ÁLGEBRA LINEAR

10/01/21

ESPAÇOS VETORIAIS

* www.ime.usp.br/~gorodski/math/teaching/mat4002.html

Listas de exercícios diárias

Aulas: Meet (gravadas, link)

Entregar listas no Google Classroom

Notas de aula

Objetivo da disciplina: entender transformações lineares entre espaços vetoriais de dim finita

Livro-texto: "Linear Algebra Done Right" Sheldon Axler 3.ª edição 2015

— // —

Generalização de matrizes, sistemas de equações lineares, retas e planos no espaço

$\mathbb{R}$: números reais

$\mathbb{C}$: números complexos

O corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos

$x^2 + 1 = 0$ não tem solução em $\mathbb{R}$

$x^2 = -1$ $\boxed{i^2 = -1}$ unidade imaginária

$\mathbb{C} = \{ a + bi : a, b \in \mathbb{R} \}$

$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

$(a+bi) \cdot (c+di) = ac + bd \underbrace{i^2}_{=-1} + i(ad+bc)$

$= ac - bd + i(ad+bc)$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$a = a + 0i$

$\left.\begin{matrix} + \\ \cdot \end{matrix}\right\}$ satisfazem 9 propriedades

em $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$: corpo

Teorema Fundamental de Álgebra

Toda equação polinomial

$\hookrightarrow a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$

com coeficientes complexos $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$

possui uma solução em $z \in \mathbb{C}$.

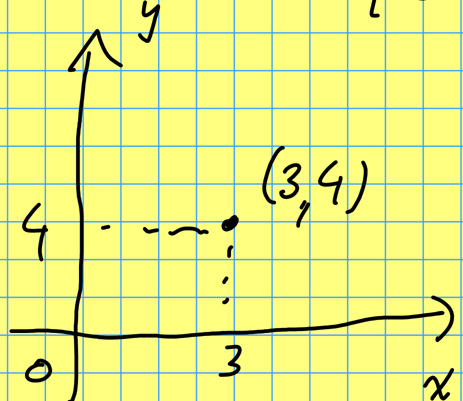
Notação $\mathbb{F}$ para $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Elementos de $\mathbb{F}$: **escalares**

— " —

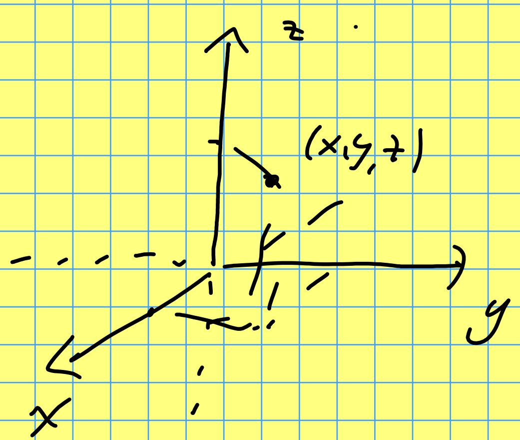
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$= \{ (x,y) : x, y \in \mathbb{R} \}$



$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$= \{ (x,y,z) : x, y, z \in \mathbb{R} \}$



$\mathbb{R}^n = \{ \underbrace{(x_1, \ldots, x_n)} : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \}$

$:=$ n-upla ou lista (de números)

(é ordenada!)

$(x_1, \dots, x_n)$: lista de números de comprimento n
(n é um inteiro ; todas as listas têm comprimento finito)

$n=0$ $(\ )$: lista vazia

$$\mathbb{F}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{F} \text{ para } j = 1, \dots, n\}$$
$(\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{C})$

OPERAÇÕES EM $\mathbb{F}^n$

$$\overbrace{(x_1, \dots, x_n)}^{=x} + \overbrace{(y_1, \dots, y_n)}^{=y} = (\underbrace{x_1+y_1}_{\in \mathbb{F}}, \dots, \underbrace{x_n+y_n}_{\in \mathbb{F}})$$

adição

Dados $x, y \in \mathbb{F}^n$, definimos $x+y \in \mathbb{F}^n$

Ex. $\mathbb{C}^4$

$$(i, 0, -1, 2+i) + (2, 1, 1, -i)$$
$$= (i+2, 1, 0, 2)$$

1.13 Comutatividade da adição em $\mathbb{F}^n$

Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ em $\mathbb{F}^n$, temos

$$x + y = (\underbrace{x_1 + y_1}_{\in \mathbb{F}}, \dots, \underbrace{x_n + y_n}_{\in \mathbb{F}})$$

$$= (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n)$$

$$= y + x$$

<u>Def</u> $\quad (\underset{\mathbb{F}}{\underset{\Uparrow}{0}}, \dots, \underset{\mathbb{F}}{\underset{\Uparrow}{0}}) =: 0 \in \mathbb{F}^n$

compr n $\qquad$ lista de compr n

<u>Elemento neutro para a adição em</u> $\mathbb{F}^n$

$$x + 0 = (x_1, \dots, x_n) + (0, \dots, 0)$$

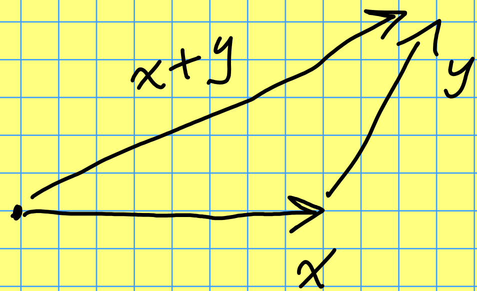
$$= (x_1 + 0, \dots, x_n + 0)$$

$$= (x_1, \dots, x_n)$$

$$= x$$

$$= 0 + x$$

<u>Ex.</u> $\mathbb{R}^2$



1.16 <u>Elemento oposto</u>

Dado $x \in \mathbb{F}^n$, escrevendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$, e tomando $-x := (-x_1, \ldots, -x_n)$, temos

$$x + (-x) = (x_1 + (-x_1), \ldots, x_n + (-x_n))$$
$$= (0, \ldots, 0)$$
$$= 0$$
$$= (-x) + x.$$

