ESPAÇOS VETORIAIS DE DIMENSÃO FINITA

12/01/22

V : espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$

$\mathbb{F}$: $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

2.3 Def [COMBINAÇÃO LINEAR]

Uma combinação linear de uma lista de vetores $v_1, \dots, v_m \in V$ é um vetor da forma

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

onde $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$.

Ex. • $6(2,1,-3) + 5(1,-2,4) = (17,-4,2)$

$(17,-4,2) \in \mathbb{F}^3$ é uma comb lin de $(2,1,-3), (1,-2,4)$

• Por outro lado, $(17,-4,5)$ não é uma comb lin de $(2,1,-3), (1,-2,4)$, pois se tentarmos escrever

$$(17,-4,5) = a(2,1,-3) + b(1,-2,4),$$

então

$$\begin{cases} 17 = 2a + b \\ -4 = a - 2b \\ 5 = -3a + 4b \end{cases}$$

Sistema linear incompatível.

2.5 [SPAN ou ~~CONJUNTO~~ SUBESPAÇO GERADO de uma lista de vetores]

É o cj. formado por todas as combs. lin. dessa lista.

Ex. $(17, -4, 2) \in \operatorname{span}((2,1,-3), (1,-2,4))$

$(17, -4, 5) \notin \operatorname{span}((2,1,-3), (1,-2,4))$.

2.7 Seja $v_1, \dots, v_m$ uma lista de vetores de V. Então $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_m)$ é um subespaço de V, e é o menor subespaço de V que contém os vetores da lista.

Dem. Primeiramente, verifiquemos as 3 condições para $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_m)$ ser um subespaço:

- $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_m)$ ✓

• $u, v \in \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_m)$

$\Rightarrow u = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$

$v = b_1 v_1 + \ldots + b_m v_m$

$\Rightarrow u + v = (a_1 + b_1) v_1 + \ldots + (a_m + b_m) \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$ ✓

• $u \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$, $a \in \mathbb{F}$

$\Rightarrow u = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$

$\Rightarrow au = (a a_1) v_1 + \ldots + (a a_m) v_m$

$\in \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_m)$ ✓

$v_j = 0 v_1 + \ldots + 0 v_{j-1} + 1 v_j + 0 v_{j+1} + \ldots + 0 v_m$

$\in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$

Se U é um <u>subespaço</u> de V que contém $v_1, \ldots, v_m$, então U deve conter qq. comb. linear desses (pela propriedade de U ser fechado sob as ops. de V).

$\therefore U \supset \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_m)$ //.

$\rightarrow$

Se $U \subset V$ é da forma
subesp.

$$V = \text{span}(v_1, \dots, v_m)$$

para alguns $v_1, \dots, v_m \in V$, então dizemos que a lista $v_1, \dots, v_m$ <u>gera</u> V.

<u>Ex</u> $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$

Essa lista gera $\mathbb{F}^4$, pois

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(1,0,0,0) + x_2(0,1,0,0) + x_3(0,0,1,0)$$
$$+ x_4(0,0,0,1)$$

$x_j \in \mathbb{F}$

2.10 <u>Def.</u> Um esp. vet V é dito de <u>dimensão</u> <u>finita</u> se existe uma lista de vetores de V que gera V.

<u>Ex</u>. $\mathbb{F}^4$ tem dim finita.
$\mathbb{F}^n$ " " ".

—//—

$$P(\mathbb{F}) = \{ p : \mathbb{F} \to \mathbb{F} \mid p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \text{ onde } a_j \in \mathbb{F} \text{ e } n \geq 0 \}$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$.

[Grau]

$\deg p = n$ se $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ com $a_n \neq 0$.

$p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$

$\to \deg 0 = -\infty$

polinômio nulo.

$\mathcal{P}_m(\mathbb{F}) = \{ p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \mid \deg p \leq m \}$ $(m \geq 0)$

(i.e. $0 \in \mathcal{P}_m(\mathbb{F})$, $\forall m$)

$$\begin{cases} \deg(p+q) \leq \max\{\deg p, \deg q\} \\ \deg(ap) \leq \deg(p) \end{cases}$$

$p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, $a \in \mathbb{F}$

$\Rightarrow \mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ é um esp vetorial.

é um subespaço de $\mathcal{P}(\mathbb{F})$

" " " " $\mathcal{P}_{m+1}(\mathbb{F})$

2.14 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ tem dim finita, pois

$\mathcal{P}_m(\mathbb{F}) = \text{span}\{1, z, \dots, z^m\}$.

2.16 $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ $\underbrace{\text{não tem dim finita}}$ $\overset{\text{def}}{=}$ tem dim infinita

Dem. Mostraremos que nenhuma lista gera $P(\mathbb{F})$. Seja $p_1, \ldots, p_n$ uma lista de $P(\mathbb{F})$. Seja $m = \max\{\deg p_1, \ldots, \deg p_n\}$.

