SUBESPAÇOS

11/01/22

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$.
($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1.32 <u>Def</u>. Um subconjunto U de V é dito <u>subespaço</u> (ou <u>subespaço vetorial</u>) de V se as operações de espaço vetorial de V se restringem a U e o tornam um espaço vetorial.

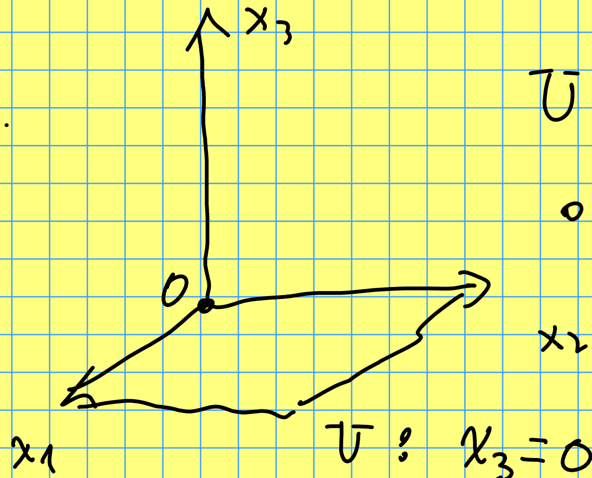
<u>Ex</u>. $V = \mathbb{F}^3$ esp. vet.

$U = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{F}\}$ é um subespaço de $\mathbb{F}^3$.

Pois: $\underbrace{(x_1, x_2, 0)}_{\text{em } U} \underset{\text{em } V}{+} \underbrace{(y_1, y_2, 0)}_{\text{em } U} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)$ $\therefore \in U$

$\underset{a \in \mathbb{F}}{a} \cdot_{\text{em } V} (x_1, x_2, 0) = (ax_1, ax_2, 0)$ $\therefore \in U$

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ $\quad V = \mathbb{R}^3$



$U : x_3 = 0$

U é um plano (passando pela origem) em $\mathbb{R}^3$.

Um subconj de V que não contenha o vetor nulo de V não pode ser um subespaço de V.

1.34 <u>Critério para U ser um subespaço de V</u>

- $0 \in U$.
- $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$
- $a \in \mathbb{F},\ u \in U \Rightarrow au \in U$

<u>Dem</u>. Se U é um subespaço de V, então U é um espaço vetorial com as operações induzidas de V, e valem essas três condições.

Reciprocamente, suponhamos que valham as três condições. A 2.ª e 3.ª estão dizendo que as ops de V se restringem a U. A 1.ª diz que $0 \in U$. Se $u \in U$, então pela 3.ª, $(-1)u \in U$, e sabemos que $-u = (-1)u \in U$.

As outras propriedades das ops valem para vetores em V, em particular, valem para vetores U. //

__Exs__ (a) Seja $b \in \mathbb{F}$. Então

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}^4 : x_3 = 5x_4 + b\}$$

é um subespaço de $\mathbb{F}^4 \Leftrightarrow b = 0$.

$$x_3 = 5x_4 + b$$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ (0,0,0,0)}}{0} \in U \Leftrightarrow 0 = 5.0 + b \Leftrightarrow b = 0$$

Se $b = 0$:

$$\begin{array}{r} x_3 - 5x_4 = 0 \\ + \quad x_3' - 5x_4' = 0 \\ \hline \end{array}$$

$$(x_3+x_3')-5(x_4+x_4')=0$$

$$\left.\begin{matrix}(x_1,x_2,x_3,x_4)\\(x_1',x_2',x_3',x_4')\end{matrix}\right\}\in U \Rightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)+(x_1',x_2',x_3',x_4')$$

$$=(x_1+x_1',x_2+x_2',x_3+x_3',x_4+x_4')$$

$$\in U$$

$$a\times \quad x_3-5x_4=0 \quad \times a \qquad a\in \mathbb{F}$$

$$ax_3-5(ax_4)=0$$

$$\left.\begin{matrix}(x_1,x_2,x_3,x_4)\in U\\ a\in\mathbb{F}\end{matrix}\right. \Rightarrow a(x_1,x_2,x_3,x_4)=(ax_1,ax_2,ax_3,ax_4)$$

$$\in U.$$

Em geral:

$$V=\mathbb{F}^n \qquad a_1x_1+\dots+a_nx_n=0$$

$a_j\in\mathbb{F}$ define um subespaço U de V

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

Define um subespaço de $\mathbb{F}^n$.

