OS SURPREENDENTES INFINITOS NA GEOMETRIA, EM CONJUNTOS DE NÚMEROS E NO MUNDO FÍSICO

Valdemar W. Setzer
Prof. Titular Sênior
Departamento de Ciência da Computação
Instituto de Matemática e Estatística da USP
www.ime.usp.br/~vwsetzer

São Paulo
1ª Edição – 2021

www.biblioteca24horas.com

SETZER, Valdemar W.

Os surpreendentes infinitos na geometria, em conjuntos de números e no mundo físico / Valdemar W. Setzer - São Paulo, Editora Biblioteca 24Horas, 1ª Edição – maio de 2021
126p.; 14x21cm

Foto da capa: Tiago Setzer Behar, na Nova Zelândia

ISBN: 9786589663195

CDD: 800

Direitos exclusivos para Língua Portuguesa cedidos à
Biblioteca24horas, Seven System Internacional Ltda.

Rua Luís Coelho 320/32 Consolação
São Paulo – SP – Brasil CEP 01309-000

(11) 31516280
leitor@biblioteca24horas.com

Vendas:
www.biblioteca24horas.com

Benefício Adicional Gratuito

Ao adquirir ou receber este livro, o leitor ganha o direito a uma licença de uso (disponibilizada na penúltima página deste livro) no portal www.biblioteca24horas.com, por tempo pré-determinado, através de login (pessoal e intransferível) com os seguintes benefícios:

Acesso ao Formato Digital – Acessar e ler este livro no seu formato digital via internet, através de navegador comum, por um período acumulado de (o total de tempo de 5 minutos X quantidade de páginas) minutos e/ou por um prazo máximo de 90 dias, a serem contados do primeiro acesso. Este benefício será válido até a data de vencimento da licença de uso em 30/12/2024.

O autor reserva-se o direito de atualizar constantemente o conteúdo deste livro e/ou do conteúdo fornecido via internet sem prévio aviso.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A matemática é o maior problema educacional do Brasil, provavelmente também em muitos países. Notícia do início de 2017 indicava que apenas 7,3% dos alunos terminavam o nosso ensino médio com um 'aprendizado adequado' de matemática; considerando apenas escolas públicas, essa proporção cai para 3,6% (v. ref. Agência Brasil). Isso é uma tragédia, pois a matemática está frequentemente presente no dia a dia. Por exemplo, é comum o uso de frações, porcentagens e medidas.

Mas há outras razões que fazem a matemática ser muito importante. Ela educa um pensamento claro, lógico e coerente. O raciocínio matemático exige que se pense com absoluta clareza, e se saiba encadear logicamente argumentos, de modo que cada um seja exatamente uma consequência ou complemento do anterior. Aliás, exatidão só existe na matemática; na física experimental e outras áreas tem-se somente precisão, pois tudo o que nelas é resultado de medidas é uma aproximação. A matemática exige, também, que se a pratique em plena consciência: experimente-se fazer à mão uma soma armada, com vários algarismos, pensando em outras coisas que não a soma em si: o resultado certamente será errado. Assim, o exercício da matemática exige e treina a concentração mental. Além disso, o objetivo de um raciocínio matemático tem que ser também muito claro: sabe-se onde se quer chegar, por exemplo, provar alguma afirmação, como veremos em vários trechos deste livro. Assim, um bom raciocínio matemático ajuda a pensar mais claramente, sendo um benefício constante em toda a vida jovem e adulta. Além disso, como tentei mostrar no meu livro *A matemática pode ser interessante... e linda!* [Setzer 2020], dependendo de como é apresentada, a matemática pode ajudar a desenvolver um senso estético e a admirar e mesmo venerar a natureza. Nesse último caso, ela ajuda a se reconhecer relações e formas matemáticas nas plantas, animais e até mesmo nos seres humanos, podendo levar a uma atitude de reverência com relação a eles, pois essas relações revelam uma profunda sabedoria.

