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{dx}{1+\operatorname{sen}^2 x} = \pi\sqrt{2}$

c. $\int_0^{2\pi} \dfrac{dx}{1+k\cos x} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{1-k^2}} \quad (k^2<1)$

d. $\int_0^{2\pi} \dfrac{dx}{1+k\operatorname{sen} x} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{1-k^2}} \quad (k^2<1)$

e. $\int_0^{2\pi} \dfrac{\cos^2 3x\,dx}{5-4\cos 2x} = \dfrac{3}{8}\pi$