TRANSFORMAÇÕES LINEARES

18/01/22

(Cap. 3)

V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$, onde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.2 **Def** [TRANSFORMAÇÃO LINEAR de V em W]

É uma aplicação $T : V \to W$ satisfazendo:

- $T(u+v) = Tu + Tv \quad \forall u, v \in V$
- $T(\lambda v) = \lambda (Tv) \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}, v \in V$

"T preserva as operações de esp. vet."

$\mathcal{L}(V,W) :=$ cj. de todas transf. lin. $V \to W$

$\mathcal{L}(V) := \mathcal{L}(V,V)$

Exemplos

1. Transformação nula $\quad 0 : V \to W, \; 0v = 0, \; \forall v \in V$
2. $V = W \quad I : V \to V$ transformação identidade

$$v \mapsto v \qquad Iv = v \quad \forall v \in V$$

3. Op. de diferenciação de polinômios

$D \in \mathcal{L}(P(\mathbb{R})) \qquad Dp = p'$

4. Integração $\quad T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$

$$Tp = \int_0^1 p(x)\,dx \qquad p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

5. Multiplicação $\quad T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$
por $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$$M_q p = q \cdot p$$

6. Backward shift

$$\mathbb{F}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_j \in \mathbb{F}\}$$

$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^\infty)$

$$T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

Forward shift

$S \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^\infty)$

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

7. $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

$$T(x, y, z) = (2x - y + 3z,\ 7x + 5y - 6z)$$

8. $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$T(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j\right)$$

3.5 Transf. lineares × bases

Suponhamos que $v_1, \dots, v_n$ é uma base de $\bar{V}$ e que $w_1, \dots, w_n \in \bar{W}$ são arbitrários. Então existe uma única transf. lin. $T: \bar{V} \to \bar{W}$ t.q. $Tv_j = w_j, \forall j$.

Dem. Unicidade

Seja $T \in \mathcal{L}(\bar{V}, W)$ com $Tv_j = w_j, \forall j = 1, \dots, n$. (1)

Vamos determinar uma fórmula para T.

Dado $v \in \bar{V}$, como $v_1, \dots, v_n$ é uma base de $\bar{V}$, existem escalares $a_1, \dots, a_n$, unicamente determinados, t.q. $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$.

Como T é linear,

$$
\begin{aligned}
Tv &= T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) \\
&= T(a_1 v_1) + \dots + T(a_n v_n) \\
&= a_1 T v_1 + \dots + a_n T v_n \\
&= a_1 w_1 + \dots + a_n w_n \qquad \text{(por (1))}
\end{aligned}
$$

Isso prova a unicidade de T, se T existe então deve ser desta forma.

Existência. Definimos $T: V \to W$ da seguinte forma: dado $v \in V$, escrevemos $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

$v = v_j \Rightarrow a_i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

e pomos $Tv = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$. Verifiquemos que

$Tv_j = w_j$ ✓

T assim definido é linear.

Dado $u \in V$, escrevemos $u = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$

e assim $Tu = b_1 w_1 + \dots + b_n w_n$. Agora

$v + u = (a_1 + b_1) v_1 + \dots + (a_n + b_n) v_n$ e assim

$$T(v+u) = (a_1+b_1) w_1 + \dots + (a_n + b_n) w_n \quad \text{(por construção)}$$
$$= (a_1 w_1 + \dots + a_n w_n) + (b_1 w_1 + \dots + b_n w_n)$$
$$= Tv + Tu \quad ✓$$

Além disso, para $\lambda \in \mathbb{F}$,

$\lambda v = (\lambda a_1) v_1 + \dots + (\lambda a_n) v_n$ e

$$T(\lambda v) = (\lambda a_1) w_1 + \dots + (\lambda a_n) w_n \quad \text{(p/ constr.)}$$
$$= \lambda (a_1 w_1 + \dots + a_n w_n)$$
$$= \lambda (Tv) \quad ✓$$

Logo, T acima construída é linear. //

OPERAÇÕES ALGÉBRICAS EM $\mathcal{L}(V,W)$

Dados $S, T \in \mathcal{L}(V,W)$, podemos definir

$$S+T : V \to W \qquad (S+T)v := Sv \underset{\text{em } W}{+} Tv$$

Dados $T \in \mathcal{L}(V,W)$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, podemos definir

$$\lambda T : V \to W, \qquad (\lambda T)v := \lambda \underset{\text{em } W}{\cdot} (Tv).$$

Importante:

$$S+T, \ \lambda T \in \mathcal{L}(V,W) \qquad (\underline{\text{Verificar!}})$$

3.7 $\mathcal{L}(V,W)$ é um espaço vetorial.

