# BASES ORTONORMAIS (§ 6.B)

03/02/22

$V$: esp Euclideano ou Hermiteano ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

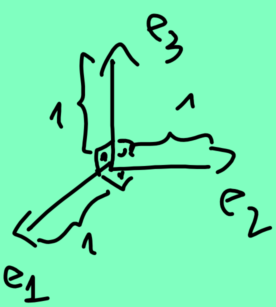
**Def** [LISTA ORTONORMAL]

É uma lista $e_1, \ldots, e_m$ de vetores em $V$ t.q.

$$e_i \perp e_j \text{ se } i \neq j \quad \text{e} \quad e_i \text{ é unitário, } \forall i$$

Ou seja,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$




**Ex.** (a) $\mathbb{R}^n$ prod escalar usual

$\mathbb{C}^n$ prod Hermiteano usual

A base canônica $e_1, \ldots, e_n$ é ortonormal.

(b) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ é uma lista o.n. em $\mathbb{F}^3$

**Obs.** Orto-normal = ortogonal + normal

2 a 2 $\perp$      unitários

6.25 Se $e_1, \ldots, e_m$ é o.n. então

$$\| a_1 e_1 + \ldots + a_m e_m \|^2 = |a_1|^2 + \ldots + |a_m|^2,$$

$\forall\, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$.

<u>Dem</u>. O membro do lado esquerdo é

$$\langle a_1e_1 + \dots + a_me_m, a_1e_1 + \dots + a_me_m \rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} a_i \overline{a_j} \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{\neq 0 \text{ sse } i=j} = \sum_{i=1}^{m} |a_i|^2 \underbrace{\langle e_i, e_i \rangle}_{=1} = \sum_{i=1}^{m} |a_i|^2 \quad //.$$

6.26 Uma lista o.n. é automaticamente LI.

<u>Dem</u>. Seja $e_1, \dots, e_m$ o.n. e consideremos

$$a_1e_1 + \dots + a_me_m = 0$$

com $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$. Então

$$\underbrace{\|a_1e_1 + \dots + a_me_m\|^2}_{\overset{(6.25)}{=} |a_1|^2 + \dots + |a_m|^2} = 0$$

$\Rightarrow a_1 = \dots = a_m = 0$ //.

6.27 <u>Def</u>. [BASE ORTONORMAL]

É uma base que é uma lista o.n.

<u>Obs</u>. Se $\dim V = n$ então qualquer lista o.n. em $V$ de compr $n$ é automaticamente uma

base o.n. ++ --

Ex. $\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{2}(1,1,-1,-1), \frac{1}{2}(1,-1,-1,1), \frac{1}{2}(-1,1,-1,1)$

é uma base o.n. de $\mathbb{F}^4$, pois é uma lista o.n. de compr 4.

$$\frac{1}{2^2}\left(1^2+1^2+1^2+1^2\right)=\frac{4}{4}=1$$

6.30 Se $e_1,\ldots,e_n$ é uma base o.n. de $V$, então

$$\boxed{v=\langle v,e_1\rangle e_1+\ldots+\langle v,e_n\rangle e_n}$$

e $$\|v\|^2=|\langle v,e_1\rangle|^2+\ldots+|\langle v,e_n\rangle|^2$$

$\forall v\in V$.

Dem. Como $e_1,\ldots,e_n$ é uma base de $V$, dado $v\in V$

existem $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ t.q.

$\langle\cdot,e_j\rangle$ $\quad v=a_1e_1+\ldots+a_ne_n \quad$ $\langle\cdot,e_j\rangle$

$$\langle v,e_j\rangle=\sum_{k=1}^{n}a_k\langle e_k,e_j\rangle$$

$$=a_j \qquad k=j$$

//

Obs. $\langle v,e_j\rangle e_j=\text{proj}_{e_j}v$

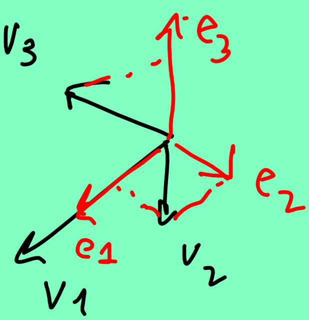
## 6.31 Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Listas L.I.}\\ \text{de compr } m\end{array}} \xrightarrow{G-S} \boxed{\begin{array}{c}\text{Listas o.n.}\\ \text{de compr } m\end{array}}$$

