Aula 1: Análise combinatória

Princípio Básico da Contagem

Exemplos: espaço amostral e eventos.

1. Experimento: lança-se um dado e observa-se a face para cima.

   $$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

   Evento: a face é maior que 3

   $$A = \{4, 5, 6\}$$

2. Experimento: lançar uma moeda duas vezes (denote cara por k e coroa por c)

   $$\Omega = \{(k, k), (k, c), (c, k), (c, c)\}$$

   Evento: número de cara's é igual ao número de coroa's

   $$A = \{(k, c), (c, k)\}$$

3. Experimento: 3 peças são retiradas de uma linha de produção e verifica-se a sua qualidade como sendo boa (B) ou defeituosa (D)

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(B,B,B),(B,B,D),(B,D,B),(D,B,B),\\ &(D,D,B),(D,B,D),(B,D,D),(D,D,D)\}\end{aligned}$$

   Evento: pelo menos duas peças boas

$$A = \{(B,B,B),(B,B,D),(B,D,B),(D,B,B)\}$$

4. Experimento: lança-se uma moeda até que se obtenha uma cara

$$\Omega = \{k,(c,k),(c,c,k),(c,c,c,k),(c,c,c,c,k),\ldots\}$$

   Evento: número de coroa's é par

$$A = \{(c,c,k),(c,c,c,c,k),(c,c,c,c,c,c,k),\ldots\}$$

5. Experimento: número de chamadas telefônicas que chegam em uma central de atendimento em determinado período de tempo

$$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\} \qquad \text{(espaço amostral infinito)}$$

Evento: número de chamadas foi pelo menos 8

$$A = \{8, 9, 10 \ldots\} \qquad \text{(evento infinito)}$$

6. Experimento: registra-se o tempo de vida de uma lâmpada em minutos.

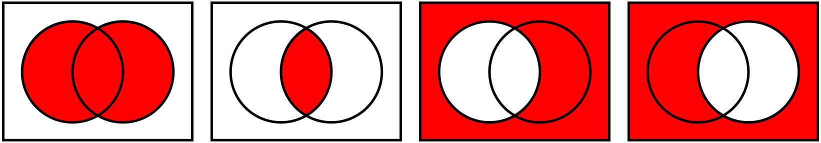
$$\Omega = \{\omega \in \mathbb{R} : \omega \geq 0\} \qquad \text{(espaço amostral infinito)}$$

Evento: a lâmpada vive por menos de uma hora

$$A = \{\omega \in \mathbb{R} : 0 \leq \omega < 60\} \qquad \text{(evento infinito)}$$

Operação entre eventos

Diagrama de Venn



$A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ A^c $\quad$ B^c

Exemplo

7. Experimento: uma urna contém bolas numeradas de 1 à 15, uma bola é retirada e observa-se seu número.

$$\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$$

Eventos.
A: o número é par $\Longrightarrow$ $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$
B: o número é múltiplo de 3 $\Longrightarrow$ $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

Nesse caso:
$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$
$A \cap B = \{6, 12\}$
$A^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$
$B^c = \{1, 2, 4, 4, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$

Lema 1

Sejam A, B e C eventos do mesmo espaço amostral Ω, temos:

i. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

ii. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

iii. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

iv. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Lema 1

Sejam A, B e C eventos do mesmo espaço amostral Ω, temos:

i. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

ii. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

iii. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

iv. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Além disso, iii e iv permanecem verdade para qualquer sequência **finita** de eventos:

Lema 1': leis de DeMorgan

Seja $A_1, \ldots, A_n$ uma sequência de eventos do mesmo espaço amostral Ω, temos:

iii'. $\cup_{k=1}^{n} A_k = \cap_{k=1}^{n} A_k^c$

iv'. $\cap_{k=1}^{n} A_k = \cup_{k=1}^{n} A_k^c$

Lema 1

Sejam A, B e C eventos do mesmo espaço amostral Ω, temos:

i. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

ii. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (exercício)

iii. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

iv. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (exercício)

Além disso, iii e iv permanecem verdade para qualquer sequência **finita** de eventos:

Lema 1': leis de DeMorgan

Seja $A_1, \ldots, A_n$ uma sequência de eventos do mesmo espaço amostral Ω, temos:

iii'. $\cup_{k=1}^n A_k = \cap_{k=1}^n A_k^c$

iv'. $\cap_{k=1}^n A_k = \cup_{k=1}^n A_k^c$

Exemplos: Princípio Fundamental da Contagem

8. Em uma comunidade composta por 10 mulheres, cada uma com 3 filhos, um sorteio decidirá quem serão a mãe e o filho do ano. Quantas escolhas diferentes são possíveis?