A rejeição da matemática parece ser muito comum, não apenas entre estudantes. Creio que isso é devido ao fato de ela ser ensinada no ensino básico de uma maneira muito abstrata, raramente com alguma conexão com o mundo real e prático, e sem que os alunos possam se identificar com ela, já que são tratados como cabeças ambulantes, sem coração. Além disso, geralmente não se leva em conta a maturidade dos alunos em termos de capacidade de abstração e pensamento formal. No meu livro anterior e neste, procuro mostrar que a matemática pode ser fascinante e interessante. Ambos foram inspirados em muitas palestras que dei para alunos de ensino médio e superior, para professores e público em geral, com bastante sucesso (v. refs.). Como as palestras parecem ter interessado muito os participantes pelos assuntos abordados, resolvi escrever o livro anterior e este. Assim, eles tiveram como intenção primordial entusiasmar estudantes e o público em geral pela matemática.

Como no livro anterior, este aborda tópicos que não são ensinados no ensino médio e em cursos superiores que não sejam de matemática. Mesmo nesses últimos, não há um tratamento uniforme dos assuntos como foram abordados aqui. Pelo fato de que o infinito em geral não é estudado, espero que serão mostrados aspectos surpreendentes dele.

A palavra ‘surpreendente’ no título é devida ao fato de que o tratamento matemático do infinito leva a conclusões contrárias às que o pensamento usual levaria. Espero que essa surpresa atraia as/os leitoras/es e aguce sua curiosidade, e que possa servir para desenvolverem seu raciocínio matemático e o interesse pela matemática.

Pela sua simplicidade, os temas aqui abordados podem ser compreendidos sem conhecimentos de tópicos de matemática um pouco mais avançados, a menos de alguns casos mais complexos, que foram separados no fim de dois dos capítulos, em seções de 'Formalismos matemáticos'. Essas seções podem ser deixadas de lado por leitoras/es não interessadas/os nesses detalhes, sem prejuízo do restante.

O livro começa com tópicos de geometria, pois ela tem sido relativamente negligenciada no ensino. Quando fui estudante do ensino básico, tínhamos sete anos obrigatórios de geometria, que considero terem sido fundamentais para minha formação intelectual. Infelizmente, certas correntes da matemática começaram a dar importância apenas à álgebra, em detrimento da geometria. Esta também se presta ao desenvolvimento do raciocínio matemático, usando algo ausente na álgebra: a imaginação pictórica. A álgebra não leva a um senso estético, pois usa símbolos formais, abstratos, que não despertam sentimentos, a não ser, para muita gente, de enfado e talvez de rejeição. Mas com a geometria podem-se fazer desenhos bonitos, como eu já tinha mostrado fartamente no outro livro. Veremos neste, como ela leva inclusive a obras de arte.

Houve outro motivo para escrever este livro. Eu quis mostrar que é possível usar um pensamento que abandona o usual, que é baseado na experiência sensorial do mundo físico, passando-se a um universo de ideias no qual essa experiência não se aplica. Esse tipo diferente de pensamento nos coloca em contato direto, consciente, com o mundo platônico das ideias. Qualquer pessoa está em contato permanente com ele quando vê algum objeto e imediatamente, inconscientemente, com o pensamento, atinge o conceito do objeto, associando-o às características de todos os objetos de mesma categoria. Com as considerações sobre o infinito como são aqui apresentadas, pode-se trabalhar diretamente e conscientemente com conceitos que claramente não têm nada em comum com o mundo físico. Pelo contrário, contradizem as intuições que se têm baseadas nas percepções sensoriais.

Há várias outras áreas da matemática que não correspondem às experiências que se têm do mundo físico. Esse é o caso, por exemplo, das geometrias não euclidianas (por exemplo, uma geometria cujos desenhos se dão sobre uma esfera), e os espaços de mais de três dimensões. Como será mostrado aqui, também o infinito na matemática leva a pensamentos que transcendem o mundo físico de uma maneira relativamente simples e que pode ser imaginada – desde que se estenda as imaginações.