Em part

$$\boxed{\text{Bases}} \longrightarrow \boxed{\text{Bases o.n.}}$$

Intuição: $\mathbb{R}^3$




$$\boxed{e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}}$$

$$\operatorname{proj}_{e_1} v_2 = \langle v_2, e_1\rangle e_1$$

$$e_2' = v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1 \qquad \boxed{e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|}}$$

$$e_3' = v_3 - \langle v_3, e_1\rangle e_1 - \langle v_3, e_2\rangle e_2 \qquad \boxed{e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|}}$$

6.33 $V = P_2(\mathbb{R}) \qquad \dim V = 3$

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

Base can: $\begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$ $\qquad$ G-S

$$\|v_1\|^2 = \int_{-1}^{1} 1^2 \, dx = 2 \quad \therefore \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v_2 - \cancel{\langle v_2, e_1 \rangle}^{0} e_1 = v_2 = x$$

$$\langle v_2, e_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x \frac{1}{\sqrt{2}} \, dx = 0$$

$$\|x\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \quad \therefore e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x$$

$$\langle v_3, e_1 \rangle = \langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{2}} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\langle v_3, e_2 \rangle = \langle x^2, \sqrt{\frac{3}{2}}\, x \rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}}\, \underbrace{x^3}_{\text{grau ímpar}} \, dx = 0$$

$$v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle e_2 = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\|x^2 - \frac{1}{3}\|^2 = \int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2 \, dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{x^4 - \frac{2x^2}{3} + \frac{1}{9}}_{\text{par}} \, dx$$

$$= 2 \int_{0}^{1} x^4 - \frac{2x^2}{3} + \frac{1}{9} \, dx = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{45} \qquad \sqrt{\frac{8}{45}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$$

$\therefore$ O resultado do processo de G-S aplicado à base canônica

$1, x, x^2$ de $P_2(\mathbb{R})$ com $\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ é a

base o.n. $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\, x, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2-1)}$

obs. n-

$\langle a_0 + a_1 x + a_2 x^2, b_0 + b_1 x + b_2 x^2\rangle$

$= a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$

é um prod int em $P_2(\mathbb{R})$ em relação ao qual

$1, x, x^2$ é o.n.

6.34 Todo esp vet com prod int de dim finita admite uma base o.n.

6.35 Suponhamos $\dim V < \infty$. Então toda lista o.n. em $V$ se estende a uma base o.n. de $V$.

Dem. Dada $e_1, \ldots, e_m$ lista o.n.

Em part é LI (6.26) Então pode ser estendida a uma base $\underbrace{e_1, \ldots, e_m}$, $v_1, \ldots, v_n$ (por (2.33))

Aplicando G-S não altera os primeiros $m$ vetores //.

6.37 Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ com $\dim V < \infty$.

Suponhamos que $[T]_B$ é triangular superior para alguma base $B$ de $V$. Então $\exists$ base o-n. $B'$ de $V$ t.q. $[T]_{B'}$ também é triang sup

Dem. $B: v_1, \dots, v_n \xrightarrow[G-S]{} B': e_1, \dots, e_n$

Notemos que $\mathrm{span}(e_1, \dots, e_j) \underset{(5.26)}{=} \mathrm{span}(v_1, \dots, v_j)$

$[T]_B$ triang sup $\Leftrightarrow$ $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_j)$ é $T$-inv.

$\underset{(5.26)}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{span}(e_1, \dots, e_j)$ é $T$-inv.

$\Leftrightarrow$ $[T]_{B'}$ é triang sup //

6.38 Teorema de Schur (1909)

Se $V$ é esp Hermiteano $(\mathbb{F} = \mathbb{C})$ de dim finita e $T \in \mathcal{L}(V)$, então $\exists$ base o.n. de $V$ t.q. $[T]_B$ é triang sup.

—n—

$e_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$ $\quad e_1 \in \mathrm{span}(e_1) = \mathrm{span}(v_1)$ ✓

$e_2 = \dfrac{e_2'}{\|e_2'\|}$ $\quad e_2' = v_2 - \langle v_2, e_1\rangle \dfrac{v_1}{\|v_1\|} \in \mathrm{span}(v_1, v_2)$