<u>Dem</u> Ex.

$0 \in \mathcal{L}(V,W)$ $\qquad (-T)v = -(Tv) \quad \forall v \in V$

3.8 U, V, W esp. vet.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "S \circ T"'] & V \arrow[r, "S"] & W \end{tikzcd}$$

<u>Def.</u> Dadas $T \in \mathcal{L}(U,V)$ e $S \in \mathcal{L}(V,W)$, o produto ST é a transformação composta

$$(S \circ T)u = S(Tu) \qquad \forall u \in U$$

Importante $ST \in \mathcal{L}(U, W)$ (Verificar!)

3.9 Propriedades (Verificar!)

- $(RS)T = R(ST)$
- $TI_V = I_W T = T$ $\quad T \in \mathcal{L}(V, W)$

I_V identidade de V

I_W " " W

- $(R+S)T = RT + ST$ $\quad R, S \in \mathcal{L}(U,V),\ T \in \mathcal{L}(V,W)$

$R(S+T) = RS + RT$ $\quad R \in \mathcal{L}(U,W),\ S, T \in \mathcal{L}(U,W)$

—n—

$ST \neq TS$, em geral.

Ex. $D \in \mathcal{L}(P(\mathbb{R}))$ $\quad M_{x^2} \in \mathcal{L}(P(\mathbb{R}))$

$$\left.\begin{array}{l} D M_{x^2}(1) = D(x^2) = 2x \\ M_{x^2} D(1) = M_{x^2}(0) = 0 \end{array}\right] \neq$$

—n—

3.11 $T \in \mathcal{L}(V, W) \Rightarrow T(0) = 0$.

Dem. $T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0)$

$\Rightarrow (-T(0)) + T(0) = T(0) + (T(0) + (-T(0)))$

$0 = T(0) + 0$

$\therefore 0 = T(0)$ //

Ex. $T(x_1,\dots,x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\, x_j\right)$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{F}^n \leftrightarrow M(n\times 1, \mathbb{F})$

$$T \in \mathcal{L}(M(n\times 1,\mathbb{F}),\ M(m\times 1, \mathbb{F}))$$

$X, Y \qquad \lambda \in \mathbb{F}$

$$\begin{cases} T(X+Y) = TX + TY \\ T(\lambda X) = \lambda TX \end{cases}$$

§ 3.B

<u>Def.</u> [NÚCLEO de $T \in \mathcal{L}(V,W)$]

É $\quad T^{-1}(0) = \{ v \in V \mid Tv = 0 \}$.

<u>Notação</u> $\ker T$

<u>Exs.</u> 1. $0 \in \mathcal{L}(V,W) \qquad \ker 0 = V$

2. $I \in \mathcal{L}(V) \qquad \ker I = \{0\}$.

3. $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $T(x,y,z) = x+y+z$

$\ker T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$

é um plano em $\mathbb{R}^3$. $\therefore$ subespaço de $\mathbb{R}^3$

$(x,y,z) = (x,y,-x-y)$

$= x(1,0,-1) + y(0,1,-1)$

$(1,0,-1), (0,1,-1)$ é base de $\ker T$

$\dim \ker T = 2$

4. $D \in \mathcal{L}(P(\mathbb{R}))$ $\ker D = \{$polinômios constantes$\}$

5. $M_{x^2} \in \mathcal{L}(P(\mathbb{R}))$ $\ker M_{x^2} = \{0\}$. $x^2 p(x) = 0 \Rightarrow p(x) = 0$

6. $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$ $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^\infty)$

