

# Sumário

## 1 Funções integráveis, 1

- 1.1 Alguns exemplos de funções integráveis e de funções não-integráveis, 1
- 1.2 Funções integráveis, 6

## 2 Função dada por integral, 8

- 2.1 Cálculo de integral de função limitada e descontínua em um número finito de pontos, 8
- 2.2 Função dada por uma integral, 12
- 2.3 Teorema do valor médio para integral, 16
- 2.4 Teorema fundamental do cálculo. Existência de primitivas, 19
- 2.5 Função dada por uma integral: continuidade e derivabilidade, 25

## 3 Mais algumas aplicações da integral. Coordenadas polares, 28

- 3.1 Volume de sólido obtido pela rotação, em torno do eixo  $x$ , de um conjunto  $A$ , 28
- 3.2 Volume de sólido obtido pela rotação, em torno do eixo  $y$ , de um conjunto  $A$ , 33
- 3.3 Volume de um sólido qualquer, 34
- 3.4 Área de superfície de revolução, 36
- 3.5 Área em coordenadas polares, 39
- 3.6 Centro de massa, 48

## 4 Extensões do conceito de integral, 55

- 4.1 Integrais impróprias, 55
- 4.2 Função dada por uma integral imprópria, 60
- 4.3 Integrais impróprias: continuação, 63
- 4.4 Convergência e divergência de integrais impróprias: critério de comparação, 65

## 5 Equações diferenciais lineares de 1ª e 2ª ordens, com coeficientes constantes, 72

- 5.1 Equação diferencial linear, de 1.ª ordem, com coeficiente constante, 72
- 5.2 Equações diferenciais lineares, homogêneas, de 2.ª ordem, com coeficientes constantes, 75
- 5.3 Números complexos, 79
- 5.4 Solução geral da equação homogênea no caso em que as raízes da equação característica são números complexos, 84
- 5.5 Equações diferenciais lineares, não-homogêneas, de 2.ª ordem, com coeficientes constantes, 92

**6 Os espaços  $\mathbb{R}^n$ , 102**

- 6.1 Introdução, 102
- 6.2 O espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ , 102
- 6.3 Produto escalar. Perpendicularismo, 103
- 6.4 Norma de um vetor. Propriedades, 109
- 6.5 Conjunto aberto. Ponto de acumulação, 113

**7 Função de uma variável real a valores em  $\mathbb{R}^n$ . Curvas, 117**

- 7.1 Função de uma variável real a valores em  $\mathbb{R}^2$ , 117
- 7.2 Função de uma variável real a valores em  $\mathbb{R}^3$ , 120
- 7.3 Operações com funções de uma variável real a valores em  $\mathbb{R}^n$ , 122
- 7.4 Limite e continuidade, 124
- 7.5 Derivada, 128
- 7.6 Integral, 137
- 7.7 Comprimento de curva, 140

**8 Funções de várias variáveis reais a valores reais, 148**

- 8.1 Funções de duas variáveis reais a valores reais, 148
- 8.2 Gráfico e curvas de nível, 153
- 8.3 Funções de três variáveis reais a valores reais. Superfícies de nível, 162

**9 Limite e continuidade, 164**

- 9.1 Limite, 164
- 9.2 Continuidade, 170

**10 Derivadas parciais, 174**

- 10.1 Derivadas parciais, 174
- 10.2 Derivadas parciais de funções de três ou mais variáveis reais, 187

**11 Funções diferenciáveis, 190**

- 11.1 Função diferenciável: definição, 190
- 11.2 Uma condição suficiente para diferenciabilidade, 196
- 11.3 Plano tangente e reta normal, 201
- 11.4 Diferencial, 206
- 11.5 O vetor gradiente, 208

**12 Regra da cadeia, 212**

- 12.1 Regra da cadeia, 212
- 12.2 Derivação de funções definidas implicitamente. Teorema das funções implícitas, 227

**13 Gradiente e derivada direcional, 246**

- 13.1 Gradiente de uma função de duas variáveis: interpretação geométrica, 246
- 13.2 Gradiente de função de três variáveis: interpretação geométrica, 253
- 13.3 Derivada direcional, 258
- 13.4 Derivada direcional e gradiente, 263

**14 Derivadas parciais de ordens superiores, 275**

- 14.1 Derivadas parciais de ordens superiores, 275
- 14.2 Aplicações da regra da cadeia envolvendo derivadas parciais de ordens superiores, 279

**15 Teorema do valor médio. Fórmula de Taylor com resto de Lagrange, 289**

- 15.1 Teorema do valor médio, 289
- 15.2 Funções com gradiente nulo, 291
- 15.3 Relação entre funções com mesmo gradiente, 293
- 15.4 Polinômio de Taylor de ordem 1, 299
- 15.5 Polinômio de Taylor de ordem 2, 303
- 15.6 Fórmula de Taylor com resto de Lagrange, 306

**16 Máximos e mínimos, 308**

- 16.1 Pontos de máximo e pontos de mínimo, 308
- 16.2 Condições necessárias para que um ponto interior ao domínio de  $f$  seja um extremante local de  $f$ , 310
- 16.3 Uma condição suficiente para um ponto crítico ser extremante local, 313
- 16.4 Máximos e mínimos sobre conjunto compacto, 318
- 16.5 O método dos multiplicadores de Lagrange para determinação de candidatos a extremantes locais condicionados, 323
- 16.6 Exemplos complementares, 334

**Apêndice Funções de uma variável real a valores complexos, 341**

- A.1 Funções de uma variável real a valores complexos, 341
- A.2 Definição de  $e^{\lambda}$ , com  $\lambda$  complexo, 343
- A.3 Equações diferenciais lineares, homogêneas, de 2.ª ordem, com coeficientes constantes, 350
- A.4 Equações diferenciais lineares, de 3.ª ordem, com coeficientes constantes, 352

**Respostas, Sugestões ou Soluções, 354**

# 1

## FUNÇÕES INTEGRÁVEIS

O objetivo deste capítulo é destacar as funções integráveis que vão interessar ao curso. Este capítulo poderá ser omitido pelo leitor que já tenha estudado o Apêndice 4 do Vol. 1.

### 1.1. ALGUNS EXEMPLOS DE FUNÇÕES INTEGRÁVEIS E DE FUNÇÕES NÃO-INTEGRÁVEIS

Nesta seção, apresentaremos alguns exemplos de funções integráveis e de funções não-integráveis, trabalhando diretamente com a definição de integral de Riemann.

Antes de começar a estudar os exemplos que apresentaremos a seguir, sugerimos ao leitor rever a definição de integral de Riemann apresentada na Seq. 11.3 do Vol. 1.

**EXEMPLO 1.** Prove, pela definição, que a função constante  $f(x) = k$ ,  $x \in [a, b]$ , é integrável em  $[a, b]$  e que  $\int_a^b f(x) dx = k(b - a)$ .

*Solução*

Para toda partição  $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$  de  $[a, b]$  tem-se, independentemente da escolha de  $c_i$  em  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i$  variando de 1 a  $n$ ,

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n k \Delta x_i = k \sum_{i=1}^n \Delta x_i = k(b - a).$$

Segue que dado  $\epsilon > 0$  e tomando-se um  $\delta > 0$  qualquer tem-se, independentemente da escolha dos  $c_i$

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - k(b - a) \right| = 0 < \epsilon$$

para toda partição de  $[a, b]$ , com  $\max \Delta x_i < \delta$ . Logo,

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = k(b-a)$$

ou seja,  $f$  é integrável em  $[a, b]$  e

$$\int_a^b f(x) dx = k(b-a).$$

Antes de passarmos ao próximo exemplo faremos a seguinte observação.

**Observação.** De acordo com a definição de integral, sendo  $f$  integrável em  $[a, b]$ , dado  $\epsilon > 0$  existirá  $\delta > 0$  que só depende de  $\epsilon$ , mas não da escolha dos  $c_i$ , tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - \int_a^b f(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ , com  $\max \Delta x_i < \delta$ . Segue que se  $P$  for uma partição de  $[a, b]$ , com  $\max \Delta x_i < \delta$ , e se  $c_i$  e  $\bar{c}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) forem escolhidos arbitrariamente em  $[x_{i-1}, x_i]$ , teremos

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - \int_a^b f(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i - \int_a^b f(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

e, portanto,

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i \right| < \epsilon$$

para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ , com  $\max \Delta x_i < \delta$ , independentemente da escolha de  $c_i$  e  $\bar{c}_i$ . Deste modo, se  $f$  for integrável em  $[a, b]$ , duas somas de Riemann quaisquer relativas a uma mesma partição  $P$ , com  $\max \Delta x_i$  suficientemente pequeno, devem diferir muito pouco uma da outra, e o módulo da diferença entre elas deverá ser tanto menor quanto menor for  $\max \Delta x_i$ .

**EXEMPLO 2.** (Exemplo de função não-integrável). Prove que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

não é integrável em  $[0, 1]$ .

**Solução**

Seja  $P: 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = 1$  uma partição qualquer de  $[0, 1]$ . Se  $c_1, c_2, \dots, c_n$  forem racionais

$$\textcircled{1} \quad \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 1.$$

Se  $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n$  forem irracionais

$$\textcircled{2} \quad \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i = 0.$$

De  $\textcircled{1}$  e  $\textcircled{2}$  e da observação anterior segue que  $f$  não é integrável em  $[0, 1]$ .

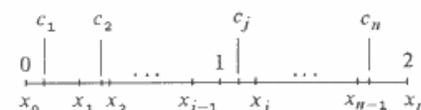
**EXEMPLO 3.** Seja  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Prove que  $f$  é integrável em  $[0, 2]$  e que  $\int_0^2 f(x) dx = 0$ .

**Solução**

Seja  $P$  uma partição qualquer de  $[0, 2]$  e suponhamos que  $1 \in [x_{j-1}, x_j]$ .



Se  $1 \in ]x_{j-1}, x_j[$ ,

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \begin{cases} 0 & \text{se } c_j \neq 1 \\ \Delta x_j & \text{se } c_j = 1. \end{cases}$$

Se  $1 = x_{j-1}$  e  $c_{j-1} = c_j = 1$ ,  $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \Delta x_{j-1} + \Delta x_j$ .

Fica a seu cargo concluir que, em qualquer caso

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - 0 \right| \leq 2 \max \Delta x_i$$

independentemente da escolha dos  $c_i$ . Portanto,

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = 0 = \int_0^2 f(x) dx.$$

Observe que a função do exemplo anterior *não é contínua* em  $[0, 2]$ , entretanto, é integrável em  $[0, 2]$ .

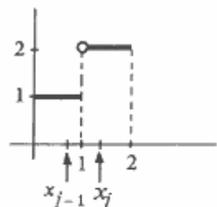
**EXEMPLO 4.** Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Prove que  $f$  é integrável em  $[0, 2]$  e que  $\int_0^2 f(x) dx = 3$ .

*Solução*

Consideremos a partição  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{j-1} < x_j < \dots < x_n = 2$  e suponhamos que  $1 \in [x_{j-1}, x_j]$ .



Temos:

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \begin{cases} x_{j-1} + (x_j - x_{j-1}) + 2(2 - x_j) & \text{se } x_{j-1} \leq c_j \leq 1 \\ x_{j-1} + 2(x_j - x_{j-1}) + 2(2 - x_j) & \text{se } 1 < c_j \leq x_j \end{cases}$$

Segue que

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - 3 = \begin{cases} 1 - x_j & \text{se } x_{j-1} \leq c_j \leq 1 \\ 1 - x_{j-1} & \text{se } 1 < c_j \leq x_j \end{cases}$$

(Interprete geometricamente.) Logo,

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - 3 \right| \leq \max \Delta x_i$$

independentemente da escolha dos  $c_i$ . Portanto,

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = 3 = \int_0^2 f(x) dx.$$

**EXEMPLO 5.** Prove que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

*não é integrável* em  $[0, 1]$ .

*Solução*

Seja  $P$  uma partição qualquer de  $[0, 1]$  e  $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$  uma soma de Riemann de  $f$  relativa a esta partição. Tomemos  $c_1$  em  $]0, x_1[$ . Se mantivermos fixos  $c_2, c_3, \dots, c_n$ , teremos

$$\lim_{c_1 \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = +\infty. \text{ (Por quê?)}$$

Logo, *não existe* número  $L$  tal que

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = L$$

ou seja,  $f$  *não é integrável* em  $[0, 1]$ .

Observe que a função do exemplo anterior *não é limitada* em  $[0, 1]$ . (Lembramos que  $f$  *limitada* em  $[a, b]$  significa que existem reais  $\alpha$  e  $\beta$  tais que, para todo  $x \in [a, b]$ ,  $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ .)

O próximo teorema, cuja demonstração encontra-se no Apêndice 4 do Vol. 1, conta-nos que uma *condição necessária* para  $f$  ser integrável em  $[a, b]$  é que  $f$  seja *limitada* neste intervalo. Tal condição *não é suficiente*, pois,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é *limitada* em  $[0, 1]$ , mas *não é integrável* neste intervalo.

**Teorema.** Se  $f$  for integrável em  $[a, b]$ , então  $f$  será limitada em  $[a, b]$ .

**Exercícios 1.1**

1. Seja  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\} \\ 1 & \text{se } x \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\} \end{cases}$$

Prove que  $f$  é integrável em  $[0, 1]$  e que

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

2. Seja  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

a) Verifique que se os  $c_i$  forem racionais  $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$  tende a  $\frac{1}{2}$ , quando  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ .

b) Prove que  $f$  não é integrável em  $[0, 1]$ .

3. Calcule, caso exista, e justifique sua resposta.

a)  $\int_0^2 f(x) dx$  onde  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 4 & \text{se } x = 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$

b)  $\int_0^3 f(x) dx$  onde  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 3 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

c)  $\int_0^1 f(x) dx$  onde  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

d)  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  onde  $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

## 1.2. FUNÇÕES INTEGRÁVEIS

Os teoremas que enunciaremos a seguir, e cujas demonstrações encontram-se no Apêndice 4 do Vol. 1, destacam as funções integráveis que vão interessar ao curso.

O teorema 1 conta-nos que toda função contínua em  $[a, b]$  é integrável em  $[a, b]$  e, o teorema 2, que toda função limitada em  $[a, b]$  e descontínua em apenas um número finito de pontos de  $[a, b]$  é integrável em  $[a, b]$ .

**Teorema 1.** Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$ , então  $f$  será integrável em  $[a, b]$ .

**Teorema 2.** Se  $f$  for limitada em  $[a, b]$  e descontínua em apenas um número finito de pontos de  $[a, b]$ , então  $f$  será integrável em  $[a, b]$ .

**EXEMPLO 1.**  $f(x) = \cos 3x$  é contínua em  $[-1, 5]$ , logo integrável neste intervalo.

**EXEMPLO 2.** Verifique se

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 2 & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

é integrável em  $[-1, 3]$ .

**Solução**

$f$  é limitada em  $[-1, 3]$ , pois, para todo  $x$  em  $[-1, 3]$ ,  $0 \leq f(x) \leq 2$ ; além disso,  $f$  é descontínua apenas em  $x = 1$ . Pelo teorema 2,  $f$  é integrável em  $[-1, 3]$ .

**EXEMPLO 3.** Verifique se

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 2 & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

é integrável em  $[-1, 3]$ .

**Solução**

Não, pois  $f$  não é limitada em  $[-1, 3]$ .

**Exercícios 1.2**

1. A função dada é integrável? Justifique.

a)  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ,  $-1 \leq x \leq 2$

b)  $f(x) = e^{-x^2}$ ,  $0 \leq x \leq 4$

c)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ \frac{2}{x} & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

d)  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

e)  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{\sin x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

f)  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} & \text{se } 0 < x \leq \frac{2}{\pi} \end{cases}$

g)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \\ 2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

h)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } |x| \leq 1, x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

# 2

## FUNÇÃO DADA POR INTEGRAL

### 2.1. CÁLCULO DE INTEGRAL DE FUNÇÃO LIMITADA E DESCONTÍNUA EM UM NÚMERO FINITO DE PONTOS

O teorema que vamos enunciar e demonstrar a seguir conta-nos que se  $f$  e  $g$  forem integráveis em  $[a, b]$  e se  $f(x)$  for diferente de  $g(x)$  em apenas um número finito de pontos, então suas integrais serão iguais.

**Teorema.** Sejam  $f$  e  $g$  integráveis em  $[a, b]$  e tais que  $f(x) \neq g(x)$  em apenas um número finito de pontos. Então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

*Demonstração*

$h(x) = g(x) - f(x)$  é integrável em  $[a, b]$  e  $h(x) = 0$ , exceto em um número finito de pontos. Como

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n h(c_i) \Delta x_i$$

independe da escolha dos  $c_i$ , resulta que tal limite é zero, pois, para cada partição  $P$  de  $[a, b]$ , podemos escolher  $c_i$  em  $[x_{i-1}, x_i]$   $i = 1, 2, \dots, n$  de modo que  $h(c_i) = 0$ . Assim

$$\int_a^b h(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n h(c_i) \Delta x_i = 0$$

ou seja,

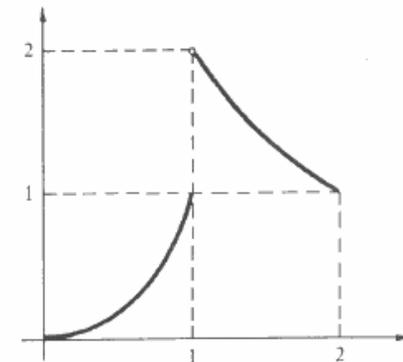
$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx = 0$$

e, portanto,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx. \quad \blacksquare$$

**EXEMPLO 1.** Calcule  $\int_0^2 f(x) dx$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



*Solução*

$f$  é integrável em  $[0, 2]$ , pois é limitada e descontínua em apenas  $x = 1$ . Temos

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$$

Em  $[0, 1]$ ,  $f(x) = x^2$ ; logo,

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Em  $[1, 2]$ ,  $f(x)$  difere de  $\frac{2}{x}$  em apenas  $x = 1$ ; daí

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{2}{x} dx = [2 \ln x]_1^2 = 2 \ln 2.$$

Portanto,

$$\int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{3} + 2 \ln 2.$$

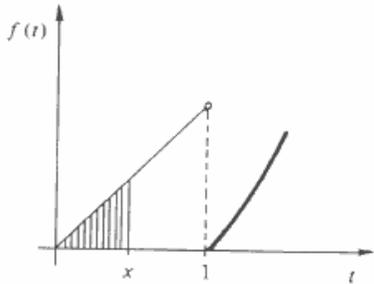
**EXEMPLO 2.** Calcule  $\int_0^x f(t) dt$ ,  $x \geq 0$ , onde

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ t^2 - 1 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

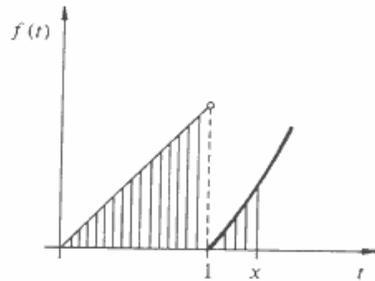
## Solução

Para todo  $x \geq 0$ ,  $f$  é integrável em  $[0, x]$ , pois, neste intervalo,  $f$  é limitada e descontínua no máximo em um ponto. Temos

$$\int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \int_0^x t dt & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \int_0^1 t dt + \int_1^x (t^2 - 1) dt & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x t dt$$



$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^1 t dt + \int_1^x (t^2 - 1) dt$$

Como

$$\int_0^x t dt = \frac{x^2}{2} \text{ e } \int_0^x (t^2 - 1) dt = \left[ \frac{t^3}{3} - t \right]_1^x = \frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3}$$

segue que

$$\int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

ou seja,

$$\int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^3}{3} - x + \frac{7}{6} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_p$ ,  $p$  pontos do intervalo  $[a, b]$  e seja  $f$  uma função definida em todos os pontos de  $[a, b]$ , exceto em  $x_1, x_2, \dots, x_p$ . Suponhamos  $f$  limitada e contínua em todos os pontos de seu domínio. Pela definição de integral, não tem sentido falar na integral de  $f$  em  $[a, b]$ , pois  $f$  não está definida em todos os pontos de  $[a, b]$ . Entretanto, a função  $g$  definida em  $[a, b]$  e dada por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_p\} \\ m_i & \text{se } x = x_i, i = 1, 2, \dots, p \end{cases}$$

onde  $m_1, m_2, \dots, m_p$  são números escolhidos arbitrariamente, é integrável em  $[a, b]$  e o valor da integral independe da escolha dos  $m_i$ . Nada mais natural, então, do que definir a integral de  $f$  em  $[a, b]$  por

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

**EXEMPLO 3.** Calcule  $\int_0^2 f(x) dx$  onde

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Solução

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{4} + \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{3}{4}.$$

**EXEMPLO 4.**  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  não existe no sentido de Riemann, pois  $\frac{1}{x}$  não é limitada em  $]0, 1[$ .