Agora

$$\deg(a_1 p_1 + \ldots + a_n p_n) \leq m \quad \forall a_j \in \mathbb{F}$$

$$\Rightarrow \operatorname{span}(p_1, \ldots, p_m) \subset P_m(\mathbb{F}) \subsetneq P(\mathbb{F})$$

//

— // —

Def. [RELAÇÃO LINEAR entre $v_1, \ldots, v_m$]:

É uma comb lin

$$\underbrace{a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = 0}_{} \qquad \Rightarrow \; v_m = -\frac{a_1}{a_m} v_1 - \ldots - \frac{a_{m-1}}{a_m} v_{n-1}$$

(se $a_m \neq 0$)

onde nem todos $a_1, \ldots, a_n$ são nulos.

Def [INDEPENDÊNCIA LINEAR]

Dizemos que a lista $v_1, \ldots, v_m$ é <u>linearmente independente</u> (L.I.) se não existe relação linear entre eles. Caso contrário, dizemos que $v_1, \ldots, v_m$ são <u>linearmente dependentes</u> (L.D.).

Exs (a) v_1, v_2 é LD $\Leftrightarrow$ Pelo menos um dentre

v_1, v_2 é múltiplo do outro.

<u>Dem</u> $(\Leftarrow)$ Se $v_2 = a v_1$ então $a \cdot v_1 + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_2 = 0$

$\Rightarrow v_1, v_2$ LD

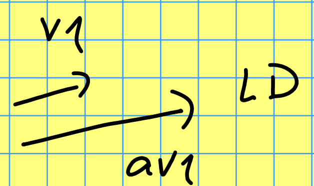
$(\Rightarrow)$ Se v_1, v_2 é LD então $a v_1 + b v_2 = 0$

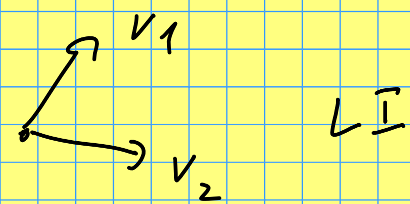
onde $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$v_1 = -\frac{b}{a} v_2 \qquad\qquad v_2 = -\frac{a}{b} v_1$

//.





(b) v é LD $\Leftrightarrow$ $v = 0$

$(\Rightarrow)$ Se v é LD existe $a v = 0$ com $a \neq 0$

$\Rightarrow \underbrace{a^{-1}(a v)}_{=(a^{-1}a)v} = \underbrace{a^{-1} \cdot 0}_{=0} \Rightarrow 1 \cdot v = 0 \Rightarrow v = 0$

$(\Leftarrow)$ Se $v = 0$ então $\underbrace{1}_{\neq 0} \cdot v = 0$ é uma rel lin. $\Rightarrow$ v é LD.

(c) Se uma lista $v_1, \ldots, v_m$ contém 0, então ela é L.D.

De fato, SPG $v_1 = 0$. Então:

$$\underbrace{1 \cdot v_1}_{=0} + \underbrace{0\, v_2}_{=0} + \dots + \underbrace{0\, v_m}_{=0} = 0,$$

onde $1 \neq 0$, é uma rel. lin entre $v_1, \dots, v_m$.

(d) $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)$ é L.I em $\mathbb{F}^4$.

De fato, procuremos uma rel. lin.

$$a(1,0,0,0) + b(0,1,0,0) + c(0,0,1,0) = (0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow (a,b,c,0) = (0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow a = b = c = 0 \qquad \text{Não existe!}$$

(e) $1, z, z^2, \dots, z^m$ é LI em $\mathcal{P}(\mathbb{F})$, $\forall m \geq 0$.

(f) $\emptyset$ é LI.

—u—

Obs: $\mathrm{span}(\emptyset) \overset{\mathrm{def}}{=} \{0\}$

—u—

2.21 [LEMA DA DEPENDÊNCIA LINEAR]

Suponhamos que $v_1, \dots, v_m$ é LD em V.

Então $\exists\, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ t.q.:

(a) $v_j \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_{j-1})$

(b) $\mathrm{span}(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_m) \overset{\subseteq\,\checkmark}{\underset{\supseteq ?}{=}} \mathrm{span}(v_1, \dots, v_m)$.

Dem. Como $v_1, \dots, v_m$ é LD, $\exists$ rel. lin.

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$$

Seja $j = \max \{ i \in \{1, \dots, m\} \mid a_i \neq 0 \}$.

Então $a_{j+1} = \dots = a_m = 0$, $a_j \neq 0$ e

$$v_j = -\frac{a_1}{a_j} v_1 - \dots - \frac{a_{j-1}}{a_j} v_{j-1},$$

provando (a).

Seja $v \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_m)$. Então

$$v = b_1 v_1 + \dots + b_j v_j + \dots + b_m v_m$$

para alguns $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{F}$.

$$\Rightarrow v = \left(b_1 - \frac{a_1}{a_j}\right) v_1 + \dots + \left(b_{j-1} - \frac{a_{j-1}}{a_j}\right) v_{j-1}$$

$$+ b_{j+1} v_{j+1} + \dots + b_m v_m$$

$$\in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_m) \quad //$$

—n—