$\ker T = \{(x_1, 0, 0, \dots) \mid x_1 \in \mathbb{F}\}$

3.14 Dado $T \in \mathcal{L}(V,W)$, temos que $\ker T$ é um subespaço de V

Dem. • $T(0) \overset{3.11}{=} 0 \Rightarrow 0 \in \ker T$

• $u, v \in \ker T \Rightarrow T(u+v) = Tu + Tv$ (T lin)

$= 0 + 0$

$= 0$

$\Rightarrow \quad u+v \in \ker T$

- $\left.\begin{array}{l} u \in \ker T \\ \lambda \in \mathbb{F} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad T(\lambda u) = \lambda(Tu) \quad (T \text{ lin})$

$$= \lambda 0$$
$$= 0$$
$$\Rightarrow \lambda u \in \ker T.$$

//

3.16 Seja $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Então

$$T \text{ é injetora} \iff \ker T = \{0\}.$$

<u>Dem</u> ($\Rightarrow$) Suponhamos que T é injetora, isto é: $\quad Tv_1 = Tv_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \quad (*)$

Se $v \in \ker T$ então

$$Tv = 0 = T(0)$$

$\underset{(*)}{\Rightarrow} \quad v = 0 \qquad \therefore \quad \ker T = \{0\}.$

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\ker T = \{0\}$.

Sejam $v_1, v_2 \in V$ com $Tv_1 = Tv_2$.

$$\Rightarrow \quad 0 = Tv_1 - Tv_2$$
$$= Tv_1 + (-Tv_2)$$

$$= Tv_1 + T(-v_2) \quad (T \text{ lin})$$

$$= T(v_1 + (-v_2)) \quad (T \text{ lin})$$

$$= T(v_1 - v_2)$$

$\Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker T = \{0\} \therefore v_1 = v_2$ e

T é inj //.

—n—

<u>Obs.</u> Seja $T \in \mathcal{L}(V, W)$ e seja $\bar{U}$ um subespaço de $\bar{W}$. Então $T^{-1}(\bar{U})$ é um subespaço de $\bar{V}$.

<u>Dem</u> • $T(0) \underset{3.11}{=} 0 \underset{\bar{U} \text{ é subesp}}{\in} \bar{U} \Rightarrow 0 \in T^{-1}(\bar{U})$ ✓

• $v_1, v_2 \in T^{-1}(U) \Rightarrow Tv_1, Tv_2 \in \bar{U}$

$\Rightarrow Tv_1 + Tv_2 \in U \quad (U \text{ é subesp})$

$\Rightarrow T(v_1 + v_2) \in U \quad (T \text{ é lin})$

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in T^{-1}(U)$ ✓

• $\lambda \in \mathbb{F}, \ v \in T^{-1}(U) \Rightarrow Tv \in U$

$\Rightarrow \lambda(Tv) \in U \quad (U \text{ é subesp})$

$\cdot \, " \leftarrow T$ é lin.

$T(\lambda v)$

$\Rightarrow T(\lambda v) \in U \Rightarrow \lambda v \in T^{-1}(U)$ ✓ //.

Ex. 1 § 2.B

Quais são os espaços vetoriais (de dim finita) sobre $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) que têm exatamente uma base?

Resolução $V = \{0\}$ possui apenas a base $\emptyset$.

Se $V \neq \{0\}$ então $\dim V = n \geq 1$.

Seja $v_1, \dots, v_n$ uma base de V.

Então $\lambda v_1, v_2, \dots, v_n$ também é uma base de V,

$\forall \lambda \in \underbrace{\mathbb{F} \setminus \{0\}}_{\text{é infinito}}$. $\lambda \neq 0$

$a_1(\lambda v_1) + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$ rel. lin

$\Rightarrow (\lambda a_1) v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$ rel lin

$\overset{v_1, \dots, v_n \text{ LI}}{\Rightarrow} \lambda a_1 = 0, \; a_2 = 0, \dots, a_n = 0$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \quad \therefore \underbrace{\lambda v_1, v_2, \dots, v_n}_{\text{compr } n = \dim V}$ LI

Resp $\bar{V} = \{0\}$ //

$\nexists\, v_1, v_2, \ldots, v_n$

é base

de $\bar{V}$