Exercícios 2.1

1. Calcule

a)  $\int_0^2 f(x) dx$  onde  $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

b)  $\int_{-1}^3 f(x) dx$  onde  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

$$c) \int_{-1}^3 f(x) dx \text{ onde } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2} & \text{se } x \neq 1 \\ 5 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$d) \int_{-2}^2 g(u) du \text{ onde } g(u) = \begin{cases} \frac{1}{u^2} & \text{se } |u| \geq 1 \\ u & \text{se } |u| < 1 \end{cases}$$

2. Calcule

$$a) \int_0^x f(t) dt \text{ onde } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

$$b) \int_{-1}^x f(t) dt \text{ onde } f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } -1 \leq t \leq 1 \\ 2 & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

$$c) \int_0^x f(t) dt \text{ onde } f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } -1 \leq t \leq 1 \\ 2 & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

$$d) \int_0^x f(t) dt \text{ onde } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 2 & \text{se } 1 \leq t < 2 \\ 3 & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$

## 2.2. FUNÇÃO DADA POR UMA INTEGRAL

Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $I$  e integrável em todo intervalo  $[c, d]$  contido em  $I$ . Seja  $a$  um número fixo pertencente a  $I$ . Para todo  $x$  em  $I$ , a integral  $\int_a^x f(t) dt$  existe; podemos, então, considerar a função  $F$  definida em  $I$  e dada por

$$\textcircled{1} \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Nosso objetivo é estudar a  $F$  com relação à continuidade e derivabilidade. Na Seção 2.4, estudaremos  $\textcircled{1}$  supondo  $f$  contínua em  $I$ ; provaremos que, neste caso,  $F$  é derivável em  $I$  e que  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x \in I$ . Na Seção 2.5, estudaremos  $\textcircled{1}$  supondo apenas que  $f$  seja integrável em todo intervalo  $[c, d] \subset I$  e, portanto, não necessariamente contínua em  $I$ . Provaremos, então, que mesmo neste caso a  $F$  será contínua em  $I$ ; provaremos, ainda, que  $F$  será derivável em todos os pontos em que  $f$  for contínua e se  $p$  for um ponto de continuidade de  $f$ , então  $F'(p) = f(p)$ .

Observe que, tendo em vista o que dissemos acima, o gráfico de  $F$  não pode apresentar salto. Portanto, se você estiver esboçando o gráfico de uma função dada por uma integral e se o seu gráfico apresentar salto, apague e comece de novo!

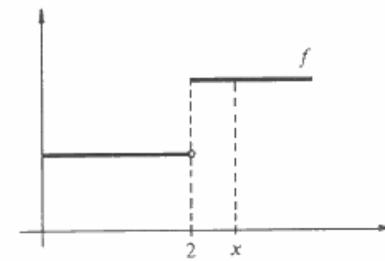
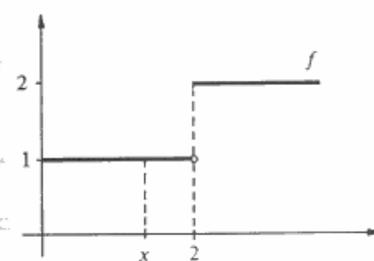
**EXEMPLO 1.** Esboce o gráfico de  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  onde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < 2 \\ 2 & \text{se } t \geq 2. \end{cases}$$

*Solução*

$F$  está definida para todo  $x \geq 0$ . Temos

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x 1 dt & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \int_0^2 1 dt + \int_2^x 2 dt & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

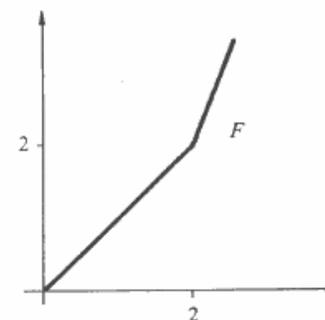


$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x 1 dt \text{ se } 0 \leq x \leq 2$$

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^2 1 dt + \int_2^x 2 dt \text{ se } x > 2$$

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x - 2 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Observe que  $F$  é contínua e que  $F'(x) = f(x)$  em todo  $x \neq 2$ .



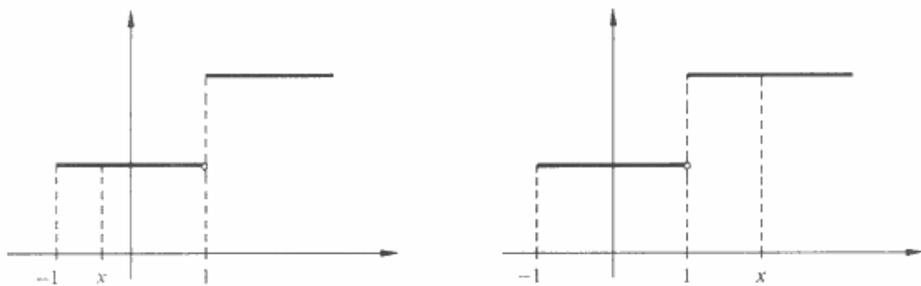
**EXEMPLO 2.** Esboce o gráfico da função

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{onde} \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -1 \leq t < 1 \\ 2 & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$$

*Solução*

O domínio de  $F$  é o intervalo  $[-1, +\infty[$ . Temos:

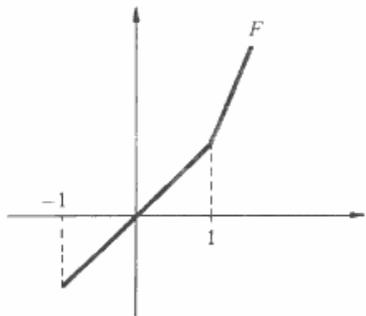
$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \int_0^x 1 dt & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \int_0^1 1 dt + \int_1^x 2 dt & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x 1 dt \quad \text{se } -1 \leq x \leq 1$$

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^1 1 dt + \int_1^x 2 dt \quad \text{se } x > 1$$

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 + [2t]_1^x & \text{se } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} x & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



**EXEMPLO 3.** Considere a função  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$  onde  $f(t) = \frac{1}{t}$ ,  $t \neq 0$ .

- a) Determine o domínio de  $F$ .  
b) Verifique que  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x > 0$ .

*Solução*

a) Se  $x > 0$ ,  $f$  será contínua no intervalo de extremidades 1 e  $x$ ; logo,  $\int_1^x f(t) dt$  existe para todo  $x > 0$ . Se  $x \leq 0$ , a integral  $\int_1^x f(t) dt$  não existe, pois  $f$  não é limitada em  $]0, 1[$ . O domínio de  $F$  é, então, o intervalo  $]0, +\infty[$ .

b)  $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ ,  $x > 0$ ; assim

$$F(x) = [\ln t]_1^x = \ln x.$$

Segue que  $F'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$ ,  $x > 0$ .

### Exercícios 2.2

1. Esboce o gráfico da função  $F$  dada por

a)  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  onde  $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{t} & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$

b)  $F(x) = \int_1^x t dt$

c)  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$  onde  $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } t \leq 0 \\ 0 & \text{se } t > 0 \end{cases}$

d)  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$  onde  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t > 1 \end{cases}$

e)  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  onde  $f(t) = \begin{cases} t & \text{se } -2 \leq t \leq 0 \\ e^{-t} & \text{se } t > 0 \end{cases}$

f)  $F(x) = \int_{-5}^x f(t) dt$  onde  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| \geq 1 \\ t^2 & \text{se } |t| < 1 \end{cases}$

g)  $F(x) = \int_0^x e^{-|t|} dt$

2. Seja  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  onde  $f(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \neq 1 \\ 2 & \text{se } t = 1 \end{cases}$

a) Esboce o gráfico de  $F$ .

b) Calcule  $F'(x)$ .

3. Determine o domínio da função  $F$

a)  $F(x) = \int_2^x \frac{1}{t-1} dt$

b)  $F(x) = \int_0^x \frac{1}{t-1} dt$

c)  $F(x) = \int_0^x \frac{t}{t^2-4} dt$

d)  $F(x) = \int_3^x \frac{t}{t^2-4} dt$

4. Seja  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  onde  $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } t < 1 \\ \frac{2}{t} & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$

a) Verifique que  $F'(x) = f(x)$  em todo  $x$  em que  $f$  for contínua.

b)  $F$  é derivável em  $x = 1$ ?

5. Seja  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  onde  $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \neq 1 \\ 2 & \text{se } t = 1 \end{cases}$

a) Verifique que  $F'(x) = f(x)$  em todo  $x$  em que  $f$  for contínua.

b)  $F$  é derivável em  $x = 1$ ? Em caso afirmativo, calcule  $F'(1)$  e compare com  $f(1)$ .

6. Seja  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  onde  $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } t < 1 \\ \frac{1}{t} & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$

Verifique que  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x$ .

### 2.3. TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAL

No próximo parágrafo, vamos enunciar e demonstrar o 2.º teorema fundamental do cálculo. Para tal, vamos precisar do *teorema do valor médio* ou *teorema da média para integral*.

**Teorema (do valor médio para integral).** Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$ , então existirá pelo menos um  $c$  em  $[a, b]$  tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

#### Demonstração

Como  $f$  é contínua em  $[a, b]$ , pelo teorema de Weierstrass,  $f$  assume em  $[a, b]$  valor máximo e valor mínimo. Sejam  $M$  o valor máximo e  $m$  o valor mínimo de  $f$  em  $[a, b]$ . Assim, para todo  $x$  em  $[a, b]$ ,

$$m \leq f(x) \leq M$$

e daí

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

ou seja,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

e, portanto,

$$m \leq \left( \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \right) \leq M$$

Deste modo,  $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$  é um número entre o menor e o maior valor de  $f$  em  $[a, b]$ ; pelo teorema do valor intermediário, existe  $c$  em  $[a, b]$  tal que

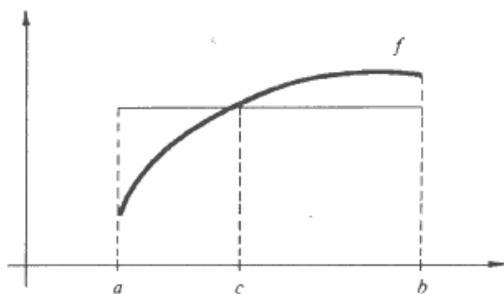
$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a). \quad \blacksquare$$

#### Interpretação Geométrica do Teorema do Valor Médio para Integral

Suponhamos  $f$  contínua em  $[a, b]$  e  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$ . Assim,  $\int_a^b f(x) dx$  é a área do conjunto  $A$  limitado pelas retas  $x = a$ ,  $x = b$ , pelo eixo  $Ox$  e pelo gráfico de  $y = f(x)$ . O teorema do valor médio conta-nos, então, que existe  $c$  em  $[a, b]$  tal que a área do retângulo de base  $b-a$  e altura  $f(c)$  é igual à área de  $A$ .



Antes de encerrar a seção, vamos destacar uma outra propriedade que será utilizada na demonstração do 2.º teorema fundamental do cálculo.

Seja  $f$  integrável em  $[a, b]$  e seja  $c \in ]a, b[$ . Vimos na Seç. 11.4 (Vol. 1) que se  $f$  for integrável em  $[a, c]$  e em  $[c, b]$ , então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Pois bem, na próxima seção, vamos precisar da seguinte propriedade, cuja demonstração deixamos a seu cargo: "Se  $f$  for integrável em todo intervalo fechado contido em  $I$ , então

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx = \int_\alpha^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^\beta f(x) dx$$

quaisquer que sejam  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  no intervalo  $I$ ."

Exercícios 2.3

1. Suponha  $f(x) > 0$  e contínua em  $[a, b]$ . Prove que  $\int_a^b f(x) dx > 0$ .
2. Suponha  $f(x) \geq 0$  e contínua em  $[a, b]$ . Prove que se  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , então  $f(x) = 0$ , para todo  $x \in [a, b]$ .
3. Suponha  $f(x) \geq 0$  e integrável em  $[a, b]$ . A afirmação

$$\left[ \int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ em } [a, b] \right]$$

é falsa ou verdadeira? Justifique.

4. Suponha  $f$  contínua em  $[a, b]$ . Prove

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ em } [a, b].$$

5. Sejam  $f$  e  $g$  contínuas em  $[a, b]$ , com  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$ . Prove que existe  $\theta \in [a, b]$  tal que

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(\theta) \int_a^b f(x) dx.$$

## 2.4. TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO. EXISTÊNCIA DE PRIMITIVAS

Seja  $f$  contínua no intervalo  $I$  e seja  $a$  um ponto em  $I$ . Como estamos supondo  $f$  contínua em  $I$ , para todo  $x$  em  $I$ , a integral  $\int_a^x f(t) dt$  existe; podemos, então, considerar a função  $F$  definida em  $I$  e dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Provaremos a seguir que a  $F$  acima é uma primitiva de  $f$  em  $I$ , isto é,  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x$  em  $I$ . Não que segue, referir-nos-emos a este resultado como 2.º teorema fundamental do cálculo ou, simplesmente, teorema fundamental do cálculo.

**Teorema (fundamental do cálculo).** Seja  $f$  definida e contínua no intervalo  $I$  e seja  $a \in I$ . Nestas condições, a função  $F$  dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in I$$

é uma primitiva de  $f$  em  $I$ , isto é,  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x$  em  $I$ .

Demonstração

Precisamos provar que, para todo  $x$  em  $I$ ,

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Temos

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h}$$

Pelo teorema do valor médio para integrais existe  $c$  entre  $x$  e  $x+h$  tal que

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = f(c)h.$$

Assim,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c)$$

Tendo em vista a continuidade de  $f$  em  $I$  e observando que  $c$  tende a  $x$  quando  $h$  tende a zero resulta

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x). \quad \blacksquare$$

Observe que o teorema fundamental do cálculo garante-nos que toda função contínua em um intervalo admite, neste intervalo, uma primitiva e, além disso, exibe-nos, ainda, uma primitiva.

**EXEMPLO 1.** Seja  $F(x) = \int_1^x \frac{3}{1+t^4} dt$ . Calcule  $F'(x)$ .

*Solução*

Observe que o domínio de  $F$  é  $\mathbb{R}$ , pois,  $f(t) = \frac{3}{1+t^4}$  é contínua em  $\mathbb{R}$ . Pelo teorema fundamental do cálculo

$$F'(x) = \left[ \int_1^x f(t) dt \right]' = f(x)$$

ou seja,

$$F'(x) = \frac{3}{1+x^4}.$$

Na notação de Leibniz

$$\frac{d}{dx} \left( \int_1^x \frac{3}{1+t^4} dt \right) = \frac{3}{1+x^4}.$$

**EXEMPLO 2.** Calcule  $\frac{d}{du} \left( \int_0^u \sin t^2 dt \right)$ .

*Solução*

Seja  $f(t) = \sin t^2$ . Temos:

$$\frac{d}{du} \left( \int_0^u f(t) dt \right) = f(u)$$

ou seja,

$$\frac{d}{du} \left( \int_0^u \sin t^2 dt \right) = \sin u^2.$$

**EXEMPLO 3.** Calcule  $G'(x) = \int_1^{x^2} \frac{3}{1+t^4} dt$ .

*Solução*

$$G(x) = F(x^2) \text{ onde } F(x) = \int_1^x \frac{3}{1+t^4} dt.$$

De

$$G'(x) = F'(x^2) 2x \text{ e } F'(x) = \frac{3}{1+x^4}$$

resulta

$$G'(x) = \frac{6x}{1+x^8}.$$

Podemos, também, calcular  $G'(x)$  da seguinte forma:

$$G(x) = \int_1^u \frac{3}{1+t^4} dt \text{ onde } u = x^2;$$

$$\frac{dG}{dx} = \frac{d}{du} \left( \int_1^u \frac{3}{1+t^4} dt \right) \frac{du}{dx} = \frac{3}{1+u^4} \cdot 2x.$$

Portanto,

$$G'(x) = \frac{6x}{1+x^8}.$$

**EXEMPLO 4.** Calcule  $H'(x)$  sendo  $H(x) = \int_{\sin x}^{x^2} \frac{3}{1+t^4} dt$ .

*Solução*

Como  $f(t) = \frac{3}{1+t^4}$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , tomando-se um número real qualquer, por exemplo 1, tem-se, para todo  $x$ ,

$$H(x) = \int_{\sin x}^1 \frac{3}{1+t^4} dt + \int_1^{x^2} \frac{3}{1+t^4} dt$$

ou

$$H(x) = \int_1^{x^3} \frac{3}{1+t^4} dt - \int_1^{\operatorname{sen} x} \frac{3}{1+t^4} dt;$$

daí

$$H'(x) = \frac{3}{1+(x^3)^4} (x^3)' - \frac{3}{1+(\operatorname{sen} x)^4} (\operatorname{sen} x)'$$

ou seja,

$$H'(x) = \frac{9x^2}{1+x^{12}} - \frac{3 \cos x}{1+\operatorname{sen}^4 x}.$$

Uma outra forma para se obter  $H'(x)$  é a seguinte: como  $f(t) = \frac{3}{1+t^4}$  é contínua em  $\mathbb{R}$ ,  $f$  admite uma primitiva  $F$ ; assim

$$H(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{x^3} \frac{3}{1+t^4} dt = [F(t)]_{\operatorname{sen} x}^{x^3}$$

ou seja,

$$H(x) = F(x^3) - F(\operatorname{sen} x)$$

daí

$$H'(x) = F'(x^3) 3x^2 - F'(\operatorname{sen} x) \cos x.$$

Como

$$F'(t) = \frac{3}{1+t^4}$$

segue

$$H'(x) = \frac{9x^2}{1+x^{12}} - \frac{3 \cos x}{1+\operatorname{sen}^4 x}.$$

**EXEMPLO 5.** Suponha  $f(t)$  contínua em  $[-r, r]$  ( $r > 0$ ) e considere a função

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in [-r, r].$$

Prove que se  $f$  for uma função par, então  $F$  será ímpar.