(b) $V=\mathbb{R}^{[0,1]}$: funções $[0,1]\to\mathbb{R}$

$\cup$

$U=C([0,1];\mathbb{R})$ (fns. contínuas) é subesp.

Pois:
- $0 \in U$ (fn. nula é contínua)
- Soma de fns. cont. é cont.
- Prod. de uma fn. cont. por um escalar é cont.

(c) $C^k((a,b);\mathbb{R}) \underset{\text{subesp.}}{\subset} \mathbb{R}^{(a,b)}$

(d) $V = \mathbb{R}^{(0,3)}$

U: fns. diferenciáveis $f: (0,3) \to \mathbb{R}$ com $f'(2) = b$.

$$U \text{ é subespaço de } V \Rightarrow \overset{\text{fn. nula de } V}{0} \in U \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \quad 0: (0,3) \to \mathbb{R} \text{ é dif}$$

$$0 = 0(2) = 0'(2) = b$$

$$\Rightarrow b = 0$$

Suponhamos que $b = 0$.

Neste caso:

$f, g \in U \Rightarrow f, g: (0,3) \to \mathbb{R}$ difs,

$f'(2) = 0$ e $g'(2) = 0$

$\Rightarrow f+g: (0,3) \to \mathbb{R}$ dif, e

$(f+g)'(2) = f'(2) + g'(2) = 0 + 0 = 0.$

$\therefore\ f+g \in U$

Ainda supondo $b=0$:

$\forall a \in \mathbb{R}$

$f \in U \Rightarrow f : (0,3) \to \mathbb{R}$ dif $\Rightarrow$ $af : (0,3) \to \mathbb{R}$ dif

$f'(2) = 0$

e

$(af)'(2)$
$= af'(2)$
$= a.0 = 0$

$\therefore\ af \in U$

— // —

Quais são os subespaços do $\mathbb{R}^3$?

- Planos que passam pela origem.
- Retas " " " "
- $\{0\}$
- $\mathbb{R}^3$

(Na verdade, V e $\{0\}$ são sempre subespaços de V).

— // —

OPERAÇÕES COM SUBESPAÇOS

Ops com cjs. : $A \cup B$

$A \cap B$

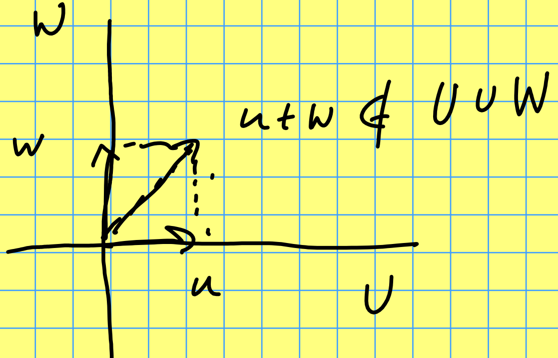
Seja $\bar{V}$ um espaço vetorial, sejam U, W dois subespaços de $\bar{V}$.

São $U \cup W$, $U \cap W$ subespaços de $\bar{V}$?

- $U \cup W$ em geral não é:

$U = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$, $W = \{(0, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ são subesp de $\mathbb{R}^2$,

mas $U \cup W = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = 0 \text{ ou } x_1 = 0\}$ não é



- A intersecção sempre é

Na verdade

$\{U_i\}_{i\in I}$ família de subesp de V $\Rightarrow \bigcap_{i\in I} U_i$ é um subesp.

Usamos o critério para provar isso:

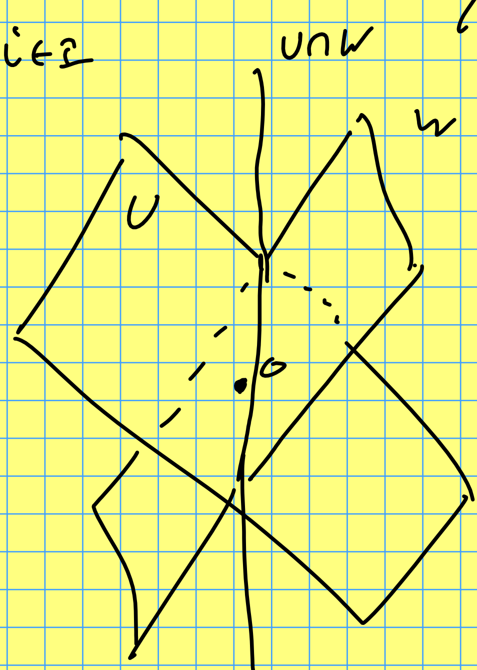
- $0 \in U_i \ \forall i \in I \Rightarrow 0 \in \bigcap_{i\in I} U_i$ ✓
- $u, v \in \bigcap_{i\in I} U_i \Rightarrow u, v \in U_i \ \forall i\in I \Rightarrow u+v \in U_i \ \forall i \in I$

