O TEOREMA ESPECTRAL SOBRE $\mathbb{R}$ 10/02/22

Suponhamos que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Então as seguintes asserções são equivalentes:

(a) T é auto-adjunto.

(b) V admite uma base o.n. consistindo de autovetores de T.

(c) $[T]_B$ é diagonal para alguma base o.n. de V.

Dem. (c) $\Rightarrow$ (a) ✓

Se $[T]_B$ é diagonal, então $\underbrace{[T]^*_B}_{} = [T]^t_B = [T]_B$

$= [T^*]_B$

$\Rightarrow T^* = T \Rightarrow T$ é auto-adjunto

(b) $\Rightarrow$ (c) ✓

(a) $\Rightarrow$ (b) Por indução sobre $\dim V$.

Caso inicial: $\dim V = 1$ é trivial.

Suponhamos agora que $\dim V > 1$ e que (a) $\Rightarrow$ (b) para todos espaços vetoriais reais com prod interno de dim menor do que $\dim V$, e vamos mostrar que (a) $\Rightarrow$ (b) para V.

Tomemos $T \in \mathcal{L}(V)$, $T = T^*$. Por (7.27), T admite um autovetor u, que podemos assumir unitário. Seja $U = \text{span}(u)$. Então U é T-invariante e $T|_{U^\perp} \in \mathcal{L}(U^\perp)$ é auto-adjunto por 7.28 (c).

Como $\dim U^\perp < \dim V$, pela nossa hipótese de indução, $U^\perp$ admite base o.n. formada por autovetores de $T|_{U^\perp}$. Ajuntando u a essa base obtemos a base o.n. desejada de V. //

7.30 <u>Ex.</u> $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 14 & -13 & 8 \\ -13 & 14 & 8 \\ 8 & 8 & -7 \end{pmatrix}$$

é simétrica $\Rightarrow$ T é auto-adjunto

$$[T - \lambda I] = \begin{pmatrix} 14-\lambda & -13 & 8 \\ -13 & 14-\lambda & 8 \\ 8 & 8 & -7-\lambda \end{pmatrix}$$

$(x, y, z) \in \ker(T - \lambda I) \Leftrightarrow$

$$(*)\ \begin{cases} (14-\lambda)x - 13y + 8z = 0 \\ -13x + (14-\lambda)y + 8z = 0 \\ 8x + 8y - (7+\lambda)z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \ominus \\ \times 8 \\ \times 13 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{r} -104\cancel{x} + 8(14-\lambda)y + 64z = 0 \\ 104\cancel{x} + 104y - 13(7+\lambda)z = 0 \\ \hline (216 - 8\lambda)y + (-27 - 13\lambda)z = 0 \end{array}$$

$$(27-\lambda)x + (-27+\lambda)y = 0$$

$\underline{\underline{\lambda = 27}}$ é autovalor $\qquad 0 = 0$

$$\begin{array}{rl} \begin{cases} -13x - 13y + 8z = 0 \\ 8x + 8y - 34z = 0 \end{cases} & \begin{matrix} \times 8 \\ \times 13 \end{matrix} \\ \hline 0x + 0y + \underbrace{\square}_{\neq 0} z = 0 & \Rightarrow \boxed{z = 0} \end{array}$$

$$\begin{cases} -13x - 13y = 0 \\ 8x + 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0$$

$$\therefore\ E_T(27) = \operatorname{span}((1,-1,0))$$

$$E_T(27)^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$$

$$= \{(x,x,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \operatorname{span}((1,1,0), (0,0,1))$$

Fazendo $x=y$ em (*):

$$\cancel{(1-\lambda)x + 8z = 0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + 8z = 0 \\ 16x - (7+\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$\lambda = -15$ é autovalor:

$$1-\lambda = 16$$
$$8 = -(7+\lambda)$$

$$16x + 8z = 0$$
$$2x + z = 0$$
$$z = -2x$$

Autovetor: $(1,1,-2)$

$$E_T(-15) = \text{span}((1,1,-2))$$

$$\mathbb{R}^3 = E_T(27) \overset{\perp}{\oplus} E_T(-15) \overset{\perp}{\oplus} E_T(\lambda_3)$$

$(1,-1,0)$ $(1,1,-2)$ (a,b,c)

$(a,b,c) \perp (1,-1,0),\ (1,1,-2)$

$$\begin{cases} a-b=0 \\ a+b-2c=0 \end{cases} \Rightarrow a=c=b$$

$$E_T(\lambda_3) = \text{span}((1,1,1))$$

$$\left[T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_{can} = \begin{pmatrix}14 & -13 & 8\\ -13 & 14 & 8\\ 8 & 8 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\9\\9\end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\therefore \lambda_3 = 9$$

B: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

é base o.n. de $\mathbb{R}^3$

$$[T]_B = \begin{pmatrix}27 & 0 & 0\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$$