**Solução**

A nossa hipótese é de que  $f$  é contínua em  $[-r, r]$  e  $f(t) = f(-t)$  em  $[-r, r]$ . Queremos provar que

$$F(-x) = -F(x) \text{ em } [-r, r].$$

Como  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  e  $f$  é contínua em  $[-r, r]$ , pelo teorema fundamental do cálculo

$$F'(x) = f(x) \text{ em } [-r, r].$$

Temos, também,

$$[F(-x)]' = F'(-x) (-x)' = -F'(-x)$$

ou seja,

$$[F(-x)]' = -f(-x), \text{ pois } F' = f.$$

Segue que, para todo  $x$  em  $[-r, r]$ ,

$$[F(x) + F(-x)]' = F'(x) - F'(-x) = f(x) - f(-x)$$

ou seja,

$$[F(x) + F(-x)]' = 0.$$

Logo, existe uma constante  $k$  tal que, para todo  $x$  em  $[-r, r]$ ,  $F(x) + F(-x) = k$ . Mas

$F(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$  e, assim,  $k = F(0) + F(-0) = 0$ . Portanto,  $F(x) + F(-x) = 0$  ou  $F(-x) = -F(x)$ , para todo  $x \in [-r, r]$ .

**Exercícios 2.4**1. Calcule  $F'(x)$  sendo  $F$  dada por

a)  $F(x) = \int_{-2}^x \frac{3t}{1+t^6} dt$

b)  $F(x) = \int_2^x \operatorname{sen} t^2 dt$

c)  $F(x) = \int_x^2 \cos t^4 dt$

d)  $F(x) = \int_1^{x^2} \operatorname{sen} t^2 dt$

e)  $F(x) = \int_0^{2x} \cos t^2 dt$

f)  $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{5+t^4} dt$

g)  $F(x) = x^3 \int_1^x e^{-x^2} ds$

h)  $F(x) = \int_0^x x^2 e^{-x^2} ds$

i)  $F(x) = \int_x^1 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t^3 dt$       j)  $F(x) = \int_0^x (x-t) e^{-t^2} dt$

2. Suponha  $f(t) \geq 0$  e contínua em  $\mathbb{R}$ . Estude a função  $F(x) = \int_1^{x^3 + 3x^2} f(t) dt$  com relação a crescimento e decrescimento.

3. Determine uma função  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , contínua, tal que para todo  $x$

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x t \varphi(t) dt.$$

4. Suponha  $f$  contínua em  $[-r, r]$  ( $r > 0$ ) e considere a função

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Prove que se  $f$  for uma função ímpar, então  $F$  será uma função par.

5. Suponha  $f$  contínua em  $\mathbb{R}$  e periódica com período  $p$ , isto é,  $f(x) = f(x + p)$  para todo  $x$ . Prove que a função

$$g(x) = \int_x^{x+p} f(t) dt, x \in \mathbb{R}$$

é constante. Interprete graficamente.

6. Calcule  $\int_0^1 F(x) dx$  onde  $F(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$ . (Sugestão: integre por partes.)

7. Calcule  $\int_0^\pi G(x) dx$  onde  $G(x) = \int_\pi^x \operatorname{sen} t^2 dt$ .

8. As funções *coseno hiperbólico* e *seno hiperbólico*, que se indicam, respectivamente, por  $ch$  e  $sh$ , são dadas por

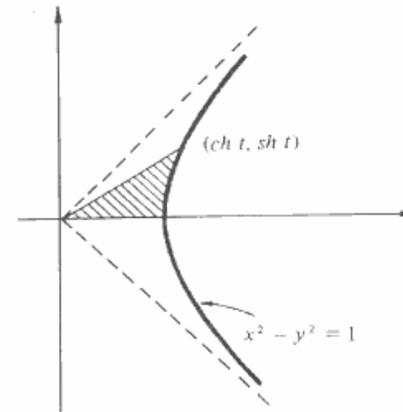
$$ch t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad e \quad sh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

a) Verifique que para todo  $t$ ,  $(ch t)' = sh t$ .

b) Verifique que, para todo  $t$ , o ponto  $(ch t, sh t)$  pertence ao ramo da hipérbole  $x^2 - y^2 = 1$  contido no semiplano  $x > 0$ .

c) Sendo  $F(t)$  a área da região hachurada mostre que

$$F(t) = \frac{1}{2} ch t sh t - \int_t^{cht} \sqrt{x^2 - 1} dx \text{ para } t \geq 0. \text{ Calcule } F'(t).$$



d) Prove que  $F(t) = \frac{t}{2}$ ,  $t \geq 0$ .

e) Qual é, então, a interpretação para o parâmetro  $t$  que ocorre em  $ch t$ ? Compare com o parâmetro  $t$  que ocorre em  $\cos t$ .

## 2.5. FUNÇÃO DADA POR UMA INTEGRAL: CONTINUIDADE E DERIVABILIDADE

Nesta seção vamos estudar, com relação a continuidade e derivabilidade, a função

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in I,$$

onde  $f$  é suposta integrável em todo intervalo fechado contido em  $I$  e, portanto, não necessariamente contínua em  $I$ .

**Teorema 1.** Seja  $f$  integrável em qualquer intervalo fechado contido no intervalo  $I$  e seja  $a$  um ponto fixo de  $I$ . Então a função dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in I,$$

é contínua em  $I$ .

**Demonstração**

Seja  $p \in I$ ; existe um intervalo  $[\alpha, \beta] \subset I$  tal que  $a, p \in [\alpha, \beta]$  e se  $p$  não for extremo de  $I$ , podemos tomar  $\alpha$  e  $\beta$  de modo que  $p \in ]\alpha, \beta[$ . Como  $f$  é limitada em  $[\alpha, \beta]$ , pois é integrável neste intervalo, existe  $M > 0$  tal que  $|f(t)| \leq M$  em  $[\alpha, \beta]$ . Para todo  $x$  em  $[\alpha, \beta]$  temos

$$F(x) - F(p) = \int_a^x f(t) dt - \int_a^p f(t) dt = \int_p^x f(t) dt.$$

De  $-M \leq f(t) \leq M$ , para todo  $t \in [\alpha, \beta]$ , segue que, para todo  $x \in [\alpha, \beta]$ ,

$$-M(x-p) \leq \int_p^x f(t) dt \leq M(x-p), \text{ se } x \geq p,$$

e

$$-M(x-p) \leq \int_x^p f(t) dt \leq M(p-x), \text{ se } x \leq p.$$

Pelo teorema do confronto,

$$\lim_{x \rightarrow p} F(x) = F(p). \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.** Sejam  $f$  e  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  como no teorema 1. Nestas condições, se  $f$  for contínua em  $p \in I$ , então  $F$  será derivável em  $p$  e  $F'(p) = f(p)$ .

*Demonstração*

Seja  $p \in I$  e suponhamos que  $p$  não seja extremo de  $I$ . Vamos provar que se  $f$  for contínua em  $p$  então

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{F(x) - F(p) - f(p)(x-p)}{x-p} = 0$$

que equivale a

$$F'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{F(x) - F(p)}{x-p} = f(p).$$

Temos

$$\textcircled{1} \quad F(x) - F(p) - f(p)(x-p) = \int_p^x f(t) dt - \int_p^x f(p) dt = \int_p^x [f(t) - f(p)] dt.$$

Sendo  $f$  contínua em  $p$ , dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$ , com  $]p - \delta, p + \delta[ \subset I$ , tal que

$$p - \delta < t < p + \delta \Rightarrow -\epsilon < f(t) - f(p) < \epsilon;$$

daí, para todo  $x$  em  $]p - \delta, p + \delta[$ ,

$$\textcircled{2} \quad -\epsilon |x-p| < \int_p^x [f(t) - f(p)] dt < \epsilon |x-p|.$$

De  $\textcircled{1}$  e  $\textcircled{2}$  resulta

$$0 < |x-p| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(p) - f(p)(x-p)}{x-p} \right| < \epsilon$$

e, portanto,

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{F(x) - F(p) - f(p)(x-p)}{x-p} = 0.$$

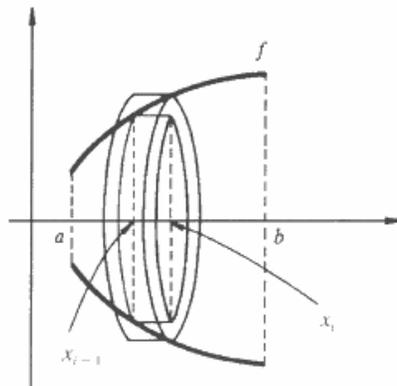
Analisar o caso em que  $p$  é extremo de  $I$ .  $\blacksquare$

# 3

## MAIS ALGUMAS APLICAÇÕES DA INTEGRAL. COORDENADAS POLARES

### 3.1. VOLUME DE SÓLIDO OBTIDO PELA ROTAÇÃO, EM TORNO DO EIXO $x$ , DE UM CONJUNTO $A$

Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$ , com  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$ ; seja  $B$  o conjunto obtido pela rotação, em torno do eixo  $x$ , do conjunto  $A$  do plano limitado pelas retas  $x = a$ ,  $x = b$ , pelo eixo  $x$  e pelo gráfico de  $y = f(x)$ . Estamos interessados em definir o volume  $V$  de  $B$ .



Seja  $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$  uma partição de  $[a, b]$  e sejam, respectivamente,  $\bar{c}_i$  e  $\underline{c}_i$  pontos de mínimo e de máximo de  $f$  em  $[x_{i-1}, x_i]$ . Na figura acima,  $\bar{c}_i = x_{i-1}$  e  $\underline{c}_i = x_i$ . Temos:

$\pi [f(\bar{c}_i)]^2 \Delta x_i =$  volume do cilindro de altura  $\Delta x_i$  e base de raio  $f(\bar{c}_i)$  (cilindro de "dentro")

$\pi [f(\underline{c}_i)]^2 \Delta x_i =$  volume do cilindro de altura  $\Delta x_i$  e raio de base  $f(\underline{c}_i)$  (cilindro de "fora").

Uma boa definição para o volume  $V$  de  $B$  deverá implicar

$$\sum_{i=1}^n \pi [f(\underline{c}_i)]^2 \Delta x_i \leq \text{volume } V \leq \sum_{i=1}^n \pi [f(\bar{c}_i)]^2 \Delta x_i$$

para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ . Para máx  $\Delta x_i \rightarrow 0$ , as somas de Riemann que comparecem nas desigualdades acima tendem a  $\int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$ ; nada mais natural, então, do que definir o volume  $V$  de  $B$  por

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

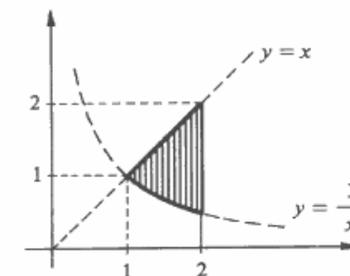
**EXEMPLO 1.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo  $x$ , do conjunto de todos  $(x, y)$  tais que  $x^2 + y^2 \leq r^2$ ,  $y \geq 0$  ( $r > 0$ ).

*Solução*

$x^2 + y^2 \leq r^2$ ,  $y \geq 0$ , é um semicírculo de raio  $r$ . Pela rotação deste semicírculo, em torno do eixo  $Ox$ , obtemos uma esfera de raio  $r$ . Temos

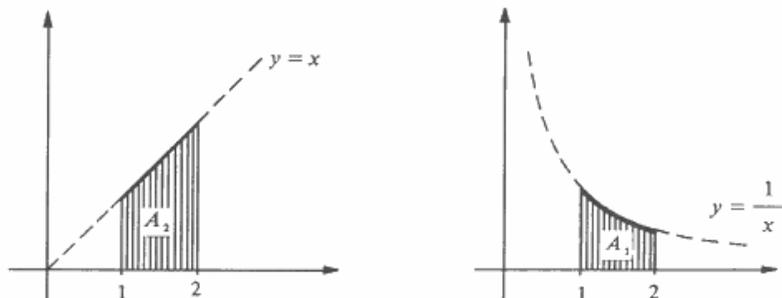
$$\begin{aligned} \text{volume} &= \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

**EXEMPLO 2.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo  $Ox$ , do conjunto de todos  $(x, y)$  tais que  $\frac{1}{x} \leq y \leq x$ ,  $1 \leq x \leq 2$ .



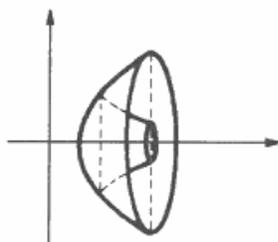
Solução

O que queremos é o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo  $x$ , do conjunto hachurado. O volume  $V$  pedido é igual a  $V_2 - V_1$  onde  $V_2$  e  $V_1$  são, respectivamente, os volumes obtidos pela rotação em torno do eixo  $Ox$  dos conjuntos  $A_2$  e  $A_1$  hachurados.



$$V_2 = \pi \int_1^2 x^2 dx = \frac{7\pi}{3} \text{ e } V_1 = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Deste modo, } V = \frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{6}.$$



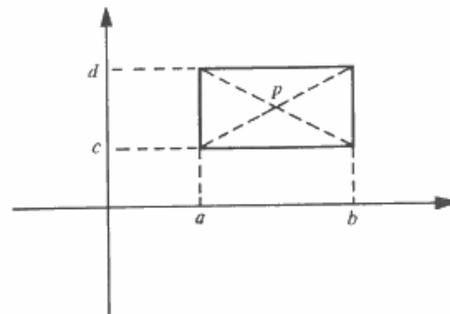
O próximo exemplo é um caso particular do Teorema de Pappus (Pappus de Alexandria, IV século d.C.) para volume de sólido obtido pela rotação, em torno de um eixo, de uma figura plana que não intercepta o eixo. (Veja Exerc. 3 da Seq. 3.6.)

**EXEMPLO 3.** Considere um retângulo situado no semiplano  $y \geq 0$  e com um lado paralelo ao eixo  $x$ . Seja  $P$  a intersecção das diagonais. Mostre que o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo  $x$ , é igual ao produto da área do retângulo pelo comprimento da circunferência gerada, na rotação, pelo ponto  $P$ .

Solução

Consideremos o retângulo

$$a \leq x \leq b \quad \text{e} \quad 0 \leq c \leq y \leq d$$



O volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo  $x$ , deste retângulo é

$$V = \pi \int_a^b d^2 dx - \pi \int_a^b c^2 dx$$

ou seja,

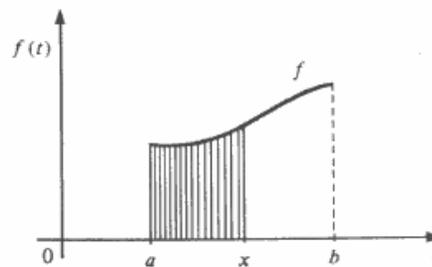
$$V = \pi(d^2 - c^2)(b - a)$$

e, portanto,

$$V = 2\pi \frac{d+c}{2} (d-c)(b-a)$$

onde  $2\pi \frac{d+c}{2}$  é o comprimento da circunferência gerada pelo ponto  $P$  e  $(d-c)(b-a)$  a área do retângulo. (Observe que o resultado expresso neste exemplo continua válido se as expressões “semiplano  $y \geq 0$ ” e “em torno do eixo  $x$ ” forem substituídas, respectivamente, por “semiplano  $x \geq 0$ ” e “em torno do eixo  $y$ ”.)

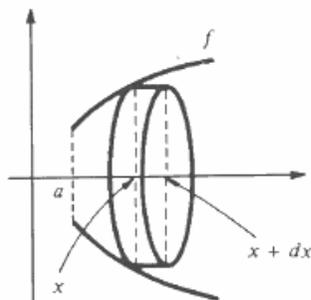
Seja  $f(t) \geq 0$  e contínua em  $[a, b]$ ; para cada  $x$  em  $[a, b]$ ,  $V(x) = \pi \int_a^x [f(t)]^2 dt$  é o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo  $Ox$ , do conjunto hachurado. Pelo teorema fundamental do cálculo



$$\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ \pi \int_a^x [f(t)]^2 dt \right] = \pi [f(x)]^2.$$

Assim, a diferencial da função  $V = V(x)$  é

$$dV = \pi [f(x)]^2 dx.$$



$\pi [f(x)]^2 dx$  é um valor aproximado para a variação  $\Delta V$  em  $V$  correspondente à variação  $dx$  em  $x$ .

Exercícios 3.1

1. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo  $x$ , do conjunto de todos os pares  $(x, y)$  tais que

- a)  $1 \leq x \leq 3$  e  $0 \leq y \leq x$ .
- b)  $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$  e  $0 \leq y \leq \frac{1}{x^2}$ .
- c)  $1 \leq x \leq 4$  e  $0 \leq y \leq \sqrt{x}$ .
- d)  $2x^2 + y^2 \leq 1$  e  $y \geq 0$ .
- e)  $y \geq 0, 1 \leq x \leq 2$  e  $x^2 - y^2 \geq 1$ .
- f)  $0 \leq x \leq 1$  e  $\sqrt{x} \leq y \leq 3$ .
- g)  $x^2 \leq y \leq x$ .
- h)  $0 \leq y \leq x$  e  $x^2 + y^2 \leq 2$ .
- i)  $y \geq x^2$  e  $x^2 + y^2 \leq 2$ .
- j)  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$  e  $y \geq 0$ .
- l)  $\frac{1}{x} \leq y \leq 1$  e  $1 \leq x \leq 2$ .
- m)  $x^2 + (y - 2)^2 \leq 1$

2. (Teorema de Pappus para a elipse). Considere o conjunto  $A$  de todos os pontos  $(x, y)$  tais que

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} \leq 1 \quad (a > 0 \text{ e } b > 0)$$

e situado no semiplano  $y \geq 0$ . Mostre que o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo  $x$ , do conjunto  $A$  é igual ao produto da área da elipse pelo comprimento da circunferência gerada, na rotação, pelo centro  $(\alpha, \beta)$  desta elipse.

3. Considere um triângulo isósceles situado no semiplano  $y \geq 0$  e com a base paralela ao eixo  $x$ . Mostre que o volume do sólido obtido pela rotação deste triângulo, em torno do eixo  $x$ , é igual ao produto da área deste triângulo pelo comprimento da circunferência gerada, na rotação, pelo baricentro do triângulo.

### 3.2. VOLUME DE SÓLIDO OBTIDO PELA ROTAÇÃO, EM TORNO DO EIXO $y$ , DE UM CONJUNTO $A$

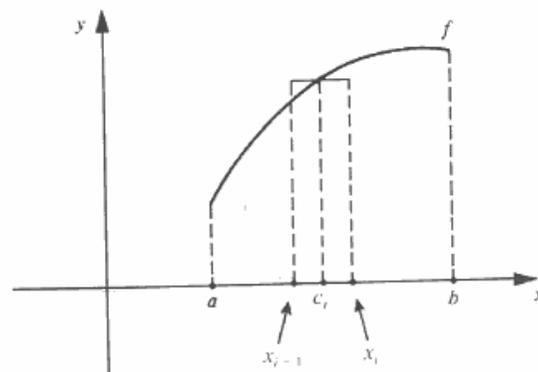
Suponha  $f(x) \geq 0$  e contínua em  $[a, b]$ , com  $a > 0$ . Seja  $A$  o conjunto do plano de todos os pares  $(x, y)$  tais que  $a \leq x \leq b$  e  $0 \leq y \leq f(x)$ . Seja  $B$  o conjunto obtido pela rotação, em torno do eixo  $y$ , do conjunto  $A$ . Nosso objetivo, a seguir, é mostrar que é razoável tomar para volume de  $B$  o número

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

①

Seja então

$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$  uma partição de  $[a, b]$  e seja  $c_i$  o ponto médio de  $[x_{i-1}, x_i]$ .



Seja  $R_i$  o retângulo  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$  e  $0 \leq y \leq f(c_i)$ . Pelo teorema de Pappus para retângulo, o volume do sólido gerado pela rotação do retângulo  $R_i$ , em torno do eixo  $y$ , é

$$2\pi c_i f(c_i) \Delta x_i$$

(Confira.)