Creio ser fundamental que se reconheça que estamos destruindo a natureza e a humanidade, esta última também psicologicamente. Para reverter esse processo, é necessário mudar a maneira de pensar, a mentalidade. Para lidar com o infinito na matemática, é necessário mudar a maneira de pensar, de modo que, espero, este livro tenha tido essa serventia. Pelo menos tento mostrar que é possível exercer um pensamento independente da nossa experiência do mundo físico.

Outro motivo para a escrita deste livro é prover material interessante para professores de ensino médio abordarem em suas aulas. Nesse sentido, é um livro paradidático.

Foi introduzido um capítulo sobre perspectiva, pois ela tem uma ligação com a representação finita do infinito, correspondendo ao que se capta de impulsos visuais e a representação mental que se faz partindo deles. A perspectiva permitiu que não se ficasse apenas em pensamentos abstratos, e se tratasse de algo raro na matemática: o senso estético, que movimenta os sentimentos; daí a introdução de alguns quadros famosos. A geometria também permite o uso do senso estético, mas de uma maneira mais seca, sem as nuances e as interpretações que podem ser feitas em obras de arte, especialmente a arte figurativa. Já a arte abstrata quebra com o figurativismo, quase que eliminando interpretações, mas não deixa de apelar para o senso estético.

O livro é organizado como segue. Uma primeira parte vai do cap. (capítulo) 2 ao 4, tratando de objetos geométricos e seu infinito: o ponto, a reta e o plano. No cap. 5 o infinito é trazido para o finito em desenhos de vários tipos de perspectiva, aproveitando para mostrar obras de arte que a usam. Os caps. 6 a 11 tratam de conjuntos de números e o número de elementos em seus conjuntos infinitos: os números naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais e complexos. O cap. 12 trata brevemente do conceito de limite. O cap. 13 aborda o infinito no mundo físico, tratando do que é relativamente infinitamente pequeno, como o átomo e partículas atômicas, e o relativamente infinitamente grande, os limites do universo. Finalmente, o cap. 14 aproveita certos exemplos dados no livro para abordar uma questão que considero premente hoje em dia: como desenvolver a concentração mental, essencial para se exercitar a matemática, estudar e fazer face à avalanche de estímulos exteriores que bombardeia constantemente o ser humano. Os exercícios propostos nesse capítulo treinam a formulação de pensamentos próprios, criados pela própria pessoa, baseados exclusivamente na consciência pessoal. Esse tópico é estendido com exemplos não abordados anteriormente. Trata-se, efetivamente, de um capítulo de autoajuda.

As referências a artigos e livros foram colocadas no fim de cada capítulo. Nelas são dados vários endereços de artigos na Internet, pois hoje em dia esta é uma fonte muito rica e universalmente disponível. São citadas fontes que considerei sérias e informativas, mas infelizmente isso pode ter mudado quando o/a leitor/a as consultar. Foi dada preferência a artigos na Internet em inglês, pois eles são em geral bem mais completos que em português; estes são muitas vezes traduções parciais da versão em inglês. Termos técnicos também constam em inglês, entre parênteses e em fonte itálica, para facilitar sua localização na Internet.

Agradecimentos

Agradeço imensamente minha esposa Sonia A. Lanz Setzer que, ao assistir palestras que proferi sobre o assunto deste livro, deu-me a ideia e me incentivou a escrevê-lo. Além disso, ela fez uma cuidadosa revisão do texto e deu inúmeras sugestões de redação.

