Aula 2 e 3: Espaço de probabilidade e probabilidade condiciona

Definição Clássica

Definição 1

Considere um experimento cujo espaço amostra Ω (**finito**) tem n elementos. Suponha que a ocorrência de cada elemento do espaço amostral tenha a mesma probabilidade. Seja A um evento de Ω com m elementos. A probabilidade de A, denotada por $P(A)$, é dada por

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}.$$

onde $|\cdot|$ denota a cardinalidade do conjunto.

Exemplo: espaço amostral finito

Exemplo 1. Considere o experimento em que um dado honesto é lançado e a face voltada para cima é registrada.

Exemplo: espaço amostral finito

Exemplo 1. Considere o experimento em que um dado honesto é lançado e a face voltada para cima é registrada.Nesse caso o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exemplo: espaço amostral finito

Exemplo 1. Considere o experimento em que um dado honesto é lançado e a face voltada para cima é registrada.Nesse caso o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.Como o dado é honesto, para cada elemento de Ω, associamos a probabilidade $1/6$. Assim,

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = 1/6.$$

Exemplo: espaço amostral finito

Exemplo 1. Considere o experimento em que um dado honesto é lançado e a face voltada para cima é registrada.Nesse caso o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.Como o dado é honesto, para cada elemento de Ω, associamos a probabilidade $1/6$. Assim,

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = 1/6.$$

Além disso, a probabilidade da face ser par:

Exemplo: espaço amostral finito

Exemplo 1. Considere o experimento em que um dado honesto é lançado e a face voltada para cima é registrada.Nesse caso o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.Como o dado é honesto, para cada elemento de Ω, associamos a probabilidade $1/6$. Assim,

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = 1/6.$$

Além disso, a probabilidade da face ser par:

$$P(\{2, 4, 6\}) = \frac{|\{2, 4, 6\}|}{\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo: espaço amostral finito

Exemplo 1. Considere o experimento em que um dado honesto é lançado e a face voltada para cima é registrada.Nesse caso o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.Como o dado é honesto, para cada elemento de Ω, associamos a probabilidade $1/6$. Assim,

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = 1/6.$$

Além disso, a probabilidade da face ser par:

$$P(\{2, 4, 6\}) = \frac{|\{2, 4, 6\}|}{\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Já a probabilidade da face ser maior que 4:

Exemplo: espaço amostral finito

Exemplo 1. Considere o experimento em que um dado honesto é lançado e a face voltada para cima é registrada.Nesse caso o espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.Como o dado é honesto, para cada elemento de Ω, associamos a probabilidade $1/6$. Assim,

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = 1/6.$$

Além disso, a probabilidade da face ser par:

$$P(\{2, 4, 6\}) = \frac{|\{2, 4, 6\}|}{\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Já a probabilidade da face ser maior que 4:

$$P(\{5, 6\}) = \frac{|\{5, 6\}|}{\Omega} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Note:

- A probabilidade é uma função da classe dos eventos em [0,1].

Note:

- A probabilidade é uma função da classe dos eventos em [0,1].
- Importância do Princípio Básico de Contagem (para calcular o número de elementos do espaço amostral e do evento)

Note:

- A probabilidade é uma função da classe dos eventos em [0,1].
- Importância do Princípio Básico de Contagem (para calcular o número de elementos do espaço amostral e do evento)

Problema: como definimos as probabilidades dos elementos de Ω quando o espaço amostral for **infinito**?

Definição frequentista

Definição 2

Suponha que um experimento, cujo espaço amostral é Ω, seja realizado repetidamente em condições exatamente iguais. Para cada evento A do espaço amostral Ω, definimos $N_n(A)$ como o número de vezes que o evento A ocorre nas n primeiras repetições do experimento. Então a probabilidade do evento A, é definida como

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{N_n(A)}{n}$$

Exemplo

No experimento do dado honesto. Suponha que estejamos interessados na probabilidade da face ser par. Considere as seguintes realizações do experimento:
n=10

$$3, 5, 4, 5, 2, 6, 3, 1, 2, 5$$

Exemplo

No experimento do dado honesto. Suponha que estejamos interessados na probabilidade da face ser par. Considere as seguintes realizações do experimento:

n=10

$$3, 5, 4, 5, 2, 6, 3, 1, 2, 5$$

Logo $P(A) = 4/10 = 0,4$

Exemplo

No experimento do dado honesto. Suponha que estejamos interessados na probabilidade da face ser par. Considere as seguintes realizações do experimento:
n=10

$$3, 5, 4, 5, 2, 6, 3, 1, 2, 5$$

Logo $P(A) = 4/10 = 0,4$

n=20

$$4, 1, 3, 6, 3, 3, 1, 3, 4, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 5, 3, 6, 6, 4$$