Deste modo, a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n 2\pi c_i f(c_i) \Delta x_i$$

é um valor aproximado para o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo  $y$ , do conjunto  $A$ . Por outro lado, pelo fato de  $f$  ser contínua, tem-se

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi c_i f(c_i) \Delta x_i = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Logo, é razoável tomar ① para volume de B. Veremos no Vol. 3 que esta nossa atitude é correta. (Para uma prova de ①, num caso particular, veja Exercício 2 desta seção.)

**EXEMPLO.** Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de todos (x, y) tais que

$$0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq x - x^3.$$

*Solução*

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x - x^3) dx = \frac{2}{15}.$$

Exercícios 3.2

1. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de todos os (x, y) tais que

a)  $1 \leq x \leq e$  e  $0 \leq y \leq \ln x$ .

b)  $0 \leq x \leq 8$  e  $0 \leq y \leq \sqrt[3]{x}$ .

c)  $1 \leq x \leq 2$  e  $0 \leq y \leq x^3 - 1$ .

d)  $0 \leq x \leq \pi$  e  $0 \leq y \leq \sin x$ .

e)  $0 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq y \leq \arctg x$ .

f)  $1 \leq x \leq 4$  e  $1 \leq y \leq \sqrt{x}$ .

g)  $y^2 \leq 2x - x^2, y \geq 0$ .

h)  $0 \leq x \leq 2, y \geq \sqrt{x-1}$  e  $0 \leq y \leq x^2$ .

2. (Volume de sólido de revolução em torno do eixo y). Suponha f estritamente crescente e com derivada contínua em [a, b],  $a \geq 0$  e  $f(a) = 0$ . Seja  $g: [0, f(b)] \rightarrow [a, b]$  a função inversa de f.

a) Verifique que o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$
 é igual a  $\pi b^2 f(b) - \pi \int_0^{f(b)} [g(y)]^2 dy$ .

b) Mostre que

$$\pi b^2 f(b) - \pi \int_0^{f(b)} [g(y)]^2 dy = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

(Sugestão: faça a mudança de variável  $y = f(x)$  e depois integre por partes).

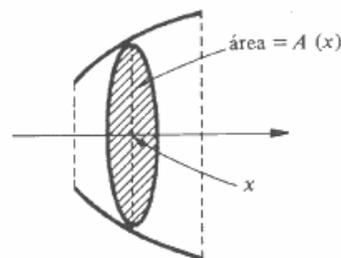
c) Conclua que o volume mencionado em a é

$$\text{volume} = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

3.3. VOLUME DE UM SÓLIDO QUALQUER

Vimos no parágrafo anterior que  $\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$  é a fórmula que nos fornece o volume do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ . Observe que

$$A(x) = \pi [f(x)]^2$$



é a área da interseção do sólido com o plano perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto de abscissa x. Assim, o volume mencionado anteriormente pode ser colocado na forma

$$\text{volume} = \int_a^b A(x) dx$$

Seja, agora, B um sólido qualquer, não necessariamente de revolução e seja Ox um eixo escolhido arbitrariamente. Suponhamos que o sólido esteja compreendido entre dois planos perpendiculares a Ox, que interceptam o eixo Ox em  $x = a$  e em  $x = b$ . Seja  $A(x)$  a área da interseção do sólido com o plano perpendicular a Ox no ponto de abscissa x. Suponhamos que a função  $A(x)$  seja integrável em [a, b]. Definimos, então, o volume do sólido por

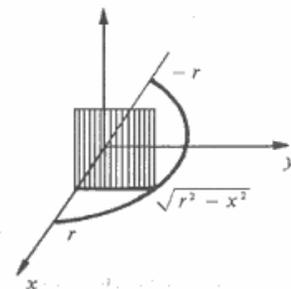
$$\text{volume} = \int_a^b A(x) dx$$

**EXEMPLO.** Calcule o volume do sólido cuja base é o semicírculo  $x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0$ , e cujas secções perpendiculares ao eixo Ox são quadrados.

*Solução*

$$A(x) = (\sqrt{r^2 - x^2})^2.$$

$$\text{volume} = \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx$$



ou seja

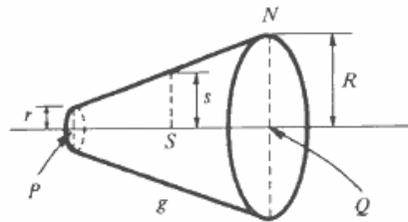
$$\text{volume} = 2 \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2 \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{4r^3}{3}.$$

### Exercícios 3.3

1. Calcule o volume do sólido cuja base é o semicírculo  $x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0$ , e cujas secções perpendiculares ao eixo  $Ox$  são triângulos equiláteros.
2. Calcule o volume do sólido cuja base é a região  $4x^2 + y^2 \leq 1$  e cujas secções perpendiculares ao eixo  $Ox$  são semicírculos.
3. Calcule o volume do sólido cuja base é o quadrado de vértices  $(0, 0), (1, 1), (0, 1)$  e  $(1, 0)$  e cujas secções perpendiculares ao eixo  $Ox$  são triângulos isósceles de altura  $x - x^2$ .
4. Calcule o volume do sólido cuja base é um triângulo equilátero de lado  $l$  e cujas secções perpendiculares a um dos lados são quadrados.

## 3.4. ÁREA DE SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

Sabe-se da geometria que a área lateral de um tronco de cone circular reto, de geratriz  $g$ , raio da base maior  $R$  e raio da base menor  $r$ , é igual à área do trapézio de altura  $g$ , base maior  $2\pi R$  e base menor  $2\pi r$ :



$$\text{área lateral do tronco} = \pi(R + r)g$$

Sendo  $S$  o ponto médio do segmento  $PQ$ ,

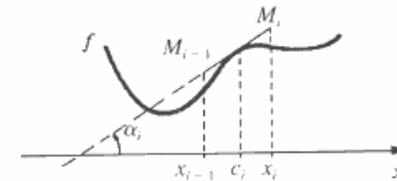
$$s = \frac{R + r}{2}, \text{ daí } \pi(R + r)g = 2\pi s g.$$

$$\boxed{\text{área lateral do tronco de cone} = 2\pi s g}$$

Observe que a área da superfície gerada pela rotação da geratriz, em torno do eixo  $PQ$ , é igual ao produto do comprimento  $g$  desta geratriz pelo comprimento  $2\pi s$  da circunferência gerada pelo ponto médio da geratriz. Este resultado é um caso particular do Teorema de Pappus para superfícies de revolução. (Veja Exercício 9 da Seq. 3.6.)

Vamos, agora, estender o conceito de área para superfície obtida pela rotação, em torno do eixo  $x$ , do gráfico de uma função  $f$ , com derivada contínua e  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$ .

Seja, então,  $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  uma partição de  $[a, b]$  e  $c_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$  o ponto médio do intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ .



Na figura,  $f'(c_i) = \operatorname{tg} \alpha_i$ ; o segmento  $M_{i-1}M_i$  é tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(c_i, f(c_i))$ . Então

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \frac{\Delta x_i}{|\cos \alpha_i|} = \sec \alpha_i |\Delta x_i| = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i.$$

A área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo  $x$ , do segmento  $M_{i-1}M_i$  (observe que tal superfície nada mais é do que a superfície lateral de um tronco de cone de geratriz  $\overline{M_{i-1}M_i}$ ) é:

$$2\pi f(c_i) \overline{M_{i-1}M_i} = 2\pi f(c_i) \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i$$

e se  $\Delta x_i$  for suficientemente pequeno esta área será uma boa aproximação para a "área" da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo  $x$ , do trecho do gráfico entre as retas  $x = x_{i-1}$  e  $x = x_i$ .

Como a função  $2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$  é contínua em  $[a, b]$ , teremos

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi f(c_i) \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Definimos a *área* da superfície obtida pela rotação do gráfico de  $f$ , em torno do eixo  $x$ , por

$$\boxed{2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}$$

**EXEMPLO.** Calcule a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo  $x$ , do gráfico de  $f(x) = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$ .

*Solução*

$$\text{área} = 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$$

$$\begin{aligned} u &= \cos x; du = -\sin x dx \\ x &= 0; u = 1 \\ x &= \pi; u = -1. \end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1+u^2} (-du)$$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1+u^2} du$$

$$= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta.$$

$$u = \operatorname{tg} \theta; du = \sec^2 \theta d\theta$$

$$u = -1; \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$u = 1; \theta = \frac{\pi}{4}$$

Integrando por partes:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 \theta \sec \theta d\theta = \left[ \operatorname{tg} \theta \sec \theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [\sec^3 \theta - \sec \theta] d\theta. \text{ Daí}$$

$$2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta = 2\sqrt{2} + \left[ \ln (\sec \theta + \operatorname{tg} \theta) \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

ou seja,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta = \sqrt{2} + \ln (\sqrt{2} + 1).$$

Portanto, área =  $2\pi (\sqrt{2} + \ln (\sqrt{2} + 1))$ .

#### Exercícios 3.4

1. Calcule a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo  $x$ , do gráfico da função dada.

$$a) f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, -1 \leq x \leq 1$$

$$b) f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, -R \leq x \leq R (R > 0)$$

$$c) y = x^2, 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$d) y = \sqrt{x}, 1 \leq x \leq 4.$$

2. Seja  $f$  com derivada contínua em  $[a, b]$  e seja  $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  uma partição de  $[a, b]$ . Indique por  $L(P)$  o comprimento da poligonal de vértices  $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$ .

a) Verifique que

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} L(P) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

b) Defina comprimento do gráfico da função de  $f$ .

c) Qual uma outra motivação para tal definição? (Sugestão: aproveite a motivação para a definição de área de superfície de revolução.)

3. Calcule o comprimento do gráfico da função dada.

$$a) f(x) = \ln x, 1 \leq x \leq e$$

$$b) f(x) = e^x, 0 \leq x \leq 1.$$

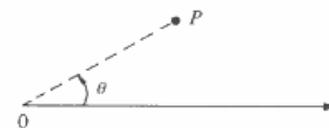
$$c) f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, -R \leq x \leq R, R > 0$$

$$d) f(x) = \sqrt{x}, \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$$

$$e) f(x) = x^2, 0 \leq x \leq \sqrt{3}.$$

### 3.5. ÁREA EM COORDENADAS POLARES

Fixado no plano um semi-eixo  $Ox$  (tal semi-eixo denomina-se *eixo polar* e o ponto  $O$ , *pólo*)



cada ponto  $P$  do plano fica determinado por suas *coordenadas polares*  $(\theta, \rho)$ , onde  $\theta$  é a medida em radianos do ângulo entre o segmento  $OP$  e o eixo polar (tal ângulo sendo contado a partir do eixo polar) e  $\rho$  o comprimento de  $OP$ ; assim  $\rho \geq 0$ .

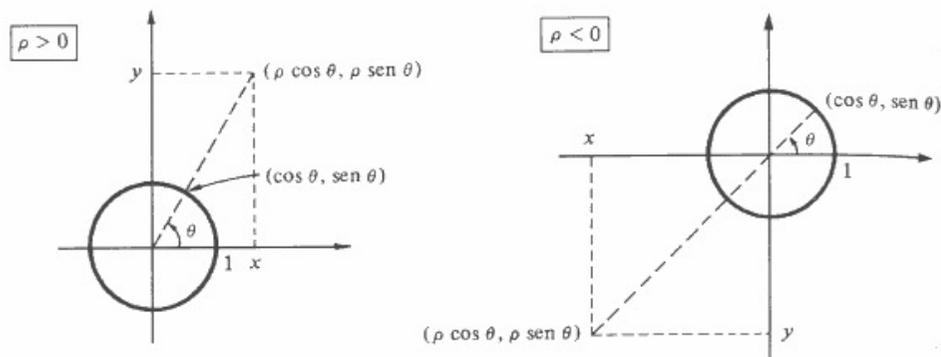
Se considerarmos no plano um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas (o habitual) em que a origem coincide com o pólo e o semi-eixo  $Ox$  com o eixo polar e se  $(\theta, \rho)$  forem as coordenadas polares de  $P$ , então as suas coordenadas cartesianas serão dadas por

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

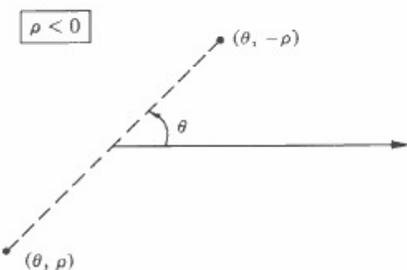
Observe que se  $P$  não coincide com o pólo

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Até agora, destacamos  $\rho$  como um número positivo. Entretanto, para as aplicações é importante que  $\rho$  possa assumir, também, valores negativos. Vejamos como interpretar  $(\theta, \rho)$  no caso  $\rho < 0$ :



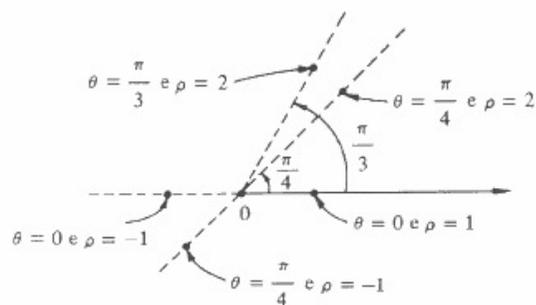
Se  $\rho < 0$ ,  $(\theta, \rho)$  é o simétrico, em relação ao pólo, do ponto  $(\theta, -\rho)$ .



**EXEMPLO 1.** Represente no plano o ponto  $(\theta, \rho)$  onde

- a)  $\theta = 0$  e  $\rho = 1$
- b)  $\theta = 0$  e  $\rho = -1$
- c)  $\theta = \frac{\pi}{4}$  e  $\rho = 2$
- d)  $\theta = \frac{\pi}{4}$  e  $\rho = -1$
- e)  $\theta = \frac{\pi}{3}$  e  $\rho = 2$

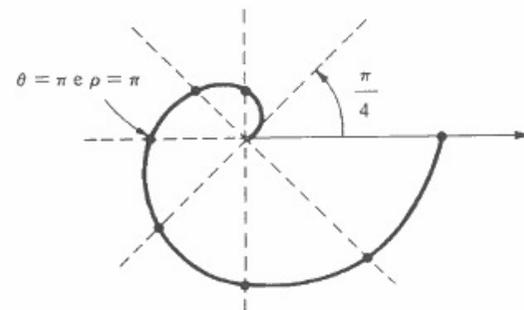
*Solução*



**EXEMPLO 2.** Um ponto  $P$  desloca-se no plano de modo que a relação entre suas coordenadas polares é dada por  $\rho = \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Desenhe o lugar geométrico descrito por  $P$ .

*Solução*

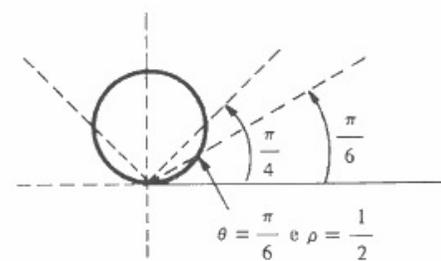
$\theta$	$\rho$
0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\pi$	$\pi$
$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
$2\pi$	$2\pi$



**EXEMPLO 3.** Desenhe a curva cuja equação, em coordenadas polares, é  $\rho = \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

*Solução*

$\theta$	$\rho$
0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\pi$	0



Observe que para  $\rho \neq 0$

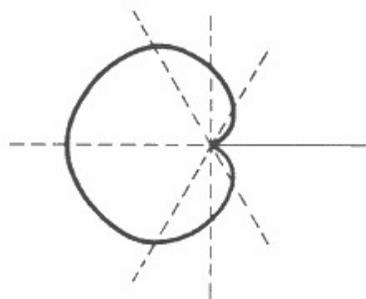
$$\rho = \sin \theta \Leftrightarrow \rho^2 = \rho \sin \theta \Leftrightarrow x^2 + y^2 = y.$$

$x^2 + y^2 - y = 0$  é a equação de uma circunferência de centro  $(0, \frac{1}{2})$  e raio  $\frac{1}{2}$ . Deste modo,  $\rho = \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , é, em coordenadas polares, a equação de tal circunferência.

**EXEMPLO 4.** Desenhe o lugar geométrico de equação (em coordenadas polares)  $\rho = 1 - \cos \theta$ .

Solução

$\theta$	$\rho$
0	0
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3}{2}$
$\pi$	2
$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	1

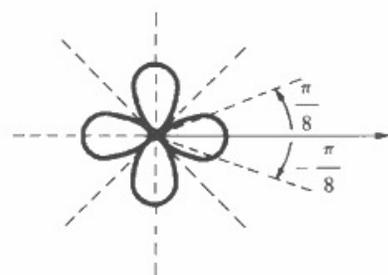


Esta curva denomina-se *cardiôide*.

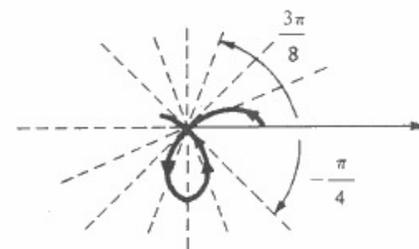
**EXEMPLO 5.** Desenhe a curva cuja equação, em coordenadas polares, é  $\rho = \cos 2\theta$ .

Solução

$\theta$	$\rho$
0	1
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	0
$-\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	-1
$\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$



Veja como fica o trecho da curva acima para  $\theta$  variando de 0 a  $\frac{3\pi}{4}$ .



Quando  $\theta$  varia de  $\frac{\pi}{4}$  a  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\rho$  permanece negativo.

**EXEMPLO 6.** Desenhe o lugar geométrico descrito por um ponto  $P$  que se desloca no plano, sabendo que a relação entre suas coordenadas polares é  $\rho = \operatorname{tg} \theta$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ .

Solução

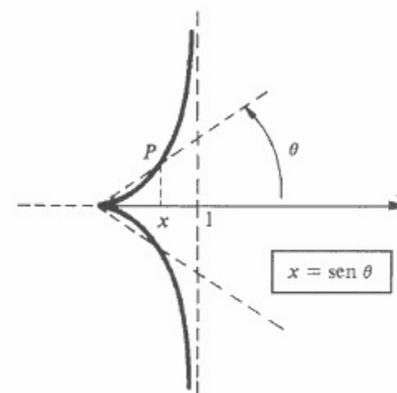
Vejam, primeiro, o que acontece para  $\theta$  variando de 0 a  $\frac{\pi}{2}$ . Quando  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ,  $\rho \rightarrow +\infty$ .

A projeção de  $P$  sobre o eixo polar tem abscissa

$$x = \rho \cos \theta = \operatorname{tg} \theta \cos \theta = \operatorname{sen} \theta.$$

Assim, quando  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , a projeção de  $P$  sobre o eixo polar tende para o ponto de abscissa 1. O trecho da curva correspondente a  $\theta$  em  $]-\frac{\pi}{2}, 0]$  é simétrico, em relação ao eixo polar, ao trecho correspondente a  $\theta$  em  $[0, \frac{\pi}{2}[$ .

O lugar geométrico descrito por  $P$  é a hipérbole  $x = \operatorname{sen} \theta$ .

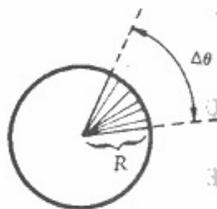


Nosso objetivo, a seguir, é estabelecer uma fórmula para o cálculo de área de região limitada por curvas dadas em coordenadas polares.