Exemplos: Princípio Fundamental da Contagem

8. Em uma comunidade composta por 10 mulheres, cada uma com 3 filhos, um sorteio decidirá quem serão a mãe e o filho do ano. Quantas escolhas diferentes são possíveis?

9. Desejamos ir da Cidade A à cidade C, passando no caminho pela cidade B. Entre as cidades A e B passam 2 rodovias, enquanto entre as cidades B e C passam 3. De quantas maneiras diferentes é possível fazer o trajeto desejado?

Exemplos: Princípio Fundamental da Contagem

8. Em uma comunidade composta por 10 mulheres, cada uma com 3 filhos, um sorteio decidirá quem serão a mãe e o filho do ano. Quantas escolhas diferentes são possíveis?

9. Desejamos ir da Cidade A à cidade C, passando no caminho pela cidade B. Entre as cidades A e B passam 2 rodovias, enquanto entre as cidades B e C passam 3. De quantas maneiras diferentes é possível fazer o trajeto desejado?

10. Um baralho comum é formado por cartas agrupadas em 4 naipes, cada um dos quais contém 13 cartas (ás, 2, 3,..., valete, dama, rei). Cada carta fica determinada pelo seu naipe e pelo seu valor. Quantas cartas tem em um baralho?

Exemplos: Princípio Fundamental da Contagem

11. Uma comissão de faculdade é composta por 3 estudantes calouros, 4 estudantes do segundo ano, 5 do terceiro ano e 2 formandos. Um subgrupo dessa comissão com um representante de cada ano deverá ser escolhido. Quantos subgrupos diferentes são possíveis?

Exemplos: Princípio Fundamental da Contagem

11. Uma comissão de faculdade é composta por 3 estudantes calouros, 4 estudantes do segundo ano, 5 do terceiro ano e 2 formandos. Um subgrupo dessa comissão com um representante de cada ano deverá ser escolhido. Quantos subgrupos diferentes são possíveis?

12. Quantas placas de automóveis com 7 símbolos, dos quais os três primeiros são letras e os quatro últimos são números são possíveis?

Exemplos: Princípio Fundamental da Contagem

11. Uma comissão de faculdade é composta por 3 estudantes calouros, 4 estudantes do segundo ano, 5 do terceiro ano e 2 formandos. Um subgrupo dessa comissão com um representante de cada ano deverá ser escolhido. Quantos subgrupos diferentes são possíveis?

12. Quantas placas de automóveis com 7 símbolos, dos quais os três primeiros são letras e os quatro últimos são números são possíveis? Se não pudermos repetir letras e números?

Exemplo de amostras

13. Três pessoas A, B e C formam uma amostra ordenada da população humana.

Exemplo de amostras

13. Três pessoas A, B e C formam uma amostra ordenada da população humana. Os dias de seus aniversários são uma amostra da população dos dias do ano;

Exemplo de amostras

13. Três pessoas A, B e C formam uma amostra ordenada da população humana. Os dias de seus aniversários são uma amostra da população dos dias do ano; suas idades formam uma amostra de três números.

Exemplo de amostras

13. Três pessoas A, B e C formam uma amostra ordenada da população humana. Os dias de seus aniversários são uma amostra da população dos dias do ano; suas idades formam uma amostra de três números.

14. O Sr. e a Sra. Smith constituem uma amostra de tamanho dois, retirada da população humana;

Exemplo de amostras

13. Três pessoas A, B e C formam uma amostra ordenada da população humana. Os dias de seus aniversários são uma amostra da população dos dias do ano; suas idades formam uma amostra de três números.
14. O Sr. e a Sra. Smith constituem uma amostra de tamanho dois, retirada da população humana; ao mesmo tempo eles formam uma amostra de tamanho um, retirada da população de todos os casais.

Exemplo de amostras

13. Três pessoas A, B e C formam uma amostra ordenada da população humana. Os dias de seus aniversários são uma amostra da população dos dias do ano; suas idades formam uma amostra de três números.

14. O Sr. e a Sra. Smith constituem uma amostra de tamanho dois, retirada da população humana; ao mesmo tempo eles formam uma amostra de tamanho um, retirada da população de todos os casais.

15. Efetuar r lançamentos de uma moeda é uma forma de obter uma amostra de tamanho r da população constituída pelas duas letras k e c.

Exemplo de amostras

13. Três pessoas A, B e C formam uma amostra ordenada da população humana. Os dias de seus aniversários são uma amostra da população dos dias do ano; suas idades formam uma amostra de três números.

14. O Sr. e a Sra. Smith constituem uma amostra de tamanho dois, retirada da população humana; ao mesmo tempo eles formam uma amostra de tamanho um, retirada da população de todos os casais.