Logo $P(A) = 9/20 = 0,45$

Exemplo

No experimento do dado honesto. Suponha que estejamos interessados na probabilidade da face ser par. Considere as seguintes realizações do experimento:

n=10

$$3, 5, 4, 5, 2, 6, 3, 1, 2, 5$$

Logo $P(A) = 4/10 = 0,4$

n=20

$$4, 1, 3, 6, 3, 3, 1, 3, 4, 5, 6, 6, 5, 4, 3, 5, 3, 6, 6, 4$$

Logo $P(A) = 9/20 = 0,45$

n=30

$$2, 1, 3, 6, 4, 5, 2, 1, 1, 3, 6, 1, 4, 5, 6, 5, 3, 6, 2, 5, 2, 4, 4, 2, 6, 5, 1, 3, 2, 2$$

Logo $P(A) = 16/30 = 0,533$

Add graph

Problema: como saber que $N_n(A)/n$ convergirá para algum valor limite constante?

Definição 3

Sejam Ω o espaço amostral de um experimento e $\mathcal{F}$ a classe dos eventos de Ω Uma probabilidade é uma função definida em $\mathcal{F}$ satisfazendo as seguintes condições:

i. $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

ii. $P(\Omega) = 1$.

iii. Se $(A_k)_{k \geq 1}$ é uma sequência de eventos de $\mathcal{F}$ mutuamente exclusivos, então:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

Definição Axiomática

Definição 3

Sejam Ω o espaço amostral de um experimento e $\mathcal{F}$ a classe dos eventos de Ω Uma probabilidade é uma função definida em $\mathcal{F}$ satisfazendo as seguintes condições:

i. $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

ii. $P(\Omega) = 1$.

iii. Se $(A_k)_{k \geq 1}$ é uma sequência de eventos de $\mathcal{F}$ mutuamente exclusivos, então:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

Definição 4

A tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é dita um espaço amostral.

Exemplo

No exemplo do dado honesto. Seja $\mathcal{F}$ a classe de todos os eventos de $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Exemplo

No exemplo do dado honesto. Seja $\mathcal{F}$ a classe de todos os eventos de $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (conjunto das partes).

Exemplo

No exemplo do dado honesto. Seja $\mathcal{F}$ a classe de todos os eventos de $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (conjunto das partes). Mostre que a função que associa a qualquer evento $A \in \mathcal{F}$ ao valor

$$P(A) = \frac{|A|}{6}$$

é uma probabilidade.

E se o dado for desonesto?

Exemplo 1. Suponha que para um dado viciado a face 6 tenha três vezes mais chances de aparecer que as demias. Isto é, queremos que os eventos simples tenham as seguintes probabilidades:

$$P(\{6\}) = 0,375, P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = 0,125.$$

E se o dado for desonesto?

Exemplo 1. Suponha que para um dado viciado a face 6 tenha três vezes mais chances de aparecer que as demias. Isto é, queremos que os eventos simples tenham as seguintes probabilidades:

$$P(\{6\}) = 0,375, P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = 0,125.$$

Como é podemos definir a função de probabilidade?

E se o dado for desonesto?

Exemplo 1. Suponha que para um dado viciado a face 6 tenha três vezes mais chances de aparecer que as demias. Isto é, queremos que os eventos simples tenham as seguintes probabilidades:

$$P(\{6\}) = 0,375, P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = 0,125.$$

Como é podemos definir a função de probabilidade?

Qual a probabilidade da face ser par? E de ser menor que 4?