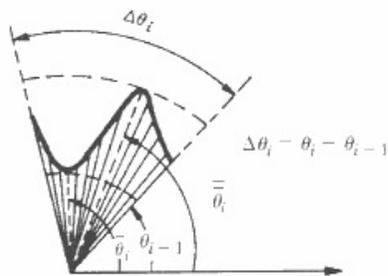
Inicialmente, observamos que a área de um setor circular de raio  $R$  e abertura  $\Delta\theta$  é  $\frac{1}{2} R^2 \Delta\theta$ . Esta área se determina por uma regra de três simples:

$$\frac{2\pi rd - \text{área}}{\Delta\theta rd} = \frac{\pi R^2}{\frac{1}{2} R^2 \Delta\theta}$$

$$? = \frac{\Delta\theta \pi R^2}{2\pi} = \frac{1}{2} R^2 \Delta\theta$$



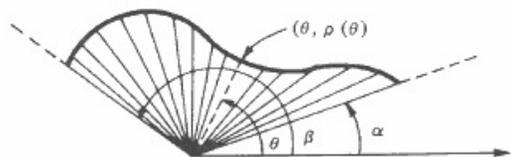
Consideremos, agora, a função  $\rho = \rho(\theta)$  contínua e  $\geq 0$  em  $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ . Seja  $A_i$  o conjunto de todos os pontos  $(\theta, \rho)$ , com  $\theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i$  e  $0 \leq \rho \leq \rho(\theta)$ .



Seja  $\bar{\rho} = \rho(\bar{\theta}_i)$  o maior valor de  $\rho$  em  $[\theta_{i-1}, \theta_i]$  e  $\underline{\rho} = \rho(\underline{\theta}_i)$  o menor valor. A área do conjunto  $A_i$  está, então, compreendida entre as áreas dos setores circulares de abertura  $\Delta\theta_i$  e raios  $\rho(\bar{\theta}_i)$  e  $\rho(\underline{\theta}_i)$ :

$$\frac{1}{2} [\rho(\underline{\theta}_i)]^2 \Delta\theta_i \leq \text{área } A_i \leq \frac{1}{2} [\rho(\bar{\theta}_i)]^2 \Delta\theta_i$$

Consideremos, agora, a função  $\rho = \rho(\theta)$  contínua e  $\geq 0$  em  $[\alpha, \beta]$ , onde supomos  $\beta - \alpha \leq 2\pi$ . Seja  $A$  o conjunto de todos os pontos do plano de coordenadas polares  $(\theta, \rho)$  satisfazendo as condições:  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  e  $0 \leq \rho \leq \rho(\theta)$ .



Seja  $P: \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{i-1} < \theta_i < \dots < \theta_n = \beta$  uma partição de  $[\alpha, \beta]$ . Sejam  $\rho(\bar{\theta}_i)$  e  $\rho(\underline{\theta}_i)$  os valores mínimo e máximo de  $\rho$  em  $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ . Pelo que vimos anteriormente, a área da parte do conjunto  $A$  compreendida entre as retas  $\theta = \theta_{i-1}$  e  $\theta = \theta_i$  está compreendida entre as áreas dos setores circulares de abertura  $\Delta\theta_i$  e raios  $\rho(\bar{\theta}_i)$  e  $\rho(\underline{\theta}_i)$ . Uma definição razoável para a área de  $A$  deverá implicar, para toda partição  $P$  de  $[\alpha, \beta]$ ,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [\rho(\underline{\theta}_i)]^2 \Delta\theta_i \leq \text{área } A \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [\rho(\bar{\theta}_i)]^2 \Delta\theta_i$$

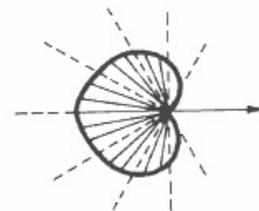
Para máx  $\Delta\theta_i \rightarrow 0$ , as somas de Riemann acima tendem para a integral  $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} \rho^2 d\theta$ . Nada mais natural, então, do que definir a área de  $A$  por

$$\text{área } A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta$$

**EXEMPLO 1.** Calcule a área da região limitada pela cardióide  $\rho = 1 - \cos \theta$ .

*Solução*

Para cobrir todo o conjunto,  $\theta$  deverá variar de 0 a  $2\pi$ .



$$\text{área} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 d\theta$$

Temos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 d\theta &= \int_0^{2\pi} [1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta] d\theta = 2\pi + \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \\ &= 2\pi + \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right] d\theta = 3\pi \end{aligned}$$

Assim, a área do conjunto é  $\frac{3\pi}{2}$ .

**EXEMPLO 2.** Calcule a área da interseção das regiões limitadas pelas curvas (coordenadas polares)  $\rho = 3 \cos \theta$  e  $\rho = 1 + \cos \theta$ .

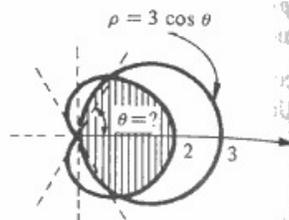
Solução

Primeiro devemos determinar as interseções das curvas.

$$3 \cos \theta = 1 + \cos \theta$$

ou seja,

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$



Assim,  $\theta = \frac{\pi}{3}$  e  $\theta = -\frac{\pi}{3}$  resolvem o problema. Seja  $A_1$  o conjunto de todos  $(\theta, \rho)$  com

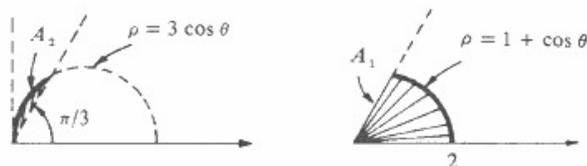
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$  e  $0 \leq \rho \leq 1 + \cos \theta$  e seja  $A_2$  o conjunto de todos  $(\theta, \rho)$  com  $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  e  $0 \leq \rho \leq 3 \cos \theta$ . Temos, então:

$$\text{área pedida} = 2 (\text{área } A_1 + \text{área } A_2).$$

$$\text{área } A_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

$$\text{área } A_2 = \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} (3 \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3\pi}{8} - \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

Conclusão: área pedida =  $\frac{5\pi}{4}$ . Veja figuras a seguir.



**EXEMPLO 3.** Calcule a área da região limitada pela curva dada em coordenadas polares por  $\rho = \text{tg } \theta$ ,  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ , pela reta  $x = 1$  (coordenadas cartesianas) e pelo eixo polar.

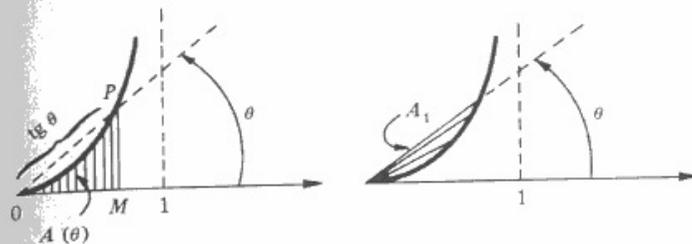
Solução

Indiquemos por  $A(\theta)$  a área da região hachurada. A área que queremos é:

$$\text{área} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} A(\theta).$$

Temos

$$A(\theta) = \text{área } \Delta OPM - \text{área } A_1 = \frac{1}{2} \text{tg } \theta \text{sen}^2 \theta - \frac{1}{2} \int_0^\theta \text{tg}^2 \theta d\theta.$$



Vamos calcular  $\int_0^\theta \text{tg}^2 \theta d\theta$ . Temos

$$\int_0^\theta \text{tg}^2 \theta d\theta = \int_0^\theta (\sec^2 \theta - 1) d\theta = [\text{tg } \theta - \theta]_0^\theta = \text{tg } \theta - \theta.$$

Assim

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \frac{1}{2} \text{tg } \theta \text{sen}^2 \theta - \frac{1}{2} \text{tg } \theta + \frac{1}{2} \theta = -\frac{1}{2} \text{tg } \theta (1 - \text{sen}^2 \theta) + \frac{1}{2} \theta \\ &= -\frac{1}{2} \text{sen } \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \theta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{área} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[ -\frac{1}{2} \text{sen } \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \theta \right] = \frac{\pi}{4}.$$

**Observação:** No triângulo OPM temos:

$$\overline{OM} = \rho \cos \theta = \text{tg } \theta \cos \theta = \text{sen } \theta \text{ e } \overline{MP} = \rho \text{sen } \theta = \text{tg } \theta \text{sen } \theta.$$

$$\text{Assim, área } \Delta OPM = \frac{1}{2} \text{sen}^2 \theta \text{tg } \theta.$$

Exercícios 3.5

1. Desenhe a curva dada (coordenadas polares).

a)  $\rho = e^{-\theta}$ ,  $\theta \geq 0$

b)  $\rho = \cos \theta$

c)  $\rho \cos \theta = 1$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

d)  $\rho = 2$

e)  $\theta = \frac{\pi}{4}$

f)  $\rho = \text{tg } \theta$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

g)  $\rho = \cos 3\theta$

h)  $\rho^2 = \frac{1}{1 + \text{sen}^2 \theta}$

i)  $\rho = 2 - \cos \theta$

j)  $\rho = 1 - \text{sen } \theta$

l)  $\rho = \cos 4\theta$

m)  $\rho^2 = \text{tg } \theta$ ,  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  ( $\rho \geq 0$ )

n)  $\rho^2 = \text{tg } 2\theta$ ,  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$  ( $\rho \geq 0$ )

o)  $\rho = \cos^2 \theta$

2. Passe a curva dada para coordenadas polares e desenhe-a.

a)  $x^4 - y^4 = 2xy$       b)  $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = y^2$

c)  $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$       d)  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$

3. Calcule a área da região limitada pela curva dada (coordenadas polares).

a)  $\rho = 2 - \cos \theta$       b)  $\rho^2 = \cos \theta (\rho \geq 0)$

c)  $\rho = \cos 2\theta$       d)  $\rho = \cos 3\theta$

4. Calcule a área da intersecção das regiões limitadas pelas curvas dadas em coordenadas polares.

a)  $\rho = 2 - \cos \theta$  e  $\rho = 1 + \cos \theta$       b)  $\rho = \sin \theta$  e  $\rho = 1 - \cos \theta$

c)  $\rho = 3$  e  $\rho = 2(1 - \cos \theta)$       d)  $\rho^2 = \cos \theta$  e  $\rho^2 = \sin \theta (\rho \geq 0)$

e)  $\rho = \cos \theta$  e  $\rho = \sin \theta$       f)  $\rho = 1$  e  $\rho = 2(1 - \cos \theta)$

5. Calcule a área do conjunto de todos os pontos  $(\theta, \rho)$  tais que  $\theta^2 \leq \rho \leq \theta$  (coordenadas polares).

6. Calcule a área da região situada no 1.º quadrante, limitada acima pela curva  $x^4 - y^4 = 2xy$  (coordenadas cartesianas) e abaixo por  $\rho^2 = 2 \sin 2\theta$  (coordenadas polares), com  $\rho \geq 0$ .

7. a) Escreva, em coordenadas polares, a equação da elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  tomando como pólo a origem e como eixo polar o semi-eixo  $Ox$ .

b) Escreva, em coordenadas polares, a equação da elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  tomando como pólo o foco  $F = (c, 0)$ ,  $c > 0$ , e como eixo polar a semi-reta  $FA$  onde  $A = (a, 0)$ ,  $a > 0$ . (Faça  $e = \frac{c}{a}$  e  $\rho = a - ec$ .)

8. Sejam  $F_1$  e  $F_2$  dois pontos distintos do plano e seja  $k$  a metade da distância de  $F_1$  a  $F_2$ . O lugar geométrico dos pontos  $P$  do plano tais que  $PF_1 \cdot PF_2 = k^2$  denomina-se *lemniscata* de focos  $F_1$  e  $F_2$ .

a) Tomando-se  $F_1 = (-k, 0)$  e  $F_2 = (k, 0)$ , determine a equação, em coordenadas cartesianas, da *lemniscata*.

b) Passe para coordenadas polares a equação obtida no item a) tomando para pólo a origem e  $Ox$  como eixo polar. Desenhe a curva.

### 3.6. CENTRO DE MASSA

Consideremos um sistema de "massas pontuais"  $m_1, m_2, \dots, m_n$  localizadas nos pontos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . O *centro de massa* do sistema é, por definição, o ponto  $(x_c, y_c)$  onde

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \dots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

**EXEMPLO 1.** Determine o centro de massa do sistema constituído pelas massas  $m_1, m_2$  localizadas nos pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , supondo  $m = m_1 = m_2$ .

*Solução*

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Deste modo,  $(x_c, y_c)$  é o ponto médio do segmento de extremidades  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ .

**EXEMPLO 2.** Considere o sistema de massas  $m_1, m_2, m_3$  localizadas em  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  e  $(x_3, y_3)$ . Seja  $M_1 = m_1 + m_2$  e considere o sistema  $M_1$  e  $m_3$ , com  $M_1$  localizada no centro de massa de  $m_1, m_2$ . Verifique que o centro de massa de  $M_1, m_3$  é o mesmo que o de  $m_1, m_2, m_3$ .

*Solução*

Seja  $(\bar{x}, \bar{y})$  o centro de massa de  $m_1$  e  $m_2$ :

$$\bar{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} \text{ e } \bar{y} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

Seja  $(\bar{x}_c, \bar{y}_c)$  o centro de massa de  $M_1, m_3$ :

$$\bar{x}_c = \frac{\bar{x}M_1 + x_3 m_3}{M_1 + m_3} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = x_c$$

$$\left( \bar{x}M_1 = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} M_1 = x_1 m_1 + x_2 m_2 \right)$$

$$\bar{y}_c = \frac{\bar{y}M_1 + y_3 m_3}{M_1 + m_3} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = y_c$$

Assim,  $(\bar{x}_c, \bar{y}_c) = (x_c, y_c)$ .

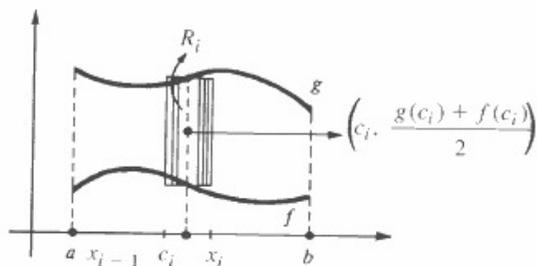
Deixamos a seu cargo generalizar o resultado do Ex. 2.

Vejamos, agora, como determinar o centro de massa de uma região  $A$  do plano que será imaginada como uma lâmina delgada, homogênea, de modo que a densidade superficial  $\rho$  é constante ( $\rho$  é massa por unidade de área). Suponhamos, inicialmente, que  $A$  possa ser decomposta em  $n$  retângulos  $R_1, R_2, \dots, R_n$ . Seja  $m_i$  a massa do retângulo  $R_i$ ;  $m_i$  é o produto de  $\rho$  pela área de  $R_i$ . Neste caso, definimos o *centro de massa* de  $A$  como sendo o centro de massa do sistema  $m_1, m_2, \dots, m_n$  com  $m_i$  localizada no centro de  $R_i$ .

Suponhamos, agora,  $A$  da forma

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

onde  $f$  e  $g$  são supostas contínuas em  $[a, b]$ , e  $f(x) \leq g(x)$  em  $[a, b]$ . Seja  $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  uma partição qualquer de  $[a, b]$  e seja  $c_i$  o ponto médio de  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).



A massa  $m_i$  de  $R_i$  é:  $m_i = \rho [g(c_i) - f(c_i)] \Delta x_i$ . O centro de massa da figura formada pelos retângulos  $R_1, R_2, \dots, R_n$  é:

$$\left( \frac{\sum_{i=1}^n c_i \rho [g(c_i) - f(c_i)] \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n \rho [g(c_i) - f(c_i)] \Delta x_i}, \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [g(c_i) + f(c_i)] \rho [g(c_i) - f(c_i)] \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n \rho [g(c_i) - f(c_i)] \Delta x_i} \right)$$

Nada mais natural, então, do que tomar como *centro de massa* de  $A$  o ponto  $(x_c, y_c)$  onde

$$x_c = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n c_i [g(c_i) - f(c_i)] \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n [g(c_i) - f(c_i)] \Delta x_i} = \frac{\int_a^b x [g(x) - f(x)] dx}{\text{área de } A}$$

e

$$y_c = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [g(c_i) + f(c_i)] [g(c_i) - f(c_i)] \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n [g(c_i) - f(c_i)] \Delta x_i} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [g(x) + f(x)] [g(x) - f(x)] dx}{\text{área de } A}$$

Ou seja,

$$x_c = \frac{\int_a^b x [g(x) - f(x)] dx}{\text{área de } A}$$

e

$$y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [g(x) + f(x)] [g(x) - f(x)] dx}{\text{área de } A}$$

Suponha, finalmente, que  $A$  possa ser decomposta em  $n$  regiões  $A_1, A_2, \dots, A_n$  onde

$$A_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_i \leq x \leq b_i, f_i(x) \leq y \leq g_i(x)\}$$

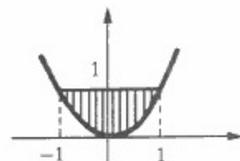
com  $f_i, g_i$  contínuas em  $[a_i, b_i]$  e  $f_i(x) \leq g_i(x)$  em  $[a_i, b_i]$ . Como você calcularia o centro de massa de  $A$ ?

**EXEMPLO 1.** Determine o centro de massa da figura  $A$  limitada pela reta  $y = 1$  e pela parábola  $y = x^2$ .

*Solução*

$$x_c = \frac{\int_{-1}^1 x(1 - x^2) dx}{\text{área de } A} = 0$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + x^2)(1 - x^2) dx}{\text{área de } A} = \frac{3}{5}$$



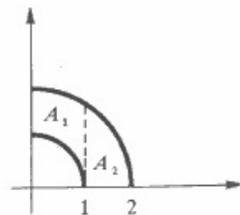
O centro de massa de  $A$  é o ponto  $(0, \frac{3}{5})$ .

**EXEMPLO 2.** Calcule o centro de massa do conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$ .

*Solução*

Vamos imaginar  $A$  como uma lâmina delgada, homogênea, com densidade superficial  $\rho = 1$ . Sendo  $m_1$  e  $m_2$  as massas de  $A_1$  e  $A_2$ , respectivamente, teremos, por ser  $\rho = 1$ ,

$$m_1 = \text{área } A_1 \text{ e } m_2 = \text{área } A_2.$$



Sejam  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  os centros de massas de  $A_1$  e  $A_2$ , respectivamente. O centro de massa de  $A$  será, então, o centro de massa do sistema  $m_1, m_2$  com as massas localizadas, respectivamente, em  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ . Sendo, então,  $(x_c, y_c)$  o centro de massa de  $A$  teremos

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{e} \quad y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

Como

$$x_1 = \frac{\int_0^1 x [\sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-x^2}] dx}{\text{área } A_1}, \quad x_2 = \frac{\int_1^2 x \sqrt{4-x^2} dx}{\text{área } A_2},$$

$$y_1 = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 [(\sqrt{4-x^2})^2 - (\sqrt{1-x^2})^2] dx}{\text{área } A_1} \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{\frac{1}{2} \int_1^2 (\sqrt{4-x^2})^2 dx}{\text{área } A_2}$$

resulta

$$x_c = \frac{\int_0^1 x [\sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-x^2}] dx + \int_1^2 x \sqrt{4-x^2} dx}{\text{área } A}$$

$$= \frac{\int_0^2 x \sqrt{4-x^2} dx - \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx}{\text{área } A}$$

e

$$y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 3 dx + \frac{1}{2} \int_1^2 (4-x^2) dx}{\text{área } A} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 dx}{\text{área } A}$$

Temos:

$$\text{área de } A = \frac{3\pi}{4};$$

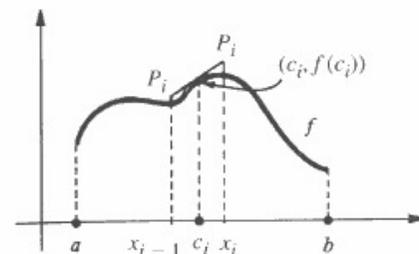
$$\int_0^2 x \sqrt{4-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_4^0 \sqrt{u} du = \frac{8}{3};$$

$$\int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_1^0 \sqrt{u} du = \frac{1}{3}.$$

Segue que

$$x_c = \frac{28}{9\pi} \quad \text{e} \quad y_c = \frac{28}{9\pi}.$$

Vejam, a seguir, como determinar o centro de massa do gráfico de uma função, que será imaginado como fio fino, homogêneo, de modo que a densidade linear  $\rho$  é constante (densidade linear é massa por unidade de comprimento). Seja  $f$  uma função definida e com derivada contínua em  $[a, b]$ . Seja  $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  uma partição de  $[a, b]$  e seja  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) o ponto médio de  $[x_{i-1}, x_i]$



O segmento  $P_{i-1}P_i$  é tangente em  $(c_i, f(c_i))$  ao gráfico de  $f$ ; o comprimento deste segmento é  $\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i$  (veja Seç. 3.4); logo, sua massa  $m_i$  é:  $m_i = \rho \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i$ . O centro de massa do sistema formado pelos segmentos  $P_{i-1}P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) é o ponto

$$\left( \frac{\sum_{i=1}^n c_i \rho \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n \rho \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i}, \frac{\sum_{i=1}^n f(c_i) \rho \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n \rho \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i} \right)$$

Nada mais natural, então, do que tomar para centro de massa do gráfico de  $f$  o ponto  $(x_c, y_c)$  onde

$$x_c = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}$$

e

$$y_c = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}$$

Observe que  $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$  é o comprimento do gráfico de  $f$ .