Referências

- Agência Brasil. Acesso em 4/1/21: https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2017-01/matematica-apenas-73-aprendem-o-adequado-na-escola
- Setzer, V.W. Avaliações da palestra sobre o infinito. Acesso em 4/1/21: www.ime.usp.br/~vwsetzer/pals/infinito-avaliacoes.html
- Setzer, V.W. Avaliação sobre as palestras com assuntos do livro *A matemática pode ser interessante... e linda!* Acesso em 4/1/21: www.ime.usp.br/~vwsetzer/pals/Fibonacci-avaliacoes.html
- Setzer, V.W. *A matemática pode ser interessante ... e linda! Espirais, Fibonacci, razão áurea, crescimento proporcional e a natureza*. São Paulo: Edgard Blücher, 2020. Ver sumário e primeiros capítulos em (acesso em 16/12/20): www.blucher.com.br/livro/detalhes/a-matematica-pode-ser-interessante-e-linda-1645

Capítulo 2
O ponto

2.1 O que é um ponto?

Caro/a leitor/a, por favor, desenhe um ponto nas linhas em branco logo abaixo deste parágrafo.

Certamente o desenho foi algo parecido com o seguinte:

●

Fig. 2.1 Representação gráfica de um ponto

Acontece que esse não é um ponto, é uma *representação gráfica* de um ponto.

É impossível representar um ponto ideal, geométrico, pois, por definição, ele não tem dimensão, isto é, não tem comprimento, largura e altura ou, em outras palavras, seu tamanho é nulo. É algo infinitamente pequeno. Qualquer ponto que se desenhar em um papel terá pelo menos comprimento e largura, além de uma espessura (altura) pequena, e não será infinitamente pequeno.

E por falar em dimensão, o 'pai' da geometria, Euclides (325-265 a.C., em grego Ευκλειδης, 'Eucleides'), em seu famoso livro *Elementos* (em grego, Στοιχεια, 'Stoikheia', kh como o j em espanhol, ou o ch em alemão, ou o x em russo; *The Elements* em inglês; v. ref.), de fato, 'Elementos de geometria', escrito ao redor de 300 a.C., define: "Um ponto é aquilo que não tem partes" indicando algo indivisível, com falta de dimensões. A fig. 2.2 mostra um fragmento do *Elementos*.

Fig. 2.2 Fragmento do *Elementos* de Euclides

2.2 O conceito de ponto

Com um simples ponto já podemos ver uma característica fundamental da matemática: seus entes são puramente mentais, não existem fisicamente. O/a leitor/a poderá objetar: mas um número, por exemplo, o 2, não tem uma ligação com o mundo físico? Sim, se ele designar uma contagem (o que se denomina de *número cardinal*) ou uma ordem (*número ordinal*) no mundo físico como, por exemplo, 2 pessoas e a 2ª página, respectivamente. O número 2 aqui escrito é uma representação de uma abstração, de algo que não existe fisicamente. É muito fácil compreender isso. Tomem-se todas as possíveis representações gráficas do 2: 2, II (em algarismos romanos), ii (idem), dois, dos (em espanhol), due (italiano), deux (francês), two (inglês), zwei (alemão, pronuncia-se 'tzvai'), два (russo, pronuncia-se 'dva'), שתיים (hebraico, pronuncia-se chtaim – a vogal 'a' não é escrita), צוויי (ídich, que usa letras hebraicas mas com vogais, pronuncia-se tzvei) etc. (acabaram-se minhas línguas estrangeiras...). Tomem-se ainda todas as representações físicas do 2, como duas páginas, duas pessoas etc. O que há de comum entre todas essas representações? O conceito puro do 2! Mas esse conceito não é nenhuma das representações, de fato, ele não tem representação gráfica, simbólica, ou física. Quando vemos uma representação dele, como a gráfica 2, na verdade associamos essa representação ao conceito puro do 2. E é com esse *conceito puro* que trabalhamos na matemática com o 2. De fato, na matemática tanto faz qual representação é usada. Por exemplo, ao vermos graficamente 2 + 3 dizemos que isso dá 5, mas se vermos a frase “dois mais três” também dizemos que isso dá 5 (ou “cinco”). A propósito, se o conceito puro do 2 não tem representação gráfica, simbólica ou física, ele não pode estar armazenado em nosso cérebro!