Espaço amostral enumerável

Considere um experimento cujo espaço amostral é $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$

- Axioma iii. implica que, uma vez determinada as probabilidades dos eventos unitários, isto é $P(\{\omega_k\})$ para todo $k \geq i$, determinamos as probabilidades de qualquer evento $A \in \mathcal{F}$

Espaço amostral enumerável

Considere um experimento cujo espaço amostral é $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$

- Axioma iii. implica que, uma vez determinada as probabilidades dos eventos unitários, isto é $P(\{\omega_k\})$ para todo $k \geq i$, determinamos as probabilidades de qualquer evento $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = P\Big(\bigcup_{\omega_k \in A} \{\omega_k\} \Big)$$

Espaço amostral enumerável

Considere um experimento cujo espaço amostral é $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$

- Axioma iii. implica que, uma vez determinada as probabilidades dos eventos unitários, isto é $P(\{\omega_k\})$ para todo $k \geq i$, determinamos as probabilidades de qualquer evento $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = P\Big(\bigcup_{\omega_k \in A} \{\omega_k\}\Big) = \sum_{\omega_k \in A} P(\{\omega_k\})$$

Espaço amostral enumerável

Considere um experimento cujo espaço amostral é $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$

- Axioma iii. implica que, uma vez determinada as probabilidades dos eventos unitários, isto é $P(\{\omega_k\})$ para todo $k \geq i$, determinamos as probabilidades de qualquer evento $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = P\Big(\bigcup_{\omega_k \in A} \{\omega_k\}\Big) = \sum_{\omega_k \in A} P(\{\omega_k\})$$

- Em particular, se o espaço amostral é **finito** e todos os seus elementos têm a mesma probabilidade de ocorrência (equiprováveis), para qualquer evento $A \in \mathcal{F}$ vale que•

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} P(\{\omega_k\}) = \sum_{\omega_k \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Propriedades da Probabilidade

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade

i. $P(\emptyset) = 0$

ii. Sejam $A_1, \dots, A_n$ eventos de $\mathcal{F}$ mutuamente exclusivos, então:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

iii. $P(A^c) = 1 - P(A)$ para qualquer evento $A \in \mathbf{F}$.

iv. Dados dois eventos $A, B \in \mathcal{F}$, se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$.

v. Dados dois eventos $A, B \in \mathcal{F}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

vi. Dados $A_1, \dots, A_n$ eventos de $\mathcal{F}$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

Exemplos: eventos equiprováveis

2. Se dois dados honestos são lançados, qual é a probabilidade de que a soma das faces seja igual a 7.

Exemplos: eventos equiprováveis

2. Se dois dados honestos são lançados, qual é a probabilidade de que a soma das faces seja igual a 7.
3. Se três bolas são retiradas de um recipiente contendo 6 bolas brancas e 5 bolas pretas, qual é a probabilidade de que uma das bolas seja branca e as outras duas sejam pretas?

Exemplos: eventos equiprováveis

2. Se dois dados honestos são lançados, qual é a probabilidade de que a soma das faces seja igual a 7.

3. Se três bolas são retiradas de um recipiente contendo 6 bolas brancas e 5 bolas pretas, qual é a probabilidade de que uma das bolas seja branca e as outras duas sejam pretas?

4. Qual a probabilidade de que numa mão de pôquer tenha cinco cartas com valores diferentes. Considere o baralho com as 52 cartas (13 valores e 4 naipes) e que uma mão de pôquer são 5 cartas.

Exemplos: eventos equiprováveis

2. Se dois dados honestos são lançados, qual é a probabilidade de que a soma das faces seja igual a 7.
3. Se três bolas são retiradas de um recipiente contendo 6 bolas brancas e 5 bolas pretas, qual é a probabilidade de que uma das bolas seja branca e as outras duas sejam pretas?
4. Qual a probabilidade de que numa mão de pôquer tenha cinco cartas com valores diferentes. Considere o baralho com as 52 cartas (13 valores e 4 naipes) e que uma mão de pôquer são 5 cartas.
5. Num grupo de r pessoas qual a probabilidade de pelo menos duas delas fazerem aniversário no mesmo dia?

6. Um comitê de 5 pessoas deve ser selecionado de um grupo de 6 homens e 9 mulheres. Se a seleção for feita aleatoriamente, qual é a probabilidade de que o comitê seja formado por 3 homens e 2 mulheres?

6. Um comitê de 5 pessoas deve ser selecionado de um grupo de 6 homens e 9 mulheres. Se a seleção for feita aleatoriamente, qual é a probabilidade de que o comitê seja formado por 3 homens e 2 mulheres?

7. Uma urna contém n bolas, uma das quais é especial. Se k dessas bolas são retiradas uma de cada vez, e todas as bolas na urna têm a mesma a probabilidade de serem retiradas. Qual é a probabilidade de a bola especial ser escolhida?