**Observação importante.** O centro de massa do gráfico de  $f$  não tem nenhuma obrigação de pertencer ao gráfico de  $f$ .

### Exercícios 3.6

1. Determine o centro de massa da região  $A$  dada.

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^3\}$
- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1, x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$
- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1, y \geq 0\}$

$$d) A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq x\}$$

2. Determine o centro de massa do gráfico da função dada.

$$a) f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 2$$

$$b) f(x) = x^2, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$c) f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

3. (Teorema de Pappus). Considere o conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

onde  $f$  e  $g$  são supostas contínuas em  $[a, b]$  e  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  em  $[a, b]$ . Mostre que o volume do sólido, obtido pela rotação em torno do eixo  $x$  do conjunto  $A$ , é igual ao produto da área de  $A$  pelo comprimento da circunferência descrita pelo centro de massa de  $A$ .

4. Sejam  $f$  e  $g$  contínuas em  $[a, b]$ , com  $\alpha \leq f(x) \leq g(x)$  em  $[a, b]$  onde  $\alpha$  é um real dado. Seja o conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

Mostre que o volume do sólido, obtido pela rotação em torno da reta  $y = \alpha$  do conjunto  $A$ , é igual ao produto da área de  $A$  pelo comprimento da circunferência descrita pelo centro de massa de  $A$ .

5. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação do círculo  $x^2 + (y - 2)^2 \leq 1$  em torno

- a) do eixo  $x$   
b) da reta  $y = 1$ .

6. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região  $x^2 + 4y^2 \leq 1$ , em torno da reta  $y = 1$ .

7. Seja  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 \leq y \leq 1\}$ .

- a) Calcule o centro de massa de  $A$ .  
b) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação de  $A$  em torno da reta  $y = 2$ .

8. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação do círculo  $x^2 + y^2 \leq 1$  em torno da reta  $x + y = 2$ .

9. (Teorema de Pappus para área de superfície de revolução). Suponha  $f(x) \geq 0$  e com derivada contínua em  $[a, b]$ . Mostre que a área da superfície, obtida pela rotação em torno do eixo  $Ox$  do gráfico de  $f$ , é igual ao produto do comprimento do gráfico de  $f$  pelo comprimento da circunferência descrita pelo centro de massa do gráfico de  $f$ .

# 4

## EXTENSÕES DO CONCEITO DE INTEGRAL

### 4.1. INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Estamos interessados, nesta seção, em dar um significado para os símbolos

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^a f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

**Definição 1.** Seja  $f$  integrável em  $[a, t]$ , para todo  $t > a$ . Definimos

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

desde que o limite exista e seja finito. Tal limite denomina-se *integral imprópria* de  $f$  estendida ao intervalo  $[a, +\infty[$ .

**Observação.** Se  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$  for  $+\infty$  ou  $-\infty$  continuaremos a nos referir a  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  como uma integral imprópria e escreveremos

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = +\infty \quad \text{ou} \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx = -\infty.$$

Se ocorrer um destes casos ou se o limite não existir, diremos que a integral imprópria é *divergente*. Se o limite for finito, diremos que a integral imprópria é *convergente*.

Suponhamos  $f(x) \geq 0$  em  $[a, +\infty[$  e que  $f$  seja integrável em  $[a, t]$  para toda  $t > a$ . Seja  $A$  o conjunto de todos  $(x, y)$  tais que  $0 \leq y \leq f(x)$  e  $x \geq a$ . Definimos a área de  $A$  por

$$\text{área } A = \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

**EXEMPLO 1.** Calcule  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

*Solução*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx.$$

Como

$$\int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^t = 2 \frac{1}{t} + 1,$$

resulta

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{t} + 1 \right] = 1.$$



$$\text{área} = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx$$

$$\text{área} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Como  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$ , a integral imprópria é convergente.

**EXEMPLO 2.** A integral imprópria  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  é convergente ou divergente? Justifique.

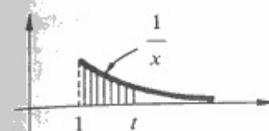
*Solução*

$$\int_1^t \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^t = \ln t.$$

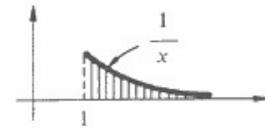
Assim,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty.$$

Logo, a integral imprópria é divergente.



$$\text{área} = \int_1^t \frac{1}{x} dx = \ln t$$



$$\text{área} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$$

**EXEMPLO 3.** Suponha  $s > 0$  e calcule  $\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos t dt$ .

*Solução*

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos t dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u e^{-st} \cos t dt.$$

$$\int_0^u e^{-st} \cos t dt = [e^{-st} \text{sen } t]_0^u - \int_0^u -se^{-st} \text{sen } t dt = e^{-su} \text{sen } u + s \int_0^u e^{-st} \text{sen } t dt.$$

Assim

$$\textcircled{1} \quad \int_0^u e^{-st} \cos t dt = e^{-su} \text{sen } u + s \int_0^u e^{-st} \text{sen } t dt$$

Por outro lado,

$$\int_0^u e^{-st} \text{sen } t dt = [e^{-st} (-\cos t)]_0^u - \int_0^u -se^{-st} (-\cos t) dt$$

daí

$$\textcircled{2} \quad \int_0^u e^{-st} \text{sen } t dt = -e^{-su} \cos u + 1 - s \int_0^u e^{-st} \cos t dt.$$

Substituindo  $\textcircled{2}$  em  $\textcircled{1}$  vem

$$\int_0^u e^{-st} \cos t dt = e^{-su} \text{sen } u - se^{-su} \cos u + s - s^2 \int_0^u e^{-st} \cos t dt.$$

Daí

$$(1 + s^2) \int_0^u e^{-st} \cos t dt = e^{-su} \text{sen } u - se^{-su} \cos u + s$$

e, portanto,

$$\int_0^u e^{-st} \cos t dt = \frac{1}{1 + s^2} [e^{-su} \text{sen } u - se^{-su} \cos u + s].$$

Sendo  $\sin u$  e  $\cos u$  limitadas e  $\lim_{u \rightarrow +\infty} e^{-su} = 0$  (lembre-se de que estamos supondo  $s > 0$ ), resulta

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} e^{-su} \sin u = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} se^{-su} \cos u = 0$$

e, portanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos t \, dt = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+s^2} [e^{-su} \sin u - se^{-su} \cos u + s] = \frac{s}{1+s^2}.$$

Assim,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos t \, dt = \frac{s}{1+s^2}$$

**Definição 2.** Seja  $f$  integrável em  $[t, a]$  para todo  $t < a$ . Definimos

$$\int_{-\infty}^a f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) \, dx.$$

**Definição 3.** Seja  $f$  integrável em  $[-t, t]$ , para todo  $t > 0$ . Definimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^0 f(x) \, dx + \int_0^{+\infty} f(x) \, dx$$

desde que ambas as integrais do 2.º membro sejam convergentes.

**Observação.** Com relação à definição 3, se as duas integrais que ocorrem no 2.º membro forem iguais a  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ), ou se uma delas for convergente e a outra  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ), poremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = +\infty \quad \left( \text{resp.} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = -\infty \right).$$

#### Exercícios 4.1

1. Calcule:

a)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \, dx$

c)  $\int_0^{+\infty} e^{-sx} \, dx$  ( $s > 0$ )

e)  $\int_0^{+\infty} te^{-t} \, dt$

g)  $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} \, dx$

i)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{s^2+x^2} \, dx$  ( $s > 0$ )

b)  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx$

d)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

f)  $\int_0^{+\infty} te^{-st} \, dt$  ( $s > 0$ )

h)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx$

j)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} \, dx$

l)  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x-1} \, dx$

n)  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} \, dx$

p)  $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t \, dt$

2. Calcule  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \, dx$ , onde  $\alpha$  é um real dado.

3. Calcule

a)  $\int_{-\infty}^0 e^x \, dx$

c)  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

e)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$  onde  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$

f)  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \, dx$

h)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$  onde  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$

4. Determine  $m$  para que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = 1$ , sendo

$$f(x) = \begin{cases} m & \text{se } |x| \leq 3 \\ 0 & \text{se } |x| > 3 \end{cases}$$

5. Determine  $k$  para que se tenha  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{kt} \, dt = 1$ .

6. Determine  $m$  para que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = 1$  onde

$$f(x) = \begin{cases} mx^2 & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

7. Sejam dados um real  $s > 0$  e um natural  $n \neq 0$ .

a) Verifique que

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} t^n \, dt = \frac{n}{s} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-st} \, dt.$$

b) Mostre que  $\int_0^{+\infty} e^{-st} t^n \, dt = \frac{n!}{s^{n+1}}$ .

8. Sejam  $\alpha$  e  $s$ ,  $s > 0$ , reais dados. Verifique que

a)  $\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin \alpha t \, dt = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$  ( $\alpha \neq 0$ )

m)  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} \, dx$

o)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} \, dx$

q)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3+x} \, dx$

b)  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^5} \, dx$

d)  $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} \, dx$

g)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} \, dx$

b)  $\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos at \, dt = \frac{s}{s^2 + a^2}$   
 c)  $\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} \, dt = \frac{1}{s - a} \quad (s > a)$   
 d)  $\int_0^{+\infty} e^{-st} \, dt = \frac{1}{s}$   
 e)  $\int_0^{+\infty} e^{-st} t \, dt = \frac{1}{s^2}$   
 f)  $\int_0^{+\infty} e^{-st} t e^{at} \, dt = \frac{1}{(s - a)^2} \quad (s > a)$

9. Utilizando o Exerc. 8, calcule  $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) \, dt$  sendo:

a)  $f(t) = \sin t + 3 \cos 2t$       b)  $f(t) = 3t + 2e^{3t} + te^t$

10. Suponha que, para todo  $t > 0$ ,  $f$  seja integrável em  $[-t, t]$ ; suponha, ainda, que  $f(x) \geq 0$  para todo  $x$ . Prove que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x) \, dx.$$

### 4.2. FUNÇÃO DADA POR UMA INTEGRAL IMPRÓPRIA

Suponhamos  $f$  definida em  $\mathbb{R}$  e tal que, para todo  $x$ ,  $\int_{-\infty}^x f(t) \, dt$  seja convergente. Podemos, então, considerar a função  $F$  definida em  $\mathbb{R}$  dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt.$$

Fixado o real  $a$ , para todo real  $u$ ,

$$\int_u^x f(t) \, dt = \int_u^a f(t) \, dt + \int_a^x f(t) \, dt;$$

fazendo  $u \rightarrow -\infty$  resulta

$$\int_{-\infty}^x f(t) \, dt = \int_{-\infty}^a f(t) \, dt + \int_a^x f(t) \, dt$$

e, portanto,

$$F(x) = \int_{-\infty}^a f(t) \, dt + H(x)$$

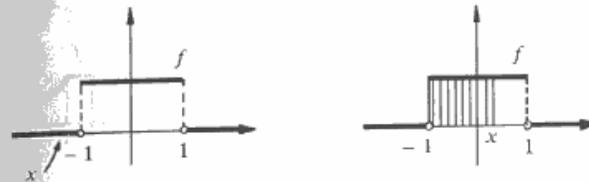
onde

$$H(x) = \int_a^x f(t) \, dt.$$

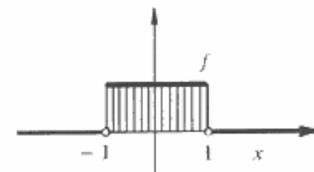
Já vimos que  $H(x)$  é contínua e que  $H$  é derivável em todo  $x$  em que  $f$  for contínua; além do mais,  $H'(x) = f(x)$  em todo  $x$  em que  $f$  for contínua. Como  $\int_{-\infty}^a f(t) \, dt$  é constante, resulta que  $F$  é contínua e que  $F'(x) = f(x)$  em todo  $x$  em que  $f$  for contínua.

**EXEMPLO 1.** Esboce o gráfico de  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt$  onde  $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |t| > 1. \end{cases}$

Solução



$$\int_{-\infty}^x f(t) \, dt = \int_{-\infty}^x 0 \, dt \quad \int_{-\infty}^x f(t) \, dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 \, dt + \int_{-1}^x 1 \, dt$$

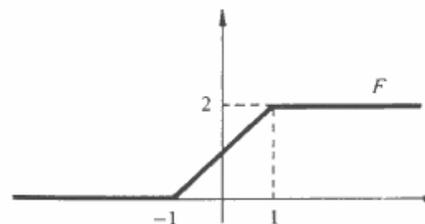


$$\int_{-\infty}^x f(t) \, dt = \int_{-\infty}^{-1} 0 \, dt + \int_{-1}^1 0 \, dt + \int_1^x 0 \, dt$$

$$\int_{-\infty}^x f(t) \, dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 \, dt & \text{se } x \leq -1 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0 \, dt + \int_{-1}^x 1 \, dt & \text{se } |x| < 1 \\ \int_{-\infty}^{-1} 0 \, dt + \int_{-1}^1 1 \, dt + \int_1^x 0 \, dt & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

ou seja,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -1 \\ x + 1 & \text{se } |x| < 1 \\ 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



**Observe:**  $F$  é contínua e  $F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > 1 \\ 1 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$

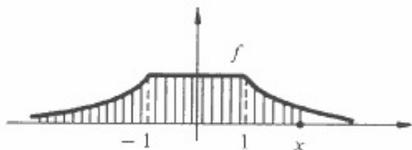
**EXEMPLO 2.** Esboce o gráfico da função  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$  onde  $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} & \text{se } |t| \geq 1 \\ 1 & \text{se } |t| < 1 \end{cases}$

*Solução*



$$\int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{t^2} dt$$

$$\int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2} dt + \int_{-1}^x 1 dt$$



$$\int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2} dt + \int_{-1}^1 1 dt + \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$$

Assim,

$$\int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^x \frac{1}{t^2} dt & \text{se } x < -1 \\ \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2} dt + \int_{-1}^x 1 dt & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2} dt + \int_{-1}^1 1 dt + \int_1^x \frac{1}{t^2} dt & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^x \frac{1}{t^2} dt = \lim_{k \rightarrow -\infty} \int_k^x \frac{1}{t^2} dt = \lim_{k \rightarrow -\infty} \left[ -\frac{1}{x} + \frac{1}{k} \right] = -\frac{1}{x}.$$

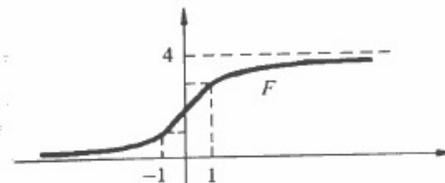
Em particular,  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2} dt = 1$ . Então

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{se } x \leq -1 \\ 1 + \left[ t \right]_{-1}^x & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ 1 + 2 + \left[ -\frac{1}{t} \right]_1^x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

ou seja,

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{se } x \leq -1 \\ x + 2 & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ -\frac{1}{x} + 4 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Como  $f$  é contínua,  $F$  é derivável em todos os pontos; assim, o gráfico de  $F$  não apresenta "bico".



Exercícios 4.2

Esboce o gráfico de  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$  onde

1.  $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |t| > 1 \end{cases}$

2.  $f(t) = \begin{cases} t & \text{se } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{se } |t| > 1 \end{cases}$

3.  $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{se } t \geq 1 \\ 0 & \text{se } t < 1 \end{cases}$

4.  $f(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{t} & \text{se } t > 1 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$

5.  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| > 1 \\ 1 - t^2 & \text{se } |t| \leq 1 \end{cases}$

6.  $f(t) = e^{-|t|}$

7.  $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$

8.  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ e^{-t} & \text{se } t > 0 \end{cases}$

9.  $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{(t-2)^2} & \text{se } t \leq 1 \\ \frac{1}{t} & \text{se } t > 1 \end{cases}$

10.  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ \frac{1}{t} & \text{se } t > 1 \end{cases}$

### 4.3. INTEGRAIS IMPRÓPRIAS: CONTINUAÇÃO

O objetivo deste parágrafo é estender o conceito de integral para função definida e não-limitada num intervalo de extremos  $a$  e  $b$ , com  $a$  e  $b$  reais.

**Definição 1.** Seja  $f$  não-limitada em  $]a, b]$  e integrável em  $[t, b]$  para todo  $t$  em  $]a, b[$ . Defini-

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

desde que o limite exista e seja finito. O número  $\int_a^b f(x) dx$  denomina-se *integral imprópria*

de  $f$  em  $]a, b]$ . Se o limite for  $+\infty$  ou  $-\infty$ , continuaremos a nos referir a  $\int_a^b f(x) dx$  como uma

integral imprópria e escreveremos  $\int_a^b f(x) dx = +\infty$  ou  $\int_a^b f(x) dx = -\infty$ , conforme o caso.

Se ocorrer um destes casos ou se o limite não existir, diremos que a integral imprópria é *divergente*. Se o limite for finito, diremos que a integral imprópria é *convergente*.

Já observamos que uma *condição necessária* para uma função  $f$  admitir integral de Riemann num intervalo  $[a, b]$  é que  $f$  seja limitada em  $[a, b]$ . Deste modo, se  $f$  não for limitada em  $[a, b]$ ,  $f$  não poderá admitir, neste intervalo, integral de Riemann; entretanto, poderá admitir *integral imprópria*.