<u>Associatividade da adição</u>

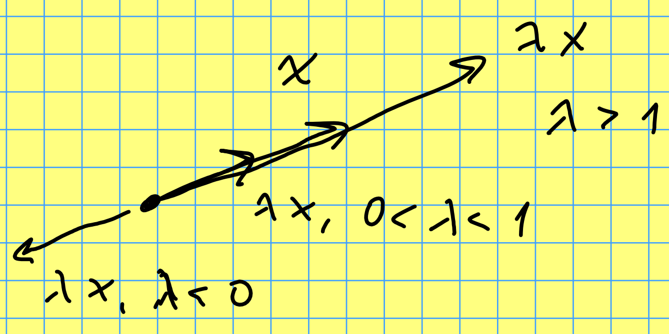
$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

1.17 <u>MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR</u>

$\lambda \in \mathbb{F}$ $\qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

<u>Ex.</u> $\mathbb{R}^2$



DEFINIÇÃO DE ESPAÇO VETORIAL

Def. Um espaço vetorial (sobre $\mathbb{F}$) é um conjunto V munido de duas operações

$V \times V \to V$ adição

$\mathbb{F} \times V \to V$ multiplicação por escalar

que satisfaz

$(u+v)+w = u+(v+w)$	$a(bv) = (ab)v$
$u+v = v+u$	$b(av) = \,=ba$
$\exists\, 0 \in V : v+0 = 0+v = v$	$1.v = v$
$\forall v \in V\ \exists\, w : v+w = 0 = w+v$	$a(u+v) = au + av$
	$(a+b)v = av + bv$

Exemplo mais importante para nós: $\mathbb{F}^n$.

Elementos de um esp vet V: vetores.

Ex. $\mathbb{F}^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots) : x_j \in \mathbb{F},\ \forall j\}$

sequências de elementos de $\mathbb{F}$

$(x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots)$

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots)$$

Ex. $C([0,1], \mathbb{R}) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ é contínua $\}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ex. Matrizes 2×2 com coef $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

Ex. $\mathbb{F}^S$ onde S é um conjunto.

$$\mathbb{F}^S = \{ f : S \to \mathbb{F} \}$$

$f, g \in \mathbb{F}^S \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$\lambda \in \mathbb{F} \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

$\mathbb{F}^S$ é um espaço vetorial

Por ex: $0(x) = 0 \quad \forall x \in S$ é um elemento neutro

$(-f)(x) = -f(x)$

$-f$ é um elemento oposto de f

Por ex: $\mathbb{F}^n = \mathbb{F}^S$ onde $S = \{1, 2, \dots, n\}$

$\mathbb{F}^\infty = \mathbb{F}^S$ onde $S = \mathbb{N}$

—//—

Seja V um espaço vetorial.

1.25 O elemento neutro de V é único.

Dem. Suponhamos que 0 e $0'$ são dois elementos neutros de V

$$\left.\begin{array}{l} 0 + v = v \\ 0' + v = v \end{array}\right. \quad \forall v \in V$$

$$0' \underset{\substack{\uparrow \\ 0 \text{ é el. neutro}}}{=} 0 + 0' \underset{\substack{\uparrow \\ 0' \text{ é el. neutro}}}{=} 0$$

$\therefore 0' = 0$ //

1.26 O elemento oposto de um vetor v dado é único.

Dem. Suponhamos que w e w' são dois elementos opostos de v.

$$w' = w' + 0 \underset{\substack{\uparrow \\ w \text{ é op.} \\ \text{de } v}}{=} w' + (v + w) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{assoc.}}}{=} (w' + v) + w \underset{\substack{\uparrow \\ w' \text{ é op} \\ \text{de } v}}{=} 0 + w = w$$

$\therefore w' = w$ //.

Notação $-v$ denota o oposto de v.

1.29 $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{escalar}}}{0} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vetor}}}{v} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vetor}}}{0}$

Dem.

$$0v = (0+0)v \underset{\substack{\uparrow \\ \text{distr.}}}{=} 0v + 0v$$

$$(-0v) + 0v = (0v + 0v) + (-0v)$$

$$0 = 0v + (0v + (-0v)) \quad \text{(assoc)}$$

$$0 = 0v + 0 \quad \text{(el. oposto)}$$

$$0 = 0v \quad \text{(el. neutro)}$$

//

1.30 $\quad a0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{F}$

scalar, vetor, vetor

1.31 $\quad (-1)v = -v$

Dem.

$$v + (-1)v = 1v + (-1)v \quad (1v = v)$$

$$= (1+(-1))v \quad \text{(distr)}$$

$$= 0v \quad (1+(-1)=0)$$

$$= 0 \quad (1.29)$$

$$\therefore (-1)v = -v$$

//

(§ 1.A e 1.B)