6. Um comitê de 5 pessoas deve ser selecionado de um grupo de 6 homens e 9 mulheres. Se a seleção for feita aleatoriamente, qual é a probabilidade de que o comitê seja formado por 3 homens e 2 mulheres?

7. Uma urna contém n bolas, uma das quais é especial. Se k dessas bolas são retiradas uma de cada vez, e todas as bolas na urna têm a mesma a probabilidade de serem retiradas. Qual é a probabilidade de a bola especial ser escolhida?

8. Numa mão de pôquer de cinco cartas, o *full house* ocorre quando alguém sai com três cartas de mesmo valor e duas outras cartas de mesmo valor (que é naturalmente diferente do primeiro). Assim, um *full house* é formado por uma trinca mais um par. Qual é a probabilidade de alguém sair com um *full house?*

6. Um comitê de 5 pessoas deve ser selecionado de um grupo de 6 homens e 9 mulheres. Se a seleção for feita aleatoriamente, qual é a probabilidade de que o comitê seja formado por 3 homens e 2 mulheres?

7. Uma urna contém n bolas, uma das quais é especial. Se k dessas bolas são retiradas uma de cada vez, e todas as bolas na urna têm a mesma a probabilidade de serem retiradas. Qual é a probabilidade de a bola especial ser escolhida?

8. Numa mão de pôquer de cinco cartas, o *full house* ocorre quando alguém sai com três cartas de mesmo valor e duas outras cartas de mesmo valor (que é naturalmente diferente do primeiro). Assim, um *full house* é formado por uma trinca mais um par. Qual é a probabilidade de alguém sair com um *full house?*

9. Nos Estados Unidos, cada um dos cinquenta estados é representado por dois senadores. Suponhamos que uma comissão de cinquenta senadores é escolhida ao acaso. Qual a probabilidade de um determinado estado estar representado na comissão?

Eventos não equiprováveis

10. J. leva dois livros para ler durante as férias. A probabilidade de ela gostar do primeiro livro é de 0,5, de gostar do segundo livro é de 0,4 e de gostar de ambos os livros é de 0,3. Qual é a probabilidade de que ela não goste de nenhum dos livros?

Probabilidade Condicional

Exemplo 11

Considere o experimento lançar dois dados honestos. Logo, cada um dos 36 resultados possíveis é igualmente provável e tem probabilidade 1/36. Sabendo que o lançamento do primeiro dado tenha sido igual a 3, qual é a probabilidade de que a soma das faces dos dados seja igual a 8?

Definição:

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço amostral e $A, B \in \mathcal{F}$ eventos tal que $P(B) > 0$. Então a probabilidade de A dado B, denotada por $P(A \mid B)$, é definida como

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definição:

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço amostral e $A, B \in \mathcal{F}$ eventos tal que $P(B) > 0$. Então a probabilidade de A dado B, denotada por $P(A \mid B)$, é definida como

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

No exemplo dos dois dados honestos. Defina

$$\begin{aligned} A &: \text{a soma das faces dos dados é igual a 8.} \\ B &: \text{a primeira face é igual a 3.} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} A &= \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} \\ B &= \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\} \\ A \cap B &= \{(3,5)\} \end{aligned}$$

Definição:

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço amostral e $A, B \in \mathcal{F}$ eventos tal que $P(B) > 0$. Então a probabilidade de A dado B, denotada por $P(A \mid B)$, é definida como

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

No exemplo dos dois dados honestos. Defina

$$A : \text{a soma das faces dos dados é igual a 8.}$$
$$B : \text{a primeira face é igual a 3.}$$

Logo,

$$A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$$
$$B = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$$
$$A \cap B = \{(3,5)\}$$

e portanto

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/36}{6/36} = \frac{1}{6}$$

Exemplos

12. Uma moeda é jogada duas vezes. Supondo que todos os quatros pontos no espaço amostral $\Omega = \{(k, k), (k, c), (c, k), (c, c)\}$ sejam igualmente prováveis, onde k representa cara e c representa coroa, qual é a probabilidade condicional de que dê cara em ambas as jogadas, dado que
   (a) dê cara na primeira jogada?
   (b) dê cara em pelo menos uma das jogadas?