$\Rightarrow u+v \in \bigcap_{i\in I} U_i$ ✓

- $u \in \bigcap_{i\in I} U_i$, $a \in \mathbb{F}$ $\Rightarrow u \in U_i \ \forall i\in I \Rightarrow au \in U_i \ \forall i \in I$

$\Rightarrow au \in \bigcap_{i\in I} U_i$ ✓ //

$V = \mathbb{R}^3$



Def. [SOMA DE SUBESPAÇOS]

Sejam $U_1, \dots, U_m$ subespaços de V.

A **soma** de $U_1, \dots, U_m$ é

$$U_1 + \dots + U_m = \{u_1 + \dots + u_m \mid u_1 \in U_1, \dots, u_m \in U_m\}$$

Ex. $V = \mathbb{R}^3$

$$U = \{(x_1, 0, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{(0, x_2, 0) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$U + W = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

(1.39) Sejam $U_1, \dots, U_m$ subesp de V. Então $U_1 + \dots + U_m$ é um subespaço de V, e é o menor subespaço de V que contém $U_1, \dots, U_m$.

Dem. Usamos o critério para verificar que $U_1 + \dots + U_m$ é subesp:

- $0 = \underset{\substack{\uparrow \\ U_1}}{0} + \dots + \underset{\substack{\uparrow \\ U_m}}{0} \in U_1 + \dots + U_m$ ✓

- $u = \overbrace{u_1}^{\in U_1} + \dots + \overbrace{u_m}^{\in U_m} \in U_1 + \dots + U_m$

$v = \underbrace{v_1}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{v_m}_{\in U_m} \in U_1 + \dots + U_m$

$$\Rightarrow u + v = (u_1 + \dots + u_m) + (v_1 + \dots + v_m)$$

$$= \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{(u_m + v_m)}_{\in U_m}$$

$$\in U_1 + \dots + U_m \checkmark$$

- $u = \underbrace{u_1}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{u_m}_{\in U_m} \in U_1 + \dots + U_m$

$a \in \mathbb{F}$

$$\Rightarrow au = a(u_1 + \dots + u_m)$$

$$= \underbrace{au_1}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{au_m}_{\in U_m}$$

$$\in U_1 + \dots + U_m \checkmark$$

$\therefore$ $U_1 + \dots + U_m$ é um subesp.

Cada U_i está contido em $U_1 + \dots + U_m$, pois, dado $u \in U_i$, temos

$$u = \underbrace{0}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{0}_{\in U_{i-1}} + u + \underbrace{0}_{\in U_{i+1}} + \dots + \underbrace{0}_{\in U_m}$$

$$\Rightarrow u \in U_1 + \dots + U_m.$$

Finalmente, se W é um subesp de V que contém $U_1, \ldots, U_m$, então $W \supset U_1 + \cdots + U_m$. De fato:

Seja $u = \underbrace{u_1}_{\in U_1} + \cdots + \underbrace{u_m}_{\in U_m} \in U_1 + \cdots + U_m$ arbitrário.

Como $W \supset U_1, \ldots, U_m$, temos

$$u_1 \in W, \ldots, u_m \in W.$$

$$\Longrightarrow u = u_1 + \cdots + u_m \in W$$

W é subesp

$$\therefore U_1 + \cdots + U_m \subset W \;//$$

— n —

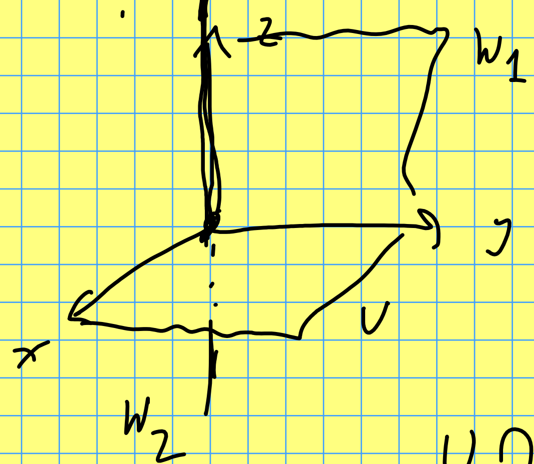
<u>Ex</u>. $V = \mathbb{R}^3$

$$U = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$W_1 = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$W_2 = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\},$$