15. Efetuar r lançamentos de uma moeda é uma forma de obter uma amostra de tamanho r da população constituída pelas duas letras k e c. Essa mesma disposição de r letras k q c é um único ponto amostral no espaço associado ao experimento que consiste no lançamento de uma moeda r vezes

Lema

Número de amostras ordenadas de tamanho r distintas de uma população com n elementos

- Com reposição:
- Sem reposição:

Lema

Número de amostras ordenadas de tamanho r distintas de uma população com n elementos

- Com reposição: n^r possibilidades
- Sem reposição:

Lema

Número de amostras ordenadas de tamanho r distintas de uma população com n elementos

- Com reposição: n^r possibilidades
- Sem reposição: $(n)_r = n(n-1)\dots(n-r+1)$ possibilidades

Lema

Número de amostras ordenadas de tamanho r distintas de uma população com n elementos

- Com reposição: n^r possibilidades
- Sem reposição: $(n)_r = n(n-1)\dots(n-r+1)$ possibilidades

16. Considere o conjunto $C = \{a, b, c, d\}$. Quantas amostras ordenadas **sem reposição** de tamanho 3 dos elementos de C existem?

Lema

Número de amostras ordenadas de tamanho r distintas de uma população com n elementos

- Com reposição: n^r possibilidades
- Sem reposição: $(n)_r = n(n-1)\ldots(n-r+1)$ possibilidades

16. Considere o conjunto $C = \{a, b, c, d\}$. Quantas amostras ordenadas **sem reposição** de tamanho 3 dos elementos de C existem?

$$
\begin{array}{cccc}
abc & abd & acd & dcd \\
acb & adb & adc & bdc \\
bac & bad & cad & cbd \\
bca & bda & cda & cdb \\
cab & dab & dac & dbc \\
cba & dba & dca & dcb
\end{array}
$$

Lema

Número de amostras ordenadas de tamanho r distintas de uma população com n elementos

- Com reposição: n^r possibilidades
- Sem reposição: $(n)_r = n(n-1)\dots(n-r+1)$ possibilidades

16. Considere o conjunto $C = \{a, b, c, d\}$. Quantas amostras ordenadas **sem reposição** de tamanho 3 dos elementos de C existem?

abc	*abd*	*acd*	*dcd*
acb	*adb*	*adc*	*bdc*
bac	*bad*	*cad*	*cbd*
bca	*bda*	*cda*	*cdb*
cab	*dab*	*dac*	*dbc*
cba	*dba*	*dca*	*dcb*

Com reposição: todos os elementos sem reposição, mais:

aaa	*aab*	*aac*	*aad*	*aba*
aca	*ada*	*baa*	*caa*	*daa*
		...		
ddd	*dda*	*ddb*	*ddc*	*dad*
dbd	*dcd*	*add*	*bdd*	*cdd*

Corolário

Número de permutações de n elementos distintas é

$$n(n-1)(n-2)\ldots 2.1 = n!$$

Corolário

Número de permutações de n elementos distintas é

$$n(n-1)(n-2)\ldots 2.1 = n!$$

17. Considere o conjunto $C = \{1, 2, 3\}$. Quantas permutações dos elementos de C existem?

Caso especial de permutação

18. Quantos diferentes permutações de letras podem ser formados a partir das letras PEPPER?

Caso especial de permutação

18. Quantos diferentes permutações de letras podem ser formados a partir das letras PEPPER?

    Note que se diferenciarmos os P's e os E's, teremos 6 "letras" possíveis $P_1E_1P_2P_3E_2R$ e portanto 6! palavras possíveis.

18. Quantos diferentes permutações de letras podem ser formados a partir das letras PEPPER?

    Note que se diferenciarmos os P's e os E's, teremos 6 "letras" possíveis $P_1E_1P_2P_3E_2R$ e portanto 6! palavras possíveis. Entretanto, fixado um arranjo, por exemplo $P_1P_2E_1P_3E_2R$ se permutarmos os P's e os E's a palavra final ainda será $PPEPER$.

Caso especial de permutação

18. Quantos diferentes permutações de letras podem ser formados a partir das letras PEPPER?

    Note que se diferenciarmos os P's e os E's, teremos 6 "letras" possíveis $P_1E_1P_2P_3E_2R$ e portanto 6! palavras possíveis. Entretanto, fixado um arranjo, por exemplo $P_1P_2E_1P_3E_2R$ se permutarmos os P's e os E's a palavra final ainda será *PPEPER*. De fato, teremos

$$\begin{array}{ll}
P_1P_2E_1P_3E_2R & P_1P_2E_2P_3E_1R \\
P_1P_3E_1P_2E_2R & P_1P_3E_2P_2E_1R \\
P_2P_1E_1P_3E_2R & P_2P_1E_2P_3E_1R \\
P_2P_3E_1P_1E_2R & P_2P_3E_2P_1E_1R \\
P_3P_1E_1P_2E_2R & P_3P_1E_2P_2E_1R \\
P_3P_2E_1P_1E_2R & P_3P_2E_2P_1E_1R
\end{array}$$

