IMAGEM DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

19/01/22

V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Seja $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

3.17 Def. A imagem de T é

$$\operatorname{im} T = \{ Tv \mid v \in V \}$$

Exs.

- $T = 0$ (aplicação nula) $\Rightarrow$ $\operatorname{im} T = \{0\}$.
- $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $T(x,y) = (2x, 5y, x+y)$

$\operatorname{im} T = \{ (2x, 5y, x+y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

$(2x, 5y, x+y) = x(2,0,1) + y(0,5,1)$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \operatorname{im} T = \langle (2,0,1), (0,5,1) \rangle \\ (2,0,1), (0,5,1) \text{ lista L.I.} \end{array}\right\} \Rightarrow (2,0,1), (0,5,1)$ é uma base de $\operatorname{im} T$

$\dim \operatorname{im} T = 2$ $\qquad$ $\operatorname{im} T$: plano em $\mathbb{R}^3$

- $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$, $Dp = p'$

$\operatorname{im} D = ?$ $\qquad$ Resp $\operatorname{im} D = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, pois dado

$p \in P(\mathbb{R})$, $\exists\, q \in P(\mathbb{R})$ t.q. $q' = p$.

3.19 $T \in \mathcal{L}(V,W) \Rightarrow \operatorname{im} T$ é um subespaço de W.

Dem. • $T(0) = 0 \Rightarrow 0 \in \operatorname{im} T$

• $w_1, w_2 \in \operatorname{im} T \Rightarrow \exists\, v_1, v_2 \in V$ t.q. $Tv_1 = w_1$ e $Tv_2 = w_2$

$$\Rightarrow w_1 + w_2 = Tv_1 + Tv_2$$
$$= T(v_1 + v_2) \quad (T \text{ lin.})$$

$\Rightarrow w_1 + w_2 \in \operatorname{im} T$

• $\lambda \in \mathbb{F}$, $w \in \operatorname{im} T \Rightarrow \exists\, v \in V$ t.q. $Tv = w$

$$\Rightarrow \lambda w = \lambda(Tv)$$
$$= T(\lambda v) \quad (T \text{ lin})$$

$\Rightarrow \lambda w \in \operatorname{im} T$ //.

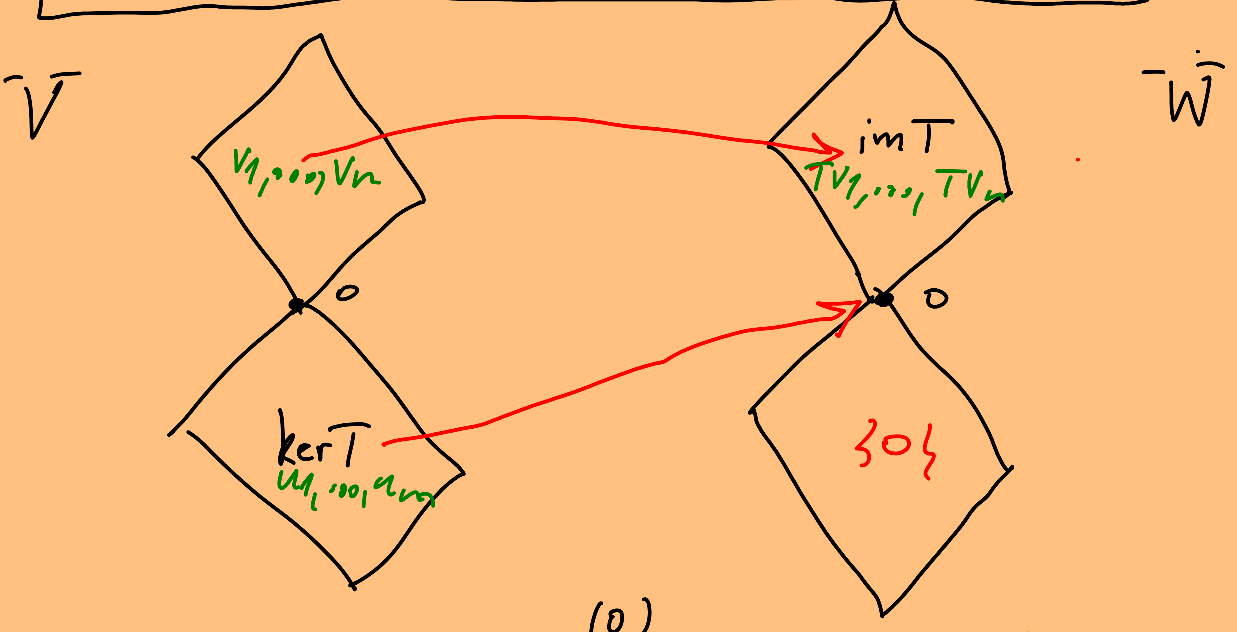
3.20 Def. $T: V \to W$ é sobrejetora se $\operatorname{im} T = W$.

