A. FISHER ①

Lógica matemática (Veja Wikipédia — é razoável!)

Uma frase é uma coleção de palavras que faz sentido.

Uma proposição é uma frase que é uma sentença declarativa; pode assumir 2 valores, verdadeira (V) ou falso (F).

(Veja os exemplos no Wikipédia — Lógica Proposicional).

Dado props. P, Q, R formamos props. mais complexos, utilizando os símbolos $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$), $\forall$, $\exists$. Temos tabelas de verdade que definam o significado destes símbolos:

Tabelas de verdade: ②

P
V
F

P	Q
V	V
V	F
F	V
F	F

indicando as possibilidades para P, e para P e Q.

Definição do ~:

P	~P
V	F
F	V

Def do ∧, ∨:

P	Q	P∧Q	P∨Q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Def do ⇒:

P	Q	P ⇒ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

~~veja~~

Tautologia e Contradição

Caso P, Q são props, e R, S é uma outra props. composto de P, Q então se na tabela de verdade vemos:

P	Q	R	S
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	V	F

então chamamos R uma tautologia e S uma contradição.

Exercícios: ⓐ Mostre, utilizando tabelas de verdade, que:

(1) $\sim(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$

(2) $\sim(P \vee Q) \Leftrightarrow (\sim P \wedge \sim Q)$

Mostre:

(3) $(P \Rightarrow Q) \iff (\sim Q \Rightarrow \sim P)$

"prova por contrapositiva"

(4) $(P \Rightarrow Q) \iff (\sim (P \wedge \sim Q))$

Isto é "prova por contradição",
pois para mostrar $P \Rightarrow Q$,
é equivalente a seguinte: se
P é verdade, aí para mostrar
então Q, assumimos o contrário
$(\sim Q)$ isto é, $(P \wedge \sim Q)$.
Se chegamos numa contradição,
isto é mostramos $(P \wedge \sim Q)$ é
falso, equivalente temos $\sim (P \wedge \sim Q)$ é
verdade, temos $(P \Rightarrow Q)$ é verdade.

Teoria dos Conjuntos:

Um conjunto é uma coleção de objetos. Daí, dado um conjunto A, e dado qualquer objeto x, podemos responder se $x \in A$ (x pertence A, x é um elemento de A) ou não.

Segue-se que dado 2 conjuntos A, B então:

$$(A = B) \Leftrightarrow (\forall x, (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)).$$

Definamos os operações entre conjuntos: $A \cup B$, $A \cap B$, A^c (complemento), $A \subseteq B$ (subconjunto) assim:

$\underline{\underline{A \cup B}}$, $\underline{\underline{A \cap B}}$

$$(x \in A \cup B) \Longleftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$$

$$(x \in A \cap B) \Longleftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B))$$

$\underline{\underline{A \subseteq B}}$: $\Longleftrightarrow$ $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$

Dado um <u>universo</u> X (um conjunto, talvez $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^3$) tal que todos os objetos $x \in X$, definamos $\underline{\underline{A^c}}$:

$$(x \in A^c) \Longleftrightarrow (x \in X \wedge x \notin A)$$

<u>ou</u> : $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$.

Exercício:
Utilize nossa teorema
(pois isto é uma tautologia)

$\sim(P \vee Q) \iff (\sim P \wedge \sim Q)$
$\sim(P \wedge Q) \iff (\sim P \vee \sim Q)$

para provar:

Dado $A, B \subseteq X$ então

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

(os leis do de Morgan)

Exercício: mostre

$$(A \subseteq B) \iff (B^c \subseteq A^c).$$

O Que é uma proposição realmente?

Na lógica matemática, temos que definir isto rigorosamente (isto é, com absoluta precisão); fizemos isto de novo, para cada "universo de discurso", quer dizer para cada teoria matemática.

Exemplo: para a Teoria de Conjuntos, começamos com uma frase "atomico", o mais simples possível: $x \in A$, onde A é um "conjunto" e x um "elemento". (Conjuntos podem ser elementos, e podemos assumir de

fato que cada elemento
é também um conjunto!) (5)
<u>Definamos</u> os símbolos $\cap, \cup, \subseteq$
etcetera utilizando apenas "$x \in A$",
~~mais~~ os símbolos de lógica
$(\Rightarrow, \wedge, \vee, \sim)$ como indicado
acima.

<u>Exemplo:</u> Espaços vetoriais
(Algebra linear). Precisamos
começar com Teoria dos Conjuntos.
Depois <u>definamos</u> um espaço
vetorial para ser um conjunto
de um tipo especial, com as
propriedades dados pelos axiomas.

As axiomas são teoremas.

Nós assumimos que são verdadeiras (pela def. de um espaço vetorial). Daí, utilizando as leis da lógica, construímos provas para outras proposições, as chamadas Teoremas, Lemas, e Proposições da Álgebra Linear.

É importante saber que as Axiomas de uma teoria são coerentes (não se pode chegar numa contradição, isto é, não se pode provar uma contradição). Isto pode ser provado. Tambem precisamos saber isto para os axiomas da Teoria dos Conjuntos, Isto é muito mais dificil (é interessante!), e temos que tomar muito cuidado com a sistema de axiomas.

Tambem (um nivel mais fundamental) temos que desenvolver axiomas para a própria logica e, novamente, notar que eles são coerentes: tambem é muito subtil e interessante!