$$U + W_1 = \mathbb{R}^3$$



$$(x,y,z) = \underbrace{(x,y,0)}_{\in U} + \underbrace{(0,0,z)}_{\in W_1}$$
$$= \underbrace{(x,0,0)}_{\in U} + \underbrace{(0,y,z)}_{\in W_1}$$

$$U \cap W_1 = \{(0,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\}$$
$$\neq \{0\}.$$

$$U + W_2 = \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) = \underbrace{(x,y,0)}_{\in U} + \underbrace{(0,0,z)}_{\in W_2}$$

$$U \cap W_2 = \{0\}$$

(essa decomp é única)

$$U + W_2 = U \oplus W_2$$

Dizemos que esta soma é <u>direta</u>

(1.40) [SOMA DIRETA]

Sejam $U_1, \dots, U_m$ subesp de V.

Então $U_1 + \dots + U_m$ é chamada de <u>soma direta</u> se cada elemento de $U_1 + \dots + U_m$ pode ser escrito de maneira única na forma $u_1 + \dots + u_m$ com $u_1 \in U_1, \dots, u_m \in U_m$.

(1.43) Ex $V = \mathbb{R}^3$

$U_1 : x_3 = 0$

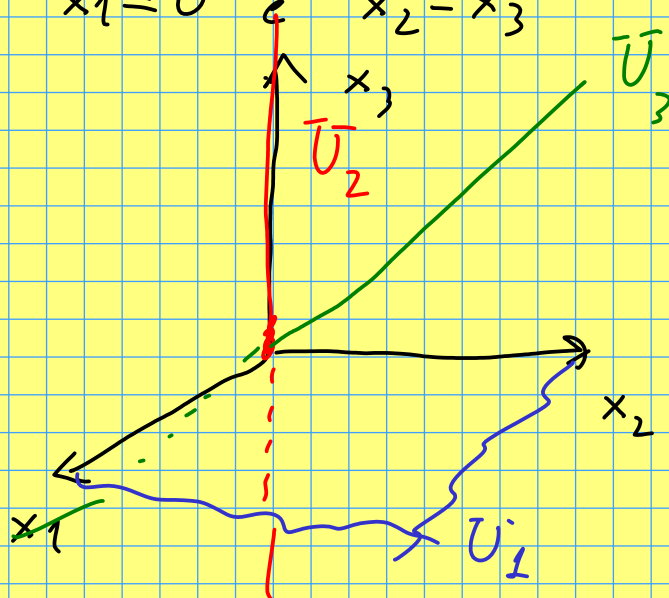
$U_2 : x_1 = x_2 = 0$

$U_3 : x_1 = 0$ e $x_2 = x_3$

$U_1 + U_3 = \mathbb{R}^3$

$U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$

$U_2 + U_3 \subsetneq \mathbb{R}^3$



$U_1 \cap U_2 = \{0\}$

$U_1 \cap U_3 = \{0\}$

$U_2 \cap U_3 = \{0\}$

$U_1 + U_2 + U_3 = \mathbb{R}^3$ não é direta

$0 = 0 + 0 + 0$

$$0 = \underbrace{(0,1,0)}_{\in U_1} + \underbrace{(0,0,1)}_{\in U_2} + \underbrace{(0,-1,-1)}_{\in U_3}$$

—//—

(1.44) $U_1 + \dots + U_m$ é uma soma direta

$\Leftrightarrow$ O único modo de decompor 0 numa soma $u_1 + \dots + u_m$ com $u_i \in U_i, \forall i$ é $0 + \dots + 0$.

(1.45) Sejam U, W subesp. de V. Então:

$U + W$ é soma direta $\iff U \cap W = \{0\}$.

Dem. $(\Leftarrow)$

Suponhamos que $U \cap W = \{0\}$ e que

$$u_1 + w_1 = u = u_2 + w_2$$

com $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$. Então

$$\underbrace{u_2 - u_1}_{\in U} = \underbrace{w_1 - w_2}_{\in W} \in U \cap W = \{0\}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} u_2 - u_1 = 0 \\ w_1 - w_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_1 = u_2 \\ w_1 = w_2 \end{matrix} \quad \therefore U + W = U \oplus W$$

$(\Rightarrow)$ Suponhamos que $U + W$ é uma soma direta. Seja $v \in U \cap W$. Então

$$v \in U \text{ e } v \in W \Rightarrow -v \in W$$

$$0 + 0 = 0 = \underbrace{v}_{\in U} + \underbrace{(-v)}_{\in W}$$

Como a decomp do 0 é única (pela soma ser direta), $v = 0$

$\therefore U \cap W = \{0\}$ //.

(§1.C)