**EXEMPLO.** Calcule  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ .

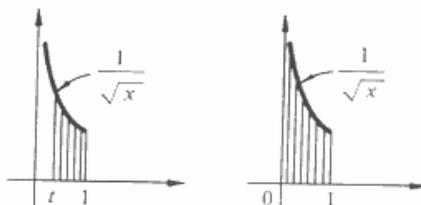
*Solução*

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  é não limitada em  $]0, 1]$  e integrável (segundo Riemann) em  $[t, 1]$  para  $0 < t < 1$ ; de acordo com a definição anterior,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} [2 - 2\sqrt{t}] = 2$$

ou seja,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2.$$



$$\text{área} = \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\text{área} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

### Exercícios 4.3

1. Calcule

a)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

b)  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$

c)  $\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}} dx$

d)  $\int_0^1 \ln x dx$

2. Suponha  $f$  não-limitada em  $[a, b]$  e integrável em  $[a, t]$  para  $a < t < b$ . Defina  $\int_a^b f(x) dx$ .

3. Calcule

a)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

b)  $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$

c)  $\int_{-1}^2 \frac{1}{4-x^2} dx$

d)  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

4. Suponha  $f$  não-limitada e contínua nos intervalos  $[a, c]$  e  $[c, b]$ . Defina  $\int_a^b f(x) dx$ .

5. Calcule

a)  $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$

b)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{|x|} dx$

6. Suponha  $f$  contínua em  $]a, b[$  e não-limitada em  $]a, c]$  e em  $[c, b]$ . Defina  $\int_a^b f(x) dx$ .

## 4.4. CONVERGÊNCIA E DIVERGÊNCIA DE INTEGRAIS IMPRÓPRIAS: CRITÉRIO DE COMPARAÇÃO

Em muitas ocasiões estaremos interessados não em saber qual o valor de uma integral imprópria, mas sim em saber se tal integral imprópria é convergente ou divergente. Para tal fim, vamos estabelecer, nesta seção, o *critério de comparação* que nos permite concluir a convergência ou divergência de uma integral imprópria comparando-a com outra que se sabe ser convergente ou divergente.

Observamos, inicialmente, que se  $f$  for integrável em  $[a, t]$ , para todo  $t > a$ , e se  $f(x) \geq 0$  em  $[a, +\infty[$ , então a função

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \geq a$$

será *crescente* em  $[a, +\infty[$ . De fato, se  $x_1$  e  $x_2$  são dois reais quaisquer, com  $a \leq x_1 < x_2$ , então

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_a^{x_2} f(t) dt - \int_a^{x_1} f(t) dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \geq 0.$$

Assim, quaisquer que sejam  $x_1, x_2$  em  $[a, +\infty[$ ,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2).$$

Logo,  $F$  é crescente em  $[a, +\infty[$ . Segue que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$  ou será finito ou  $+\infty$ ; será finito se existir  $M > 0$  tal que  $\int_a^x f(t) dt \leq M$  para todo  $x \geq a$  (veja Exerc. 9).

**Crítério de comparação.** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções integráveis em  $[a, t]$ , para todo  $t > a$ , e tais que, para todo  $x \geq a$ ,  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ . Então

- a)  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  convergente  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$  convergente.  
 b)  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  divergente  $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x) dx$  divergente.

*Demonstração*

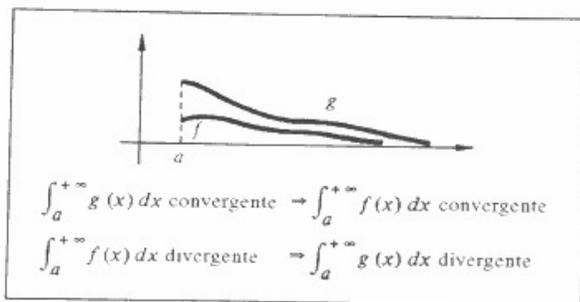
a)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t g(x) dx$  é finito, pois, por hipótese,  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  é convergente. De  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ , para todo  $x \geq a$ , resulta

$$\int_a^t f(x) dx \leq \int_a^t g(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

Sendo  $F(t) = \int_a^t f(x) dx$  crescente e limitada, resulta que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$  será finito e,

portanto,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  será convergente.

b) Fica a seu cargo. ■



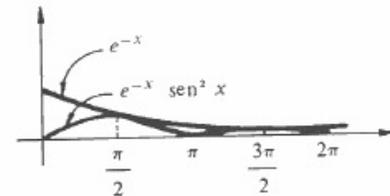
**EXEMPLO 1.** Verifique que  $\int_a^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x dx$  é convergente.

*Solução*

$$0 \leq e^{-x} \sin^2 x \leq e^{-x}, \text{ para todo } x \geq 0.$$

$$\int_a^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [-e^{-t} + 1] = 1, \text{ logo,}$$

$\int_a^{+\infty} e^{-x} dx$  é convergente. Segue do critério de comparação que  $\int_a^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x dx$  é convergente e, além disso,  $\int_a^{+\infty} e^{-x} \sin^2 x dx \leq 1$ .



**EXEMPLO 2.** Verifique que a integral imprópria  $\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^4 + 3} dx$  é divergente.

*Solução*

$$\frac{x^3}{x^4 + 3} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{x^4}}$$

Para todo  $x \geq 1$ ,  $\frac{1}{1 + \frac{3}{x^4}} \geq \frac{1}{4}$ , e, portanto,

$$\frac{x^3}{x^4 + 3} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x} > 0.$$

De  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{4x} dx = +\infty$ , segue, pelo critério de comparação, que  $\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{x^4 + 3} dx$  é divergente.

O exemplo que daremos a seguir será bastante útil no estudo de convergência de integrais impróprias cujo integrando não seja sempre positivo. Tal exemplo conta-nos que se  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  for convergente, então  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  também será (não vale a recíproca).

**EXEMPLO 3.** Suponha  $f$  integrável em  $[a, t]$ , para todo  $t \geq a$ . Prove

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx \text{ convergente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ convergente.}$$

*Solução*

Para todo  $x \geq a$ ,

$$0 \leq |f(x)| + f(x) \leq 2|f(x)|.$$

Sendo  $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$  convergente, resulta, do critério de comparação, que  $\int_a^{+\infty} [|f(x)| + f(x)] dx$  é, também, convergente. Temos

$$\int_a^t f(x) dx = \int_a^t \{[|f(x)| + f(x)] - |f(x)|\} dx = \int_a^t [|f(x)| + f(x)] dx - \int_a^t |f(x)| dx.$$

Como  $\int_a^{+\infty} [|f(x)| + f(x)] dx$  e  $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$  são convergentes, resulta que  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  também é convergente.

**EXEMPLO 4.** A integral imprópria  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^3 x dx$  é convergente ou divergente? Justifique.

*Solução*

$$0 \leq |e^{-x} \sin^3 x| \leq e^{-x}.$$

Como  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$  é convergente, então  $\int_0^{+\infty} |e^{-x} \sin^3 x| dx$  também será convergente; pelo

Exemplo 3,  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^3 x dx$  é convergente.

**EXEMPLO 5.** É convergente ou divergente? Justifique.

$$a) \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$b) \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

*Solução*

$$\begin{aligned} a) \int_1^t \frac{1}{x} \sin x dx &= \left[ \frac{1}{x} (-\cos x) \right]_1^t - \int_1^t \frac{1}{x^2} (-\cos x) dx = \\ &= -\frac{\cos t}{t} + \cos 1 - \int_1^t \frac{\cos x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Para todo  $x \geq 1$ ,  $0 \leq \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ . Como  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  é convergente,  $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx$  também será, e, portanto,  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$  é convergente. Como

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\cos t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \overset{\text{limitada}}{\circlearrowleft} (\cos t) = 0$$

resulta

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

ou seja,  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  é convergente.

b) Para todo  $x$ ,  $|\sin x| \leq 1$  e, portanto,

$$\sin^2 x \leq |\sin x|.$$

Segue que, para todo  $x \geq 1$ ,

$$\textcircled{1} \quad \left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \int_1^t \frac{1}{x} \sin^2 x dx &= \left[ \frac{1}{x} \left( \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \right]_1^t - \int_1^t \frac{1}{x^2} \left[ \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right] dx = \\ &= -\frac{\sin 2t}{4t} + \frac{\sin 2}{4} + \int_1^t \left[ \frac{1}{2x} - \frac{\sin 2x}{4x^2} \right] dx. \end{aligned}$$

Tendo em vista que  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{4x^2} dx$  é convergente (por quê?),  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx = +\infty$  e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sin 2t}{4t} = 0, \text{ resulta}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{\sin^2 x}{x} dx = +\infty$$

ou seja,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = +\infty$$

Pelo critério de comparação (veja ①),  $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| dx$  é divergente. Tendo em vista o item a), conclui-se que a recíproca da afirmação do Exemplo 3 não é verdadeira.

O teorema seguinte, cuja demonstração é deixada para exercício, estabelece a convergência ou divergência de certas integrais impróprias e que serão úteis no estudo de divergência e convergência de integrais impróprias.

**Teorema**

- a)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  é convergente para  $\alpha > 1$  e divergente para  $\alpha \leq 1$ .
- b)  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$  é convergente para todo  $\alpha > 0$ .

**Exercícios 4.4**

1. É convergente ou divergente? Justifique.

a)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5 + 3x + 1} dx$

b)  $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1} dx$

c)  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4 + 2x + 1}} dx$

d)  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

e)  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^3} dx$

f)  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$

g)  $\int_4^{+\infty} \frac{2x - 3}{x^3 - 3x^2 + 1} dx$

h)  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} dx$

i)  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \sqrt{x} dx$

j)  $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$

l)  $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^6 + x + 1}} dx$

m)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx$

2. Suponha  $f$  integrável em  $[a, t]$ , para todo  $t \geq a$ , com  $f(x) \geq 0$  em  $[a, +\infty[$ . Suponha que existam um  $\alpha$  real e uma função  $g$  tais que, para todo  $x \geq a$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha} g(x)$ . Suponha, além disso, que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L > 0$  ( $L$  real). Prove:

a)  $\alpha > 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$  convergente

b)  $\alpha \leq 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$  divergente

3. Utilizando o Exerc. 2, estude a convergência ou divergência de cada uma das integrais a seguir.

a)  $\int_2^{+\infty} \frac{x^6 - x + 1}{x^7 - 2x^2 + 3} dx$

b)  $\int_{10}^{+\infty} \frac{x^5 - 3}{\sqrt{x^{20} + x^{10} - 1}} dx$

c)  $\int_1^{+\infty} \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^5 + x + 2} dx$

d)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x \ln(x+1)} dx$

4. Seja  $f$  contínua em  $[0, t]$ , para todo  $t > 0$ , e suponha que existam constantes  $M > 0$  e  $\gamma > 0$  tais que, para todo  $t \geq 0$ ,

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t}.$$

①

Prove que  $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$  é convergente para  $s > \gamma$ .

**Observação.** Uma função  $f$  se diz de ordem exponencial  $\gamma$  se existem constantes  $M > 0$  e  $\gamma > 0$  tais que ① se verifica.

5. Seja  $f$  uma função, com derivada contínua, e de ordem exponencial  $\gamma$ . Verifique que, para  $s > \gamma$ ,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt \text{ é convergente e que}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt - f(0).$$

6. Suponha que  $f$  seja de ordem exponencial  $\gamma$  e que, para todo  $t$  real,

$$f'(t) + 3f(t) = t.$$

②

Mostre que, para todo  $s > \gamma$ ,

③ 
$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \frac{f(0)}{s+3} + \frac{1}{s^2(s+3)}.$$

Conclua que existem constantes  $A, B, C$  tais que

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \frac{f(0)}{s+3} + \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+3}.$$

Agora, utilizando o Exercício 8 da Seção 4.1 e supondo  $f(0) = 1$ , determine  $f$  que verifique ③ e mostre, em seguida, que esta  $f$  satisfaz ②.

**Observação.** A função  $g$  dada por

$$g(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

denomina-se *transformada de Laplace de  $f$* .

7. Procedendo como no exercício anterior, determine  $f$  tal que

a)  $f'(t) - 2f(t) = \cos t$  e  $f(0) = 2$ .

b)  $f'(t) + f(t) = e^{2t}$  e  $f(0) = -1$ .

8. Suponha que  $f$  e  $f'$  sejam de ordens exponencial  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , respectivamente. Suponha, ainda, que  $f''$  seja contínua. Verifique que

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f''(t) dt = s^2 \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt - sf(0) - f'(0)$$

9. Suponha  $F(x)$  crescente em  $[a, +\infty[$ . Prove que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  será finito ou  $+\infty$ . Será finito e igual a  $\sup \{F(x) \mid x \geq a\}$  se existir  $M > 0$  tal que, para todo  $x \geq a$ ,  $F(x) \leq M$ .

## 6

Os Espaços  $\mathbb{R}^n$ 

## 6.1. INTRODUÇÃO

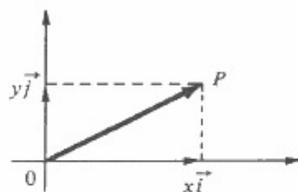
Nosso objetivo, neste capítulo, é introduzir no  $\mathbb{R}^2$  os conceitos de *norma* e de *conjunto aberto*, que generalizam os conceitos de módulo e de intervalo aberto, e que serão fundamentais em tudo o que veremos a seguir. O símbolo  $\mathbb{R}^2$  está sendo usado aqui para indicar o conjunto de todos os pares ordenados de números reais:  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \text{ reais}\}$ .

Para as interpretações geométricas e físicas será muito útil pensar um par ordenado  $(x, y)$  como um vetor do plano. Para isto, fixaremos no plano um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas (o habitual) e identificaremos, então, o par  $(x, y)$  com o vetor  $\vec{OP}$ , onde  $O$  é a origem do sistema e  $P$  o ponto de coordenadas  $(x, y)$ . Esta identificação nos sugerirá como somar pares ordenados e como multiplicar um par ordenado por um escalar a partir das operações sobre vetores, que suporemos conhecidas.

O leitor não terá dificuldade alguma em generalizar os conceitos deste capítulo para o  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , onde  $\mathbb{R}^n$  indica o conjunto de todas as  $n$ -uplas ordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de números reais.

6.2. O ESPAÇO VETORIAL  $\mathbb{R}^2$ 

Identificando  $(x, y)$  com o vetor  $\vec{OP}$  e indicando por  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  os vetores associados respectivamente, a  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  resulta da teoria dos vetores que  $\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$



É imediato que se  $\lambda$  é um escalar, isto é, um número real, então,  $\lambda \vec{OP} = \vec{OP}_1$ , onde  $P_1$  é o ponto de coordenadas  $(\lambda x, \lambda y)$ . Por outro lado, se  $\vec{OQ}$  é o vetor associado a  $(s, t)$  e se  $\vec{OR} =$

$\vec{OP} + \vec{OQ}$ , então  $\vec{OR}$  é o vetor associado a  $(x + s, y + t)$  (verifique). Tudo isto sugere-nos a seguinte definição.

**Definição.** Sejam  $(x, y)$  e  $(s, t)$  dois elementos quaisquer do  $\mathbb{R}^2$  e  $\lambda$  um real qualquer. Definimos:

- $(x + s, y + t)$  é a soma de  $(x, y)$  com  $(s, t)$ :  $(x, y) + (s, t) = (x + s, y + t)$ .
- $(\lambda x, \lambda y)$  é o produto de  $(x, y)$  pelo escalar  $\lambda$ :  $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ .
- $(x, y) + (-1)(s, t)$  é a diferença de  $(x, y)$  e  $(s, t)$ :  $(x, y) - (s, t) = (x, y) + (-1)(s, t)$ .
- $(x, y) = (s, t) \Leftrightarrow x = s \text{ e } y = t$ .

As seguintes propriedades são de imediata verificação: quaisquer que sejam  $(x, y)$ ,  $(s, t)$  e  $(u, v)$  em  $\mathbb{R}^2$  e quaisquer que sejam as escalares  $\alpha$  e  $\beta$  tem-se:

$$A1) [(x, y) + (s, t)] + (u, v) = (x, y) + [(s, t) + (u, v)]$$

$$A2) (x, y) + (s, t) = (s, t) + (x, y)$$

$$A3) (x, y) + (0, 0) = (x, y)$$

$$A4) (x, y) + (-1)(x, y) = (0, 0)$$

$$M1) \alpha[\beta(x, y)] = \alpha\beta(x, y)$$

$$M2) \alpha[(x, y) + (s, t)] = \alpha(x, y) + \alpha(s, t)$$

$$M3) [\alpha + \beta](x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y)$$

$$M4) 1 \cdot (x, y) = (x, y)$$

**Observação.** Uma estrutura de *espaço vetorial* sobre um conjunto não-vazio  $V$  fica determinada quando se definem em  $V$  duas operações, uma de *adição* e outra de *multiplicação de um elemento de  $V$  por um escalar*, satisfazendo as oito propriedades acima listadas. As operações anteriormente definidas determinam, então, sobre o  $\mathbb{R}^2$  uma estrutura de espaço vetorial real; seus elementos podem, então, ser chamados de *vetores*.

## 6.3. PRODUTO ESCALAR. PERPENDICULARISMO

**Definição 1.** O número

$$a_1 a_2 + b_1 b_2$$

denomina-se *produto escalar* dos vetores  $(a_1, b_1)$  e  $(a_2, b_2)$  e indica-se por  $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)$ . Assim,

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

**EXEMPLO 1.** O produto escalar dos vetores  $(2, 3)$  e  $(1, 5)$  é

$$(2, 3) \cdot (1, 5) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 17.$$

Observe que o produto escalar de dois vetores é um número.

Sejam os vetores  $\vec{u} = (a_1, b_1)$ ,  $\vec{v} = (a_2, b_2)$  e  $\vec{w} = (a_3, b_3)$  e seja  $\lambda$  um escalar; são de verificação imediata as seguintes propriedades do produto escalar:

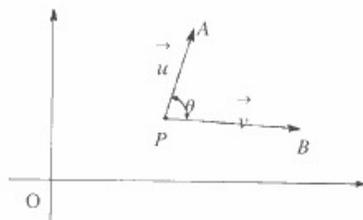
$$(i) \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \text{ (comutativa)}$$

(ii)  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$  (distributiva)

(iii)  $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v})$ .

(iv)  $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ ;  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = (0, 0)$ .

Estamos interessados, a seguir, em definir *perpendicularismo* ou *ortogonalismo* entre vetores do  $\mathbb{R}^2$ . Consideremos os vetores  $\vec{u} = (a_1, b_1)$  e  $\vec{v} = (a_2, b_2)$ . Vamos olhar estes dois vetores aplicados no ponto  $P = (x, y)$  do plano.



A e B são extremidades de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , respectivamente. Temos

$$\vec{OA} = \vec{OP} + \vec{u} = (x, y) + (a_1, b_1) = (x + a_1, y + b_1)$$

e

$$\vec{OB} = \vec{OP} + \vec{v} = (x, y) + (a_2, b_2) = (x + a_2, y + b_2).$$

Assim,

$$A = (x + a_1, y + b_1) \text{ e } B = (x + a_2, y + b_2).$$

Vamos, agora, aplicar a lei dos cossenos ao triângulo APB para determinar  $\cos \theta$ . Temos

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 - 2 \overline{AP} \cdot \overline{PB} \cos \theta$$

onde  $\overline{AB}$  é a distância de A a B,  $\overline{AP}$  de A a P e  $\overline{PB}$  de P a B. Como

$$\overline{AB} = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2},$$

$$\overline{AP} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

e

$$\overline{PB} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

segue que

$$(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 - 2 \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \cos \theta \text{ e, portanto,}$$

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \cos \theta$$

ou seja,

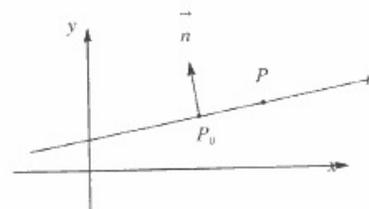
$$\cos \theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Daí, os vetores  $\vec{u} = (a_1, b_1)$  e  $\vec{v} = (a_2, b_2)$  serão *perpendiculares* se e somente se o *produto escalar* de  $(a_1, b_1)$  com  $(a_2, b_2)$  for nulo. Nada mais natural, então, do que a seguinte definição.