Exemplos

12. Uma moeda é jogada duas vezes. Supondo que todos os quatros pontos no espaço amostral $\Omega = \{(k, k), (k, c), (c, k), (c, c)\}$ sejam igualmente prováveis, onde k representa cara e c representa coroa, qual é a probabilidade condicional de que dê cara em ambas as jogadas, dado que
    (a) dê cara na primeira jogada?
    (b) dê cara em pelo menos uma das jogadas?

13. Celina está indecisa quanto a fazer uma disciplina de francês ou de química. Ela estima que sua probabilidade de conseguir um conceito A seria de 112 em uma disciplina de francês e de 213 em uma disciplina de química. Se Celina decide basear a sua escolha no lançamento de uma moeda honesta, qual é a probabilidade de que ela obtenha um A em química?

Exemplos

12. Uma moeda é jogada duas vezes. Supondo que todos os quatros pontos no espaço amostral $\Omega = \{(k,k),(k,c),(c,k),(c,c)\}$ sejam igualmente prováveis, onde k representa cara e c representa coroa, qual é a probabilidade condicional de que dê cara em ambas as jogadas, dado que
    (a) dê cara na primeira jogada?
    (b) dê cara em pelo menos uma das jogadas?

13. Celina está indecisa quanto a fazer uma disciplina de francês ou de química. Ela estima que sua probabilidade de conseguir um conceito A seria de 112 em uma disciplina de francês e de 213 em uma disciplina de química. Se Celina decide basear a sua escolha no lançamento de uma moeda honesta, qual é a probabilidade de que ela obtenha um A em química?

14. Considere uma urna com 3 bolas brancas e sete botas vermelhas. Duas bolas são retiradas das urnas, umas após a outra sem reposição. Determine o espaço amostral Ω e as probabilidades de cada elemento de Ω.

De forma mais geral temos o seguinte resultado:

Proposição: Regra da multiplicação

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço amostral e $A_1, A_2, \ldots A_n \in F$

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_2 \mid A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

De forma mais geral temos o seguinte resultado:

Proposição: Regra da multiplicação

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço amostral e $A_1, A_2, \ldots A_n \in F$

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_2 \mid A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

No exemplo anterior calcule a probabilidade do evento $B_1 \cap B_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap B_5$ em cinco retiradas de bolas da urna, sem reposição.

Fórmula das Probabilidades Totais

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço amostral e $A, B \in F$ eventos.

$$P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c)$$

Fórmula das Probabilidades Totais

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço amostral e $A, B \in F$ eventos.

$$P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c)$$

15. Uma companhia de seguros acredita que pessoas possam ser divididas em duas classes: aquelas que são propensas a acidentes e aquelas que não são. A estatística da companhia mostra que uma pessoa propensa a acidentes tem probabilidade de 0,4 de sofrer um acidente dentro de um período fixo de 1 ano, enquanto essa probabilidade cai para 0,2 no caso de uma pessoa não propensa a acidentes. Se supomos que 30% da população é propensa a acidentes, qual é a probabilidade de que um segurado sofra um acidente no período de um ano posterior a compra de sua apólice?

Fórmula das Probabilidades Totais

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço amostral e $A, B \in F$ eventos.

$$P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c)$$

15. Uma companhia de seguros acredita que pessoas possam ser divididas em duas classes: aquelas que são propensas a acidentes e aquelas que não são. A estatística da companhia mostra que uma pessoa propensa a acidentes tem probabilidade de 0,4 de sofrer um acidente dentro de um período fixo de 1 ano, enquanto essa probabilidade cai para 0,2 no caso de uma pessoa não propensa a acidentes. Se supomos que 30% da população é propensa a acidentes, qual é a probabilidade de que um segurado sofra um acidente no período de um ano posterior a compra de sua apólice?

    Suponha que um novo segurado sofra um acidente em menos de um ano após a compra da apólice. Qual é a probabilidade de que ele seja propenso a acidentes?

De modo geral

Fórmula das Probabilidades Totais

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço amostral e $B_1, \ldots B_n \in \mathcal{F}$ uma **partição** de Ω (eventos mutuamente exclusivos cuja união é Ω). Para qualquer evento $A \in \mathcal{F}$ vale que

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k) P(B_k)$$

Fórmula de Bayes

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço amostral e $A, B \in \mathcal{F}$ eventos.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(A)P(B \mid A) + P(A^c)P(B \mid A^c)}$$