$\Rightarrow e_2 \in \mathrm{span}(v_1, v_2)$

$\Rightarrow \mathrm{span}(e_1, e_2) \subset \mathrm{span}(v_1, v_2)$ —

$v_1 = \|v_1\| e_1 \Rightarrow v_1 \in \operatorname{span}(e_1)$

$$v_2 = e_2' + \langle v_2, e_1 \rangle \frac{v_1}{\|v_1\|} = \|e_2'\| e_2 + \langle v_2, e_1 \rangle e_1$$

$$\Rightarrow v_2 \in \operatorname{span}(e_1, e_2)$$

$$\Rightarrow \operatorname{span}(v_1, v_2) \subset \operatorname{span}(e_1, e_2) \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\|v_1\|} & \frac{\langle v_2, e_1 \rangle}{\|e_1'\|} & \cdots \\ 0 & 1/\|e_2'\| & \\ \vdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ e_1 & \cdots & e_n \\ | & & | \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

matriz $M$ triangular superior, com coefs diagonais não-nulos

$\therefore$ invertível

—n—

Se $V$ está equipado com prod interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então podemos definir funcionais lineares em $V$ da seguinte forma:

$V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$

Dado $v \in V$, seja $\varphi_v(u) = \langle u, v \rangle$

Então $\varphi_v : V \to \mathbb{F}$ é linear.

linear em $u$    conj linear em $v$ se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

<u>Ex</u>: $V = \mathbb{R}^3$:

$$\varphi(x,y,z) = \langle (x,y,z), (2,-5,1) \rangle$$
$$= 2x - 5y + z$$

6.42 Se $\dim V < \infty$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um prod interno em $V$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), então dado $\varphi \in V'$ existe um único $u \in V$ t.q. $\varphi(v) = \langle v, u \rangle \quad \forall v \in V$.

[Teorema de Representação de Riesz]

<u>Dem</u>: (Existência) Seja $e_1, \dots, e_n$ uma base o.n. de $V$. Então

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n$$

$$\varphi(v) = \langle v, e_1 \rangle \varphi(e_1) + \dots + \langle v, e_n \rangle \varphi(e_n)$$
$$= \langle v, \overline{\varphi(e_1)} e_1 \rangle + \dots + \langle v, \overline{\varphi(e_n)} e_n \rangle$$
$$= \langle v, \underbrace{\overline{\varphi(e_1)} e_1 + \dots + \overline{\varphi(e_n)} e_n}_{=u} \rangle$$

(Unicidade) Suponhamos que

$$\varphi(v) = \langle v, u_1 \rangle = \langle v, u_2 \rangle \quad \forall v \in V$$

para alguns $u_1, u_2 \in V$.

$$\Rightarrow \quad 0 = \langle v, u_1 \rangle - \langle v, u_2 \rangle$$
$$= \langle v, u_1 - u_2 \rangle \quad \forall v \in V$$

$\Rightarrow \quad u_1 - u_2 \perp v, \quad \forall v \in V \Rightarrow u_1 - u_2 = 0 \quad \therefore u_1 = u_2$ //.

Alternativa (Unic)

$$\varphi(v) = \langle v, u \rangle \quad \forall v \in V$$

$$\varphi(e_j) = \underline{\underline{\langle e_j, u \rangle}} = \overline{\langle u, e_j \rangle}$$

$$\rightarrow \quad u = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle u, e_n \rangle e_n$$
$$= \overline{\varphi(e_1)} e_1 + \dots + \overline{\varphi(e_n)} e_n$$

6.44 Ex Determinar $u \in P_2(\mathbb{R})$ t.q.

$$\int_{-1}^{1} p(t) \cos(\pi t)\, dt = \int_{-1}^{1} p(t) u(t)\, dt.$$

$\forall p \in P_2(\mathbb{R})$.

Resolução. Seja $\varphi(p) = \int_{-1}^{1} p(t) \cos(\pi t)\, dt$

$\varphi$ é linear em $p \Rightarrow \varphi \in P_2(\mathbb{R})'$.

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt \quad \text{prod int. em } P_2(\mathbb{R})$$

Sabemos que $\varphi(p) = \langle p, u\rangle \ \forall p \in P_2(\mathbb{R})$,

onde $u = \overline{\varphi(e_1)}e_1 + \overline{\varphi(e_2)}e_2 + \overline{\varphi(e_3)}e_3$

$= \varphi(e_1)e_1 + \varphi(e_2)e_2 + \varphi(e_3)e_3$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,x,\ e_3 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2-1).$$

$$\Rightarrow u = \left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\pi t)\,dt\right)\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{3}{2}}\,t\cos(\pi t)\,dt\right)\sqrt{\frac{3}{2}}\,t$$
$$+\left(\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3t^2-1)\cos(\pi t)\,dt\right)\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3t^2-1)$$

Após o cálculo: $u(t) = -\frac{45}{2\pi^2}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$ //.