TRANSFORMAÇÕES LINEARES × MATRIZES

20/01/22

(Todos esps vets de dim finita)

Seja $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Fixemos bases $B_V: v_1, \dots, v_n$ de V, e $B_W: w_1, \dots, w_m$ de W.

$$Tv_1 = a_{11} w_1 + \dots + a_{m1} w_m$$

$$\vdots$$

$$Tv_n = a_{1n} w_1 + \dots + a_{mn} w_m$$

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \in M(m \times n, \mathbb{F}) = \mathbb{F}^{m \times n}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A é chamada de matriz que representa T nas bases B_V, B_W, e escrevemos

$$A = [T]^{B_V}_{B_W} \qquad (\text{Livro: } \mathcal{M}(T) := A)$$

Sejam $S, T \in \mathcal{L}(V,W)$ e $\lambda \in \mathbb{F}$. Então:

$$[S+T]_{B_W}^{B_V} = [S]_{B_W}^{B_V} + [T]_{B_W}^{B_V}$$

$$[\lambda T]_{B_W}^{B_V} = \lambda [T]_{B_W}^{B_V}$$

ou

$$(*) \begin{cases} \mathcal{M}(S+T) = \mathcal{M}(S) + \mathcal{M}(T) \\ \mathcal{M}(\lambda T) = \lambda \mathcal{M}(T) \end{cases}$$

Observemos que $\mathbb{F}^{m\times n} = M(m\times n, \mathbb{F})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Qual é $\dim \mathbb{F}^{m\times n}$?

Existe uma base natural (ou canônica) de $\mathbb{F}^{m\times n}$:

$m=n=2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{F}^{2\times 2}$$

Além disso, a lista $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é l.i. (Por quê?), logo é uma base de $\mathbb{F}^{m\times n}$.

Similarmente, $(E_{11}, \ldots, E_{mn})$ é uma base de $\mathbb{F}^{m\times n}$,

onde

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ésima linha}$$

j-ésima coluna $\qquad \therefore \dim \mathbb{F}^{m \times n} = m \cdot n$

Temos agora que

$$\mathcal{M}_b : \mathcal{L}(V, W) \longrightarrow \mathbb{F}^{m \times n}$$

$$T \longmapsto \mathcal{M}_b(T) = [T]^{B_V}_{B_W}$$

é uma transformação linear (cf. (*))

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

$$U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} W$$

$$U \xrightarrow[ST]{} W$$

$T \in \mathcal{L}(U, V)$, $S \in \mathcal{L}(V, W)$

$\Rightarrow ST \in \mathcal{L}(U, W)$

Bases $\quad B_U, \quad B_V, \quad B_W$

$\qquad u_1, \ldots, u_p \quad v_1, \ldots, v_n \quad w_1, \ldots, w_m$

$$[T]^{B_U}_{B_V} = \underset{A}{(a_{ij})} \qquad [S]^{B_V}_{B_W} = \underset{B}{(b_{ij})}$$

$$Tu_j = \sum_i a_{ij} v_i \qquad Sv_i = \sum_k b_{ki} w_k$$

$$[ST]_{B_W}^{B_U} = ?$$

$$(ST)u_j = S(Tu_j) = S\left(\sum_i a_{ij} v_i\right)$$

$$= \sum_i a_{ij} Sv_i = \sum_i a_{ij} \sum_k b_{ki} w_k$$

$$= \sum_k \Big[\underbrace{\sum_i b_{ki} a_{ij}}_{= \text{o coeficiente de } (k,j) \text{ da matriz } BA} \Big] w_k$$

$$\therefore \; [ST]_{B_W}^{B_U} = BA$$

$$= [S]_{B_W}^{B_V} [T]_{B_V}^{B_U}$$

— n —

3.D INVERTIBILIDADE

3.53 <u>Def</u>. $T \in \mathcal{L}(V,W)$ (V, W possivelmente de dim infinita) é dita <u>invertível</u> se existe ~~$S : W \to V$~~ $S \in \mathcal{L}(W,V)$ t.q. $ST = I_V$ e $TS = I_W$.

<u>Obs</u>. 1. Se existe tal S, então $S \in \mathcal{L}(W,V)$.

De fato, sejam $w_1, w_2 \in W$. Então

tomamos, $v_1 = Sw_1$, $v_2 = Sw_2 \in V$. Então

$Tv_1 = TSw_1 = Iw_1 = w_1$ e $Tv_2 = TSw_2 = w_2$.