3.21 Ex. $Dp = p'$, $D: P_5(\mathbb{R}) \to P_5(\mathbb{R})$ não é sobrejetora, pois $x^5 \notin \operatorname{im} D$. Mas $Dp = p'$, $D: P_5(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$ é sobrejetora.

3.22 TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA LINEAR

Suponhamos que V é de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Então $\operatorname{im} T$ é de dim finita e

$$\boxed{\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{im} T}$$



<u>Dem</u>. Seja $\underbrace{u_1, \dots, u_m}_{\text{L.I.}}{}^{(0)}$ uma base de $\ker T$.

Podemos estendê-la a uma base

$$u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n \qquad (1)$$

de V. (por (2.33)) Temos

$$\begin{aligned} \dim V &= m+n \\ &= \dim \ker T + n. \end{aligned}$$

Falta ver que $\operatorname{im} T$ tem dim finita e que $\dim \operatorname{im} T = n$. Faremos isso mostrando que

$$Tv_1, \dots, Tv_n$$

é uma base de $\operatorname{im} T$.

Dado $w \in \operatorname{im} T$, existe $v \in V$ t.q. $Tv = w$.

Como (1) é base de V, podemos escrever

$$v = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m + b_1 v_1 + \dots + b_n v_n \quad (2)$$

para alguns $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{F}$.

Aplicando T a ambos os membros de (2), vem:

$$\underbrace{Tv}_{=w} = a_1 \underbrace{Tu_1}_{=0} + \dots + a_m \underbrace{Tu_m}_{=0} + b_1 Tv_1 + \dots + b_n Tv_n$$

$$\Rightarrow w = b_1 Tv_1 + \dots + b_n Tv_n.$$

Como w é um vetor arbitrário em $\operatorname{im} T$, segue que $\operatorname{im} T = \operatorname{span}\{Tv_1, \dots, Tv_n)$. $(2\frac{1}{2})$

Consideremos agora uma relação linear

$$c_1 Tv_1 + \dots + c_n Tv_n = 0 \quad (3)$$

$$T(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = 0 \quad (T \text{ é lin.})$$

$$\Rightarrow c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \in \ker T.$$

Como (0) é uma base de $\ker T$,

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = d_1 u_1 + \dots + d_m u_m$$

onde $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{F}$.

$$\Rightarrow c_1 v_1 + \dots + c_n v_n - d_1 u_1 - \dots - d_m u_m = 0$$

Como (1) é uma base de V, é em particular L.I. Assim $c_1 = \dots = c_n = 0 = d_1 = \dots = d_m$.

Logo (3) é uma relação linear trivial, provando que $Tv_1, \dots, Tv_n$ é L.I. (4).

De $(2\frac{1}{2})$ e (4) segue que $Tv_1, \dots, Tv_n$ é uma base de $\mathrm{im}\, T$ //.

3.23 Suponhamos que $\dim W < \dim V < \infty$.
Então não existem $T \in \mathcal{L}(V, W)$ injetoras.

Dem. $\dim \ker T = \dim V - \dim \mathrm{im}\, T$ (T.F.A.L.)

$$\mathrm{im}\, T \subset W \Rightarrow \dim \mathrm{im}\, T \leq \dim W < \dim V$$
$$\Rightarrow \dim V - \dim \mathrm{im}\, T > 0$$
$$\Rightarrow \dim \ker T > 0$$
$$\Rightarrow \ker T \neq \{0\}$$
$$\overset{(3.16)}{\Rightarrow} T \text{ não é injetora} \; //$$

3.24 Suponhamos que $\dim V < \dim W < \infty$. Então não existem $T \in \mathcal{L}(V, W)$ sobrejetoras.

Dem. $\dim \mathrm{im}\, T = \dim V - \dim \ker T$ (T.F.A.L.)

$$\leq \dim V$$
$$< \dim W$$
$$\Rightarrow \mathrm{im}\, T \subsetneq W \quad \therefore T \text{ não é sobrejetora.}$$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Caso homogêneo

$$(H)\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad a_{ij} \in \mathbb{F}$$

m eqs. $\quad n$ incógnitas: $x_1, \dots, x_n$

É claro que $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ é uma solução.

Existem outras soluções?

Definamos $T: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ por

$$(*)\; T(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)$$

Então $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$.

$$\boxed{\text{Espaço-solução de } (H) = \ker T}$$

Conseqüência de (3.23):

Menos eqs. do que incógnitas $m < n$ $\Rightarrow \dim \mathbb{F}^m < \dim \mathbb{F}^n$

$\Rightarrow \ker T \neq \{0\}$.

$\Rightarrow$ Esp.-sol. contém soluções não-triviais.