De forma geral

Lema:

Considere uma população com n elementos de r tipos diferentes, com $n_1, n_2, \ldots n_r$ elementos cada. Suponha que elementos de mesmo tipo sejam indistinguíveis. Nesse caso, o número de possíveis de permutações diferente será

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$$

19. Um torneio de xadrez tem dez competidores, dos quais quatro são russos, três são dos Estados Unidos, dois são da Grã-Bretanha e um é do Brasil. Se o resultado do torneio listar apenas a nacionalidade dos jogadores em sua ordem de colocação, quantos resultados serão possíveis?

Lema

O número de amostras não ordenadas sem reposição de tamanho r de um população n elementos (combinação de n elementos r a r) é dado por

Lema

O número de amostras não ordenadas sem reposição de tamanho r de um população n elementos (combinação de n elementos r a r) é dado por

$$C_{n,r} = \frac{(n)_r}{r!}$$

Lema

O número de amostras não ordenadas sem reposição de tamanho r de um população n elementos (combinação de n elementos r a r) é dado por

$$C_{n,r} = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Lema

O número de amostras não ordenadas sem reposição de tamanho r de um população n elementos (combinação de n elementos r a r) é dado por

$$C_{n,r} = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Lema

O número de amostras não ordenadas sem reposição de tamanho r de um população n elementos (combinação de n elementos r a r) é dado por

$$C_{n,r} = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

20. Seis times participam de um torneio de basquete. Cada uma das equipes enfrenta todas as demais. Quantos jogos serão realizados?

Lema

O número de amostras não ordenadas sem reposição de tamanho r de um população n elementos (combinação de n elementos r a r) é dado por

$$C_{n,r} = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

20. Seis times participam de um torneio de basquete. Cada uma das equipes enfrenta todas as demais. Quantos jogos serão realizados?
21. Um comissão deve ser formada por três de vinte estudantes. Quantas comissões são possíveis?

Resumo

- A, B e C eventos do espaço amostral Ω

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \qquad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
$$A \setminus B = A \cap B^c$$

- **Princípio Fundamental da Contagem**: se um experimento é realizado em duas etapas, a primeira de n maneiras e a segunda de m maneiras, então podemos realizar o procedimento inteiro de mn maneiras.

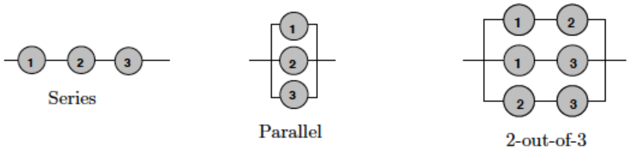
- Número de amostras de tamanho r de uma população com n elementos
  - Ordenadas com reposição: n^r (sequências)
  - Ordenadas sem reposição: $(n)_r = n(n-1)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$
  - Não ordenadas sem reposição : $C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ (subconjuntos)

- Número de permutações de n elementos: $n!$ (a.o. sem rep)
- Número de permutações de uma população com n elementos de r tipos diferentes, com $n_1, n_2, \ldots, n_r$ elementos cada (ambiguidade)

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$$

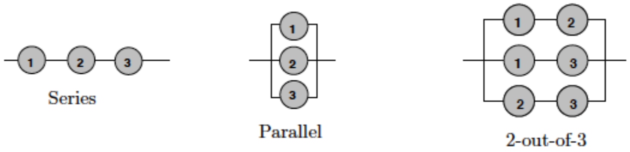
Exemplo 22

Abaixo seguem ilustrados três sistemas, com 3 componentes instáveis cada. O sistema em série funciona se todas as 3 componentes estão funcionando; o sistema em paralelo funciona se pelo menos uma das componentes funciona; e o sistema 2-de-3 funciona de pelo menos dois componentes dos 3 funciona.



Exemplo 22

Abaixo seguem ilustrados três sistemas, com 3 componentes instáveis cada. O sistema em série funciona se todas as 3 componentes estão funcionando; o sistema em paralelo funciona se pelo menos uma das componentes funciona; e o sistema 2-de-3 funciona de pelo menos dois componentes dos 3 funciona.



Considere os eventos

A_i : a $i-$ésima componente funciona, i=1,2,3.

B_s : o sistema em série funciona

B_p : o sistema em paralelo funciona

B_2 : o sistema 2-de-3 funciona

Descreva B_s, B_p e B_2 em função dos eventos A_i, i=1,2,3.

Exemplo 23

Defina uma partição de Ω usando operações entre os eventos A_1, A_2 e A_3