Da mesma maneira como ocorre com o conceito puro do 2, um ponto ideal, geométrico, é um conceito puro. Trabalhamos mentalmente com ele, por exemplo, quando dizemos que duas retas não paralelas coplanares (isto é, ambas em um mesmo plano) interceptam-se em um único ponto, indicado por *P* na fig. 2.3.

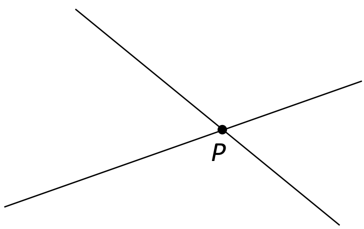

Fig. 2.3 Duas retas interceptando-se em um ponto

Quando falamos sobre os vértices de um triângulo, também estamos trabalhando com 3 pontos que são intersecções de três retas coplanares duas a duas, como na fig. 2.4:

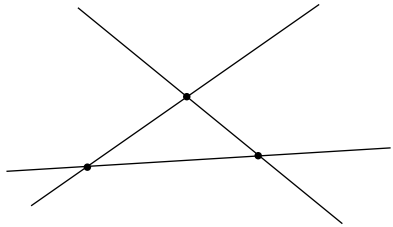

Fig. 2.4 Um triângulo formado por três retas

2.3 O ponto como representação de qualquer figura

Imagine, caro/a leitor/a, um quadrado, como o da fig. 2.5:

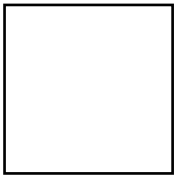

Fig. 2.5 Um quadrado

Agora imagine que você vá diminuindo o tamanho dos lados, como na fig. 2.6:

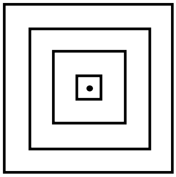

Fig. 2.6 Um quadrado com lados cada vez menores

Quando os lados tiverem tamanhos infinitamente pequenos, o quadrado reduz-se a um ponto, como o representado na fig. 2.1! Isso pode ser feito com qualquer figura, plana ou tridimensional.

Portanto, o ponto é uma representação de qualquer figura de tamanho infinitamente pequeno! Ele é o limite infinitesimal de qualquer figura, geométrica ou não.

2.4 Digressão filosófica: percepção de conceitos

Os conceitos puros do 2 e o de ponto ideal são os mesmos para todas as pessoas. Podemos, portanto, fazer a conjectura de que eles são objetivos e universais, isto é, estão fora dos indivíduos que pensam neles, não sendo algo individual e subjetivo. Com o nosso pensamento, 'observamos' esse conceito. Deve-se a Rudolf Steiner, em seu livro seminal *A Filosofia da Liberdade* (v. ref.) a caracterização do pensar como um órgão de percepção de conceitos que estão no mundo platônico das ideias, isto é, não são entes físicos. Segundo ele, quando observamos um objeto físico, o pensar, captando o conceito do objeto, completa a percepção sensorial, que é sempre instantânea e parcial; p.ex. sempre vemos um objeto em certo instante, em uma determinada posição, e não seu passado e de todos os lados ao mesmo tempo, e muito menos seu interior. Mas no momento em que dizemos algo como "Esta é uma cadeira" não estamos dizendo nada sobre a particular cadeira em si (sua forma, cor, material etc.), mas estamos nos referindo ao conceito de cadeira que nosso pensamento associou ao objeto observado. Isto é, estamos associando ao objeto o conceito universal, objetivo, de cadeira; estamos associando o que observamos à categoria aristotélica das cadeiras, com suas características e propriedades típicas: serve para sentar em uma parte horizontal, é estável (tem pelo menos 3 pés), tem um espaldar (senão seria uma banqueta), não é muito pesada, pode ser movida, tem uma forma adequada às nádegas, às costas das pessoas etc. Cada pessoa vê uma cadeira de certo ângulo, com uma nitidez particular, com cores eventualmente bem próximas mas diferentes das vistas por outras. Mas todas as pessoas com uma mente e um sistema óptico sadios dirão com total certeza de que estão 'vendo' uma cadeira (e não, por exemplo, uma fralda), o que mostra a universalidade e a objetividade do conceito. Note-se que não se trata de simples associação de uma percepção de um objeto com seu nome, 'cadeira'. Isso seria um nominalismo. Existe por detrás de cada objeto a sua essência, seu conceito, que engloba suas possíveis formas e funcionalidades.