Caso não-homogêneo

$$(NH)\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Quando (NH) tem/não tem solução?

Definimos $T: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ como anteriormente (em (*))

Conseqüência de (3.24):

Mais eqs. do que incógnitas $m > n$ $\Rightarrow \dim \mathbb{F}^n < \dim \mathbb{F}^m$

$\overset{(3.24)}{\Longrightarrow}$ T não é sobrejetora $\Rightarrow \operatorname{im} T \subsetneq \mathbb{F}^m$.

$$\boxed{\begin{array}{l} (b_1,\dots,b_m) \in \mathbb{F}^m \text{ t.q.} \\ (NH) \text{ tem solução} \end{array} = \operatorname{im} T}$$

$\Rightarrow$ Existem $b_1,\dots,b_m \in \mathbb{F}$ t.q. (NH) não tem solução.

—n—

Podemos escrever (H) e (NH) como equações matriciais:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} \qquad (H')$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}}_{=X} = \underbrace{\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\b_m\end{pmatrix}}_{=B} \qquad (NH')$$

$$AX=0 \quad \text{e} \quad AX=B$$

$$A\in M(m\times n,\mathbb{F}),\quad X\in M(n\times 1,\mathbb{F}),\quad B\in M(m\times 1,\mathbb{F})$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Sist. de eqs lin.}} \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{\text{Transf lin.}} \arrow[d, leftrightarrow, "?"] \\
& \boxed{\text{Eq. matricial}}
\end{tikzcd}$$

Se $T\in\mathcal{L}(\mathbb{F}^n,\mathbb{F}^m)$ é dada por

$$T(x_1,\ldots,x_n)=(a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n,\ldots,a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n)$$

então

$T(1,0,\dots,0) = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$

$T(0,1,0,\dots,0) = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})$

$\vdots$

$T(0,0,\dots,0,1) = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$

Montamos uma matriz tomando para colunas esses vetores:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = M_T$$

Def. M_T é a matriz de T nas bases canônicas de $\mathbb{F}^n$, $\mathbb{F}^m$.

3.32 Sejam V, W de dim finita, $T \in \mathcal{L}(V, W)$, e $v_1, \dots, v_n$, $w_1, \dots, w_m$ bases de V, W, resp.

$$Tv_1 = a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m$$

$$\vdots$$

$$Tv_n = a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m$$

Def. A matriz M_T de T nas bases dadas é

$$M_T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} Tv_1 & & Tv_n \end{array} \\ \begin{array}{c} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

3.33 Ex. $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2, \mathbb{F}^3)$

$$T(x,y) = (x+3y,\ 2x+5y,\ 7x+9y)$$

$$T(1,0) = (1,2,7) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 7(0,0,1)$$

$$T(0,1) = (3,5,9) = 3(1,0,0) + 5(0,1,0) + 9(0,0,1)$$

$$\therefore\ M_T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

3.34 $D \in \mathcal{L}(\overset{4}{P_3(\mathbb{R})}, \overset{3}{P_2(\mathbb{R})})$ $\quad M_D \in 3 \times 4$

$$M_D = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & x & x^2 & x^3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$D(1) = 0 \qquad D(x^2) = 2x$

$D(x) = 1 \qquad D(x^3) = 3x^2$

Ex. 4, § 2.C

(a) $U = \{ p \in P_4(\mathbb{F}) \mid p(6) = 0 \}$ Base de U ?

B: $x-6,\ (x-6)^2,\ (x-6)^3,\ (x-6)^4$ candidato

É lista LI, pois cada elemento da lista tem um grau diferente dos graus dos outros elementos.

Pertencem a U ✓.

$\dim P_4(\mathbb{F}) = 5$

$\dim U \geqslant \text{Compr lista}(B) = 4$

$U \neq P_4(\mathbb{F}) \Rightarrow \dim U = 4$

Como $\text{Compr}(B) = \dim U$ e B é L.I., vem que B é uma base de U.

(b) B': $1,\ x-6,\ (x-6)^2,\ (x-6)^3,\ (x-6)^4$ é L.I., pois cada elemento tem um grau diferente.

$\text{Compr}(B') = 5 = \dim P_4(\mathbb{F}) \Rightarrow B'$ é base de $P_4(\mathbb{F})$

e B' estende B.

(c) Determinar um subespaço W de $P_4(\mathbb{F})$ t.q

$U \oplus W = P_4(\mathbb{F})$

$\text{span}(B') = P_4(\mathbb{F})$

$$B' : \overbrace{\underbrace{x-6, (x-6)^2, (x-6)^3, (x-6)^4}_{\text{span é } U}}^{B}, \underbrace{1}_{\text{span é } W}$$

$\text{span}(B) = U$

$W := \text{span}(1) = \{\text{polinómios constantes}\}$

Logo $U \oplus W = P_4(\mathbb{F})$ //.