Como T é linear,

$$T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2$$

$$\Rightarrow \quad T(v_1 + v_2) = w_1 + w_2.$$

Aplicando S a ambos os membros:

$$\underbrace{ST}_{=I}(v_1 + v_2) = S(w_1 + w_2)$$

$$\Rightarrow \quad v_1 + v_2 = S(w_1 + w_2)$$

$$\Rightarrow \quad Sw_1 + Sw_2 = S(w_1 + w_2)$$

Analogamente, $S(\lambda v) = \lambda S v$

2, Se uma tal S existe, então ela é única.

De fato, suponhamos que S_1 e S_2 satisfazem

$S_1 T = S_2 T = I_V$ e $TS_1 = TS_2 = I_W$. Então:

$$S_1 = S_1 I = S_1(TS_2) = (S_1 T) S_2 = I S_2 = S_2$$

<u>Notação</u>: Se $T \in \mathcal{L}(V, W)$ é invertível, a única $S \in \mathcal{L}(W, V)$ satisfazendo $ST = I_V$ e $TS = I_W$ será chamada de a <u>inversa</u> de T e será

denotada com T^{-1}.

<u>Lembrete</u> $T: V \to W$ é invertível $\Leftrightarrow$ T é <u>bijetora</u> (quer dizer, injetora e sobrejetora)

<u>Exemplos</u> 1. $\underbrace{M_{x^2}}_{\text{multiplicação por } x^2} \in \mathcal{L}(P(\mathbb{R}))$ $V = W = P(\mathbb{F})$

M_{x^2} não é invertível, pois não é sobrejetora.

De fato, $1 \notin \operatorname{im} M_{x^2}$, pois $\operatorname{im} M_{x^2} =$

$\{$polinômios de grau $\geq 2\} \cup \{0\}$.

2. Backward shift $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^\infty)$ não é invertível, pois não é injetora. De fato,

$\ker T = \{(a, 0, 0, \dots) \mid a \in \mathbb{F}\} \neq \{0\}$.

3. Seja $S \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^\infty)$ forward shift.

S não é invertível, pois não é sobrejetora.

$\operatorname{im} S = \{(0, x_2, x_3, \dots) \mid x_j \in \mathbb{F}\} \subsetneq \mathbb{F}^\infty$.

Se nós calcularmos

$TS(x_1, x_2, \dots) = T(0, x_1, x_2, \dots)$

$$= (x_1, x_2, \dots)$$

$$\Rightarrow \quad TS = I.$$

Mas

$$ST(x_1, x_2, \dots) = S(x_2, x_3, \dots)$$

$$= (0, x_2, x_3, \dots)$$

$$\Rightarrow \quad ST \neq I$$

3.58 <u>Def</u> [ISOMORFISMO]

- Um <u>isomorfismo</u> de V em W é uma transf lin $T \in \mathcal{L}(V, W)$ que é invertível.

- Se existe um isomorfismo $T \in \mathcal{L}(V, W)$, diremos que V e W são <u>isomorfos</u>.

3.59 Dois espaços vetoriais de dim finita sobre $\mathbb{F}$ são isomorfos se e somente se têm a mesma dimensão.

<u>Dem</u> ($\Rightarrow$) Suponhamos que V e W são isomorfos.

Então $\exists\ T \in \mathcal{L}(V, W)$ isomorfismo.

$\Rightarrow$ T invertível $\Rightarrow \begin{cases} T \text{ inj} \Rightarrow \ker T = \{0\} \\ T \text{ sobrej} \Rightarrow \operatorname{im} T = W \end{cases}$

T.F.A.L.:

$$\dim V = \cancel{\dim \ker T}^{\,0} + \dim \underbrace{\operatorname{im} T}_{=W}$$

$$= \dim W \checkmark$$

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que $\dim V = \dim W = n$. Sejam $v_1, \dots, v_n$ e $w_1, \dots, w_n$ bases de V e W, resp. Por (3.5), podemos definir $T \in \mathcal{L}(V, W)$ pondo $Tv_i = w_i \ \forall i$, e $S \in \mathcal{L}(W, V)$ pondo $Sw_i = v_i$, $\forall i$.

Agora $ST \in \mathcal{L}(V)$ e $STv_i = \underset{= Iv_i}{v_i}$, $\forall i$.