Na verdade, não é diretamente da percepção de algum objeto que o pensar nos leva ao conceito subjacente ao objeto. Existe um passo intermediário, que é a formação da imagem no nosso interior, a *representação mental*. Essa formação é mais uma atividade do nosso pensar. Assim, temos a sequência

Objeto → percepção sensorial → representação mental → conceito

Com isso completa-se o processo de cognição de algo percebido pelos sentidos. Assim, como Steiner chamou atenção, o pensar completa a cognição, que se inicia com a percepção sensorial.

Se o que percebemos é um fenômeno, e não simplesmente um objeto, há ainda outro passo na cognição: a compreensão do fenômeno. Caracterizo a compreensão como a associação correta de uma percepção correta com o conceito subjacente ao objeto ou fenômeno percebido. Às vezes a compreensão é a associação correta entre dois conceitos corretos. Note-se que estou usando uma concepção ingênua de ‘correto’, algo que é óbvio para qualquer pessoa dotada de uma mente sadia.

É interessante notar que o ser humano está sempre querendo compreender. Por exemplo, suponha-se que em um dia calmo, sem vento, uma pessoa vê um galhinho de um arbusto mexendo-se. O normal é a pessoa ficar curiosa, talvez um pouco ansiosa, pois não compreende o fenômeno. De repente, um pássaro, que estava escondido, sai do arbusto. Aí a pessoa compreende porque o galhinho se mexeu – foi resultado de o pássaro ter-se mexido –, e fica satisfeita. Infelizmente, as máquinas tornaram-se tão complexas que, em geral, as pessoas acham que é impossível compreender seu funcionamento, e isso abafa sua curiosidade, tornando-as menos humanas, sem buscar a compreensão e se satisfazendo com a mera percepção. Esse é o caso, por exemplo, de se compreender porque um avião voa. Todas as pessoas já viram um avião voar, e talvez várias até voaram em um deles. No entanto, são raríssimas as que tiveram a curiosidade de investigar, de aprender porque um avião voa. Em uma de minhas palestras, perguntando por que um avião voa e não cai, recebi a resposta: "Porque ele tem um motor." Ocorre que planadores não têm um motor, e voam; carros têm motor e não voam. Para uma explicação sobre esse fenômeno, veja-se o cap. 22 "Por que um avião voa" em meu livro [Setzer 2020, v. ref. do cap. 1]. Assim, a complexidade crescente das máquinas está fazendo os seres humanos perderem a curiosidade e consequentemente desenvolverem uma paralisia mental.

2.5 Referências

- Euclides. Acesso em 23/2/19: https://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides

- Steiner, R. *A Filosofia da liberdade: Elementos de uma cosmovisão moderna*. GA (de *Gesamtausgabe,* obra completa) 4. Trad. A. Grandisoli. São Paulo: Antroposófica, 2ª ed. 1988. Atenção, há uma edição mais recente com tradução de M. da Veiga Greuel. Recomendo a primeira, pois é bem mais fiel ao original. Há traduções completas na Internet em inglês, com títulos *Philosophy of Freedom* e *Philosophy of Spiritual Activity*, e também em espanhol, ver (acesso em 4/8/18): www.rsarchive.org/GA/index.php?ga=GA0004

- Sobre o *Elementos* de Euclides. Acessos em 9/2/20: https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/defI1.html
- https://pt.wikipedia.org/wiki/Os_Elementos