Pela parte da unicidade de (3.5), como ST e I têm os mesmos valores numa base de V, $ST = I$. Analogamente, $TS \in \mathcal{L}(W)$ e $TSw_i = \underset{= Iw_i}{w_i}$, $\forall i \Rightarrow TS = I$. Logo $S = T^{-1}$, e assim T é um isomorfismo //.

Ex. $\dim \mathcal{P}_m(\mathbb{F}) = m+1 = \dim \mathbb{F}^{m+1}$

$\Rightarrow \mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ e $\mathbb{F}^{m+1}$ são isomorfos.

3.59

Por exemplo, tomando

$$\underset{\text{base canônica}}{1,\ z,\ \ldots,\ z^m \quad \text{base de } \mathcal{P}_m(\mathbb{F})}$$

$$e_1 = (1,0,\ldots,0),\ e_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ e_{m+1} = (0,\ldots,0,1)$$

base canônica de $\mathbb{F}^m$

$$T(1) = e_1$$
$$T(z) = e_2$$
$$\vdots$$
$$T(z^m) = e_{m+1}$$

teremos $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_m(\mathbb{F}), \mathbb{F}^{m+1})$ que leva base em base, e portanto, pela demonstração de (3.59), é um isomorfismo explícito.

—//—

Obs. Se $T \in \mathcal{L}(V, W)$ é um isomorfismo,

$$V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{T^{-1}} V$$

então $T^{-1} \cdot T = I_V$

$$\Rightarrow [T^{-1} \cdot T]_{B_V}^{B_V} = [I_V]_{B_V}^{B_V}$$

$$\Rightarrow \quad [T^{-1}]_{B_V}^{B_W} [T]_{B_W}^{B_V} = I \quad \text{(matriz identidade)} \quad (1)$$

Também

$$W \xrightarrow{T^{-1}} V \xrightarrow{T} W$$

$$T \cdot T^{-1} = I_W$$

$$[T \cdot T^{-1}]_{B_W}^{B_W} = [I_W]_{B_W}^{B_W}$$

$$[T]_{B_W}^{B_V} [T^{-1}]_{B_V}^{B_W} = I. \quad \text{(matriz id)} \quad (2)$$

$$\therefore \left([T]_{B_W}^{B_V}\right)^{-1} = [T^{-1}]_{B_V}^{B_W}$$

—//—

3.60 Sejam $n = \dim V$ e $m = \dim W$. Então

$$\mathcal{L}(V, W) \quad \text{e} \quad M(m \times n, \mathbb{F})$$

são isomorfos.

<u>Dem</u>.
$$\mathcal{M}: \mathcal{L}(V, W) \to M(m \times n, \mathbb{K})$$
$$T \mapsto [T]_{B_W}^{B_V}.$$

onde $B_V: v_1, \ldots, v_n$ / $B_W: w_1, \ldots, w_m$ são bases fixadas.

- Já observamos que $\mathcal{M}$ é linear. (*)

$$[T]_{B_W}^{B_V} = A = (a_{ij}) \qquad [S]_{B_W}^{B_V} = B = (b_{ij})$$

$$(T+S)v_j = Tv_j + Sv_j = \sum_i a_{ij} w_i + \sum_i b_{ij} w_i$$

$$= \sum_i (a_{ij} + b_{ij}) w_i$$

$$\rightarrow [T+S]_{B_W}^{B_V} = [T]_{B_W}^{B_V} + [S]_{B_W}^{B_V}.$$

Analogamente, $[\lambda T]_{B_W}^{B_V} = \lambda [T]_{B_W}^{B_V}$.

- M_ϕ é injetora.

$T \in \ker M_\phi \Rightarrow [T]_{B_W}^{B_V} = 0$ (matriz nula)

$$\Rightarrow Tv_j = \sum_i 0 w_i = 0$$

$$\Rightarrow T = 0 \quad (\text{transf nula})$$

$$\therefore \ker M_\phi = \{0\}.$$

- M_ϕ é sobrejetora.

Dada $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{F})$, definimos

$T \in \mathcal{L}(V, W)$ usando (3.5) e pondo

$$Tv_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

Por construção, $\underset{\mathcal{M}_b(T)}{\underset{\shortparallel}{[T]^{B_V}_{B_W}}} = A \Rightarrow A \in \text{im } \mathcal{M}_b$ //.

3.61 <u>Cor</u> $\dim \mathcal{L}(V,W) = \dim \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{F})$

$= m.n$

$= (\dim V)(\dim W)$