**Definição 2.** Dizemos que os vetores  $(a_1, b_1)$  e  $(a_2, b_2)$  são *perpendiculares* ou *ortogonais* se

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = 0.$$

Vejam como fica, em notação de produto escalar, a equação da reta  $r$  que passa pelo ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  e que é perpendicular à direção do vetor  $\vec{n} = (a, b) \neq (0, 0)$ . Vamos olhar  $\vec{n}$  como um vetor aplicado no ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$ .



O ponto  $P = (x, y)$  pertence à reta  $r$  se e somente se o vetor  $P - P_0$  for perpendicular a  $\vec{n} = (a, b)$ . Assim, a equação da reta que passa pelo ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  e é perpendicular à direção do vetor  $\vec{n} = (a, b)$  é

$$\vec{n} \cdot (P - P_0) = 0$$

ou seja,

$$(a, b) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)] = 0.$$

De  $(x, y) - (x_0, y_0) = (x - x_0, y - y_0)$ , segue que a equação acima é equivalente a

$$ax + by = c$$

com  $c = ax_0 + by_0$ . E  $\vec{n} = (a, b)$  é um *vetor perpendicular* à tal reta.

**EXEMPLO 2.** Determine a equação da reta que passa pelo ponto  $(1, 2)$  e que é perpendicular à direção do vetor  $\vec{n} = (-1, 3)$ .

Solução

A equação da reta é

$$\vec{n} \cdot [P - P_0] = 0$$

onde  $\vec{n} = (-1, 3)$ ,  $P = (x, y)$  e  $P_0 = (1, 2)$ . Assim, a equação da reta é

$$(-1, 3) \cdot [(x, y) - (1, 2)] = 0$$

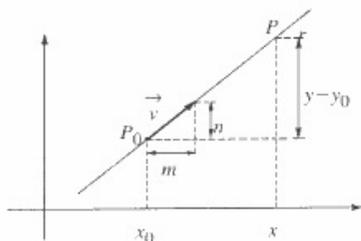
ou

$$-(x - 1) + 3(y - 2) = 0$$

ou ainda

$$-x + 3y - 5 = 0.$$

Consideremos, agora, o vetor  $\vec{v} = (m, n)$ , com  $(m, n) \neq (0, 0)$ , aplicado no ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$ . Na figura seguinte, representamos a reta  $r$  que passa pelo ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  e que tem a direção do vetor  $\vec{v} = (m, n)$ .



Por semelhança de triângulos, para todo  $P = (x, y)$  na reta  $r$ , existe  $t$  tal que

$$\begin{cases} x - x_0 = tm \\ y - y_0 = tn \end{cases}$$

Pois bem,

$$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

são as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  e é paralela à direção do vetor  $\vec{v} = (m, n)$ . Em notação vetorial, esta reta pode ser expressa na forma

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(m, n), \quad t \in \mathbb{R}.$$

**EXEMPLO 3.** Determine a equação, na forma vetorial, da reta que passa pelo ponto  $(3, -1)$  e que é perpendicular à reta  $2x - 3y = 7$ .

Solução

$$\vec{n} = (2, -3) \text{ é perpendicular à reta } 2x - 3y = 7.$$

O que queremos, então, é a reta que passa pelo ponto  $(3, -1)$  e que seja paralela ao vetor  $(2, -3)$ . Assim, a equação da reta pedida é

$$(x, y) = (3, -1) + t(2, -3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

No  $\mathbb{R}^3$ , os conceitos de produto escalar e de ortogonalismo são análogos aos do  $\mathbb{R}^2$ :

$$(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2.$$

$$(a_1, b_1, c_1) \perp (a_2, b_2, c_2) \Leftrightarrow (a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = 0.$$

No espaço, a equação vetorial da reta que passa pelo ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  e que é paralela à direção do vetor  $\vec{v} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  é

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c), \quad t \in \mathbb{R}.$$

A equação do plano que passa pelo ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e que é perpendicular à direção do vetor  $\vec{n} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  é

$$(a, b, c) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0$$

ou

$$\vec{n} \cdot (P - P_0) = 0.$$

Observe que o plano de equação

$$ax + by + cz = d$$

é perpendicular à direção do vetor  $\vec{n} = (a, b, c)$ .

### Exercícios 6.3

- Determine a equação da reta que passa pelo ponto  $(1, 2)$  e que seja paralela à direção do vetor  $\vec{v} = (-1, 1)$ .
- Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto  $(1, -1)$  e que é perpendicular à reta  $2x + y = 1$ .
- Determine um vetor cuja direção seja paralela à reta  $3x + 2y = 2$ .
- Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  e que seja paralela à reta  $3x + 2y = 2$ .



e como  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$  resulta, para todo  $t$ ,

$$\|\vec{u}\|^2 + 2t\vec{u} \cdot \vec{v} + t^2\|\vec{v}\|^2 \geq 0;$$

logo,

$$\Delta = (2\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - 4\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \leq 0$$

e, portanto,

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|. \blacksquare$$

Segue do teorema acima que quaisquer que sejam os vetores não-nulos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^2$  tem-se

$$-1 \leq \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \leq 1.$$

Portanto, existe um único número real  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , tal que

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \text{ ou } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos \theta.$$

Este número real  $\theta$  denomina-se *ângulo* entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

**Teorema 2.** Quaisquer que sejam os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^2$  e qualquer que seja o escalar  $\lambda$  tem-se:

N1)  $\|\vec{u}\| \geq 0$ ;  $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = (0, 0)$ .

N2)  $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$ .

N3) (*Desigualdade triangular*)

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

*Demonstração*

N1) Imediata.

N2) Pondo  $\vec{u} = (x, y)$  tem-se

$$\|\lambda \vec{u}\| = \|\lambda(x, y)\| = \|(\lambda x, \lambda y)\| = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}.$$

Logo,

$$\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \sqrt{x^2 + y^2}$$

ou seja,

$$\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|.$$

N3)  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$

Pela desigualdade de Schwarz

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.$$

Então,

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$$

logo,

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|. \blacksquare$$

**Exercícios 6.4**

1. Generalize para o  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) os conceitos e resultados desta seção.

2. Calcule a norma do vetor dado.

a)  $\vec{u} = (1, 2)$

b)  $\vec{v} = (2, 1, 3)$

c)  $\vec{u} = (0, 1, 2)$

d)  $\vec{v} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

3. Seja  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  um vetor qualquer de  $\mathbb{R}^3$ . Mostre que  $\|\vec{u}\| \geq |u_i|$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

4. Seja  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  um vetor do  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ). Mostre que  $\|\vec{u}\| \geq |u_i|$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

5. Sejam  $\vec{u}, \vec{v}$  dois vetores quaisquer do  $\mathbb{R}^n$ . Verifique que

a)  $\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|$ .

b)  $\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq \|\vec{v}\| - \|\vec{u}\|$ .

c)  $\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq |\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\||$ .

6. Sejam  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  vetores quaisquer do  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que

$$\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq |u_i - v_i|, i = 1, 2, \dots, n.$$

7. Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores quaisquer do  $\mathbb{R}^n$ . Prove:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$

8. Seja  $\vec{u}$  um vetor qualquer do  $\mathbb{R}^n$ . Prove que se  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , para todo  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , então  $\vec{u} = \vec{0}$ .

9. Sejam  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  vetores do  $\mathbb{R}^n$  tais que  $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ , com  $\alpha$  e  $\beta$  reais. Suponha  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  unitários ( $\|\vec{u}\| = 1$  e  $\|\vec{v}\| = 1$ ) e ortogonais. Prove que  $\alpha = \vec{u} \cdot \vec{w}$  e  $\beta = \vec{v} \cdot \vec{w}$ .

10. Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores do  $\mathbb{R}^2$ . Dizemos que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são *linearmente independentes* se, quaisquer que sejam os reais  $\alpha$  e  $\beta$ , se  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}$ , então  $\alpha = \beta = 0$ . Prove que  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  são linearmente independentes se e somente se  $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$ .

11. Sejam  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  vetores quaisquer do  $\mathbb{R}^2$ . Prove que se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  forem linearmente independentes, então existirão (e serão únicos) reais  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ .

12. Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dois vetores unitários e ortogonais do  $\mathbb{R}^2$ . Prove que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são linearmente independentes.

13. Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dois vetores unitários e ortogonais do  $\mathbb{R}^2$ . Prove que para todo  $\vec{w}$  de  $\mathbb{R}^2$  tem-se:  $\vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{u}) \vec{u} + (\vec{w} \cdot \vec{v}) \vec{v}$ .

14. Sejam  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores do  $\mathbb{R}^3$ . Dizemos que  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$  são *linearmente independentes* se, quaisquer que sejam os reais  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , se  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$ , então  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Prove que  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  são linearmente independentes se e somente se  $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$ .

15. Sejam  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  e  $\vec{r}$  vetores quaisquer do  $\mathbb{R}^3$ , com  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$  linearmente independentes. Prove que  $\vec{r}$  é combinação linear de  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$ , isto é, que existem reais  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  tais que  $\vec{r} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$ .

16. Sejam  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$  três vetores unitários quaisquer de  $\mathbb{R}^3$ , sendo dois a dois ortogonais. Prove que para todo  $\vec{r}$  do  $\mathbb{R}^3$  tem-se:

$$\vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{u}) \vec{u} + (\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{v} + (\vec{r} \cdot \vec{w}) \vec{w}.$$

17. Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores não-nulos do  $\mathbb{R}^3$ . Mostre que  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

18. Prove que quaisquer que sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em  $\mathbb{R}^3$

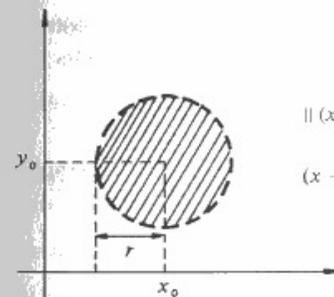
$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

### 6.5. CONJUNTO ABERTO. PONTO DE ACUMULAÇÃO

Sejam  $(x_0, y_0)$  um ponto do  $\mathbb{R}^2$  e  $r > 0$  um real. O conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\}$$

denomina-se *bola aberta* de centro  $(x_0, y_0)$  e raio  $r$ .



$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$$

No plano, a bola aberta de centro  $(x_0, y_0)$  e raio  $r$  é o conjunto de todos os pontos "interiores" ao círculo de centro  $(x_0, y_0)$  e raio  $r$ .

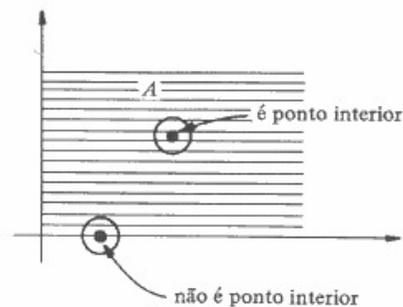
Seja  $A$  um subconjunto não-vazio de  $\mathbb{R}^2$ . Dizemos que  $(x_0, y_0) \in A$  é um *ponto interior* de  $A$  se existir uma bola aberta de centro  $(x_0, y_0)$  contida em  $A$ .

**EXEMPLO 1.** Seja  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$ .

- a) Todo  $(x, y)$ , com  $x > 0$  e  $y > 0$ , é ponto interior de  $A$ .
- b) Todo  $(x, y)$ , com  $x = 0$  ou  $y = 0$ , não é ponto interior de  $A$ .

De fato,

- a) se  $(x, y) \in A$ , com  $x > 0$  e  $y > 0$ , então a bola aberta de centro  $(x, y)$  e raio  $r = \min\{x, y\}$  está contida em  $A$ ; logo,  $(x, y)$  é ponto interior de  $A$ .
- b) se  $(x, y) \in A$ , com  $x = 0$  ou  $y = 0$ , então  $(x, y)$  não é ponto interior de  $A$ , pois  $A$  não contém nenhuma bola aberta de centro  $(x, y)$ .



**Definição.** Seja  $A$  um subconjunto não-vazio de  $\mathbb{R}^2$ . Dizemos que  $A$  é um conjunto aberto se todo ponto de  $A$  for ponto interior.

**Observação.** Por definição, o conjunto vazio é um conjunto aberto.

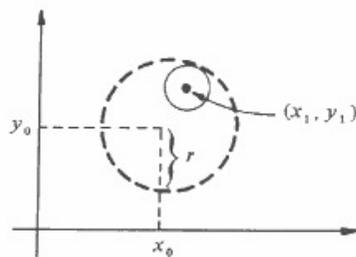
**EXEMPLO 2.** Toda bola aberta é um conjunto aberto.

*Solução*

Seja  $B$  uma bola aberta de centro  $(x_0, y_0)$  e raio  $r$ . Precisamos mostrar que todo ponto  $(x_1, y_1)$  de  $B$  é ponto interior. Seja, então,  $\alpha$  a distância de  $(x_1, y_1)$  a  $(x_0, y_0)$ , isto é,

$$\alpha = \|(x_1, y_1) - (x_0, y_0)\|.$$

Vamos mostrar que a bola aberta  $\bar{B}$  de centro  $(x_1, y_1)$  e raio  $r_1$ , com  $0 < r_1 < r - \alpha$ , está contida em  $B$ .



$$(x, y) \in \bar{B} \Leftrightarrow \|(x, y) - (x_1, y_1)\| < r_1.$$

Seja, então,  $(x, y) \in \bar{B}$ ; temos

$$\begin{aligned} \|(x, y) - (x_0, y_0)\| &= \|(x, y) - (x_1, y_1) + (x_1, y_1) - (x_0, y_0)\| \\ &\leq \|(x, y) - (x_1, y_1)\| + \|(x_1, y_1) - (x_0, y_0)\| < r_1 + \alpha < r. \end{aligned}$$

Logo,  $(x, y) \in B$ . Portanto,  $\bar{B}$  está contido em  $B$ .

**EXEMPLO 3.**

- a)  $\mathbb{R}^2$  é um conjunto aberto.
- b)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$  não é aberto.
- c)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y > 0\}$  é aberto.

*Solução*

- a) Imediato.
- b) Os pontos  $(x, y) \in A$ , com  $x = 0$  ou  $y = 0$ , não são pontos interiores; logo,  $A$  não é aberto.
- c) Se  $(x, y) \in A$ , a bola aberta de centro  $(x, y)$  e raio  $r = \min\{x, y\}$  está contida em  $A$ ; logo,  $A$  é aberto.

**Definição.** Seja  $A$  um subconjunto do  $\mathbb{R}^2$  e seja  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  ( $(a, b)$  pode pertencer ou não a  $A$ ). Dizemos que  $(a, b)$  é ponto de acumulação de  $A$  se toda bola aberta de centro  $(a, b)$  contiver pelo menos um ponto  $(x, y) \in A$ , com  $(x, y) \neq (a, b)$ .

*Grosso modo*, dizer que  $(a, b)$  é ponto de acumulação de  $A$  significa dizer que existem pontos de  $A$ , distintos de  $(a, b)$ , tão próximos de  $(a, b)$  quanto se queira.

**EXEMPLO 4.** Todo  $(x, y)$ , com  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ , é ponto de acumulação do conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y > 0\}$ ; o ponto  $(-\frac{1}{2}, 1)$  não é ponto de acumulação de  $A$ , pois existe

uma bola aberta de centro  $(-\frac{1}{2}, 1)$  que não contém ponto de  $A$ .

**EXEMPLO 5.** O conjunto  $A = \{(1, 2), (-1, 0), (1, 3)\}$  não admite ponto de acumulação, pois qualquer que seja o ponto  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$ , existe uma bola aberta de centro  $(a, b)$  e raio  $r$  que não contém ponto de  $A$  distinto de  $(a, b)$ . (Se  $(a, b)$  não pertence a  $A$ , basta tomar  $r$  como sendo a menor das distâncias de  $(a, b)$  aos pontos  $(1, 2)$ ,  $(-1, 0)$  e  $(1, 3)$ ; se  $(a, b) \in A$ , basta tomar  $r = \frac{1}{2}$ ).

**Exercícios 6.5**

1. Verifique quais dos conjuntos a seguir são aberto em  $\mathbb{R}^2$ .

- a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$
- b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1\}$
- c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } x + y > 3\}$
- d)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1 \text{ e } 1 < y < 3\}$
- e)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 < 0\}$
- f)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 3 \text{ e } x^2 + y^2 < 16\}$
- g)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$
- h)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y > \frac{1}{2}\}$

2. Determine o conjunto dos pontos de acumulação do conjunto dado.

- a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ e } y \text{ inteiros}\}$

c)  $\left\{ \left( \frac{1}{n}, 1 \right) \mid n \neq 0 \text{ natural} \right\}$

d)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1\}$

e)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1, 1 < y < 2\}$

f)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ e } y \text{ racionais}\}$

3. Defina bola aberta de centro  $(x_0, y_0, z_0)$  e raio  $r > 0$  no  $\mathbb{R}^3$ . Interprete geometricamente.

4. Defina bola aberta, conjunto aberto e ponto de acumulação no  $\mathbb{R}^n$ .

5. Sejam  $A$  e  $B$  dois subconjuntos do  $\mathbb{R}^2$ . Prove que se  $A$  e  $B$  forem abertos, então  $A \cup B$  e  $A \cap B$  também serão.

6. Suponha que, para cada natural  $n$ ,  $A_n$  é um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $B$  a reunião de todos os  $A_n$  e  $C$  a intersecção de todos os  $A_n$ . Pergunta-se:  $B$  é aberto?  $C$  é aberto? Justifique.

7. Seja  $F$  um subconjunto do  $\mathbb{R}^2$ . Dizemos que  $F$  é um conjunto fechado se o conjunto de todos os  $(x, y)$  não-pertencentes a  $F$  for aberto. Verifique quais dos conjuntos a seguir são fechados.

a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y > 0\}$ .

c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ e } y \text{ inteiros}\}$ .

d)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ e } y \text{ racionais}\}$ .

e)  $\emptyset$

f)  $\mathbb{R}^2$

g)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1, 1 \leq y \leq 3\}$

h)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1, 1 \leq y < 3\}$

8. Suponha que o conjunto  $B$ ,  $B \subset \mathbb{R}^2$ , não seja aberto. Pode-se concluir que  $B$  é fechado? Sim ou não? Justifique.

9. Dizemos que  $A \subset \mathbb{R}^2$  é um conjunto limitado se existir um  $m > 0$  tal que  $\|(x, y)\| < m$  para todo  $(x, y) \in A$ . Prove que se  $A$  for limitado e se  $A$  contiver um número infinito de pontos, então  $A$  admitirá pelo menos um ponto de acumulação. A afirmação continua verdadeira se uma das hipóteses for omitida?

## 7

## FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL A VALORES EM $\mathbb{R}^n$ . CURVAS

### 7.1. FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL A VALORES EM $\mathbb{R}^2$

Uma função de uma variável real a valores em  $\mathbb{R}^2$  é uma função  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $A$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Uma tal função associa a cada real  $t \in A$ , um único vetor  $F(t) \in \mathbb{R}^2$ . O conjunto  $A$  é o domínio de  $F$  e será indicada por  $D_F$ . Suponhamos sempre que  $A$  ou é um intervalo ou uma reunião de intervalos. O conjunto

$$\text{Im } F = \{F(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in D_F\}$$

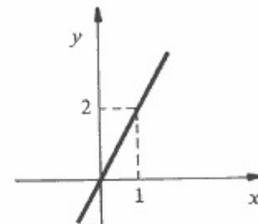
é a *imagem* ou *trajetória* de  $F$ . A imagem de  $F$  é o lugar geométrico, em  $\mathbb{R}^2$ , descrito por  $F(t)$  quando  $t$  varia em  $D_F$ .

**EXEMPLO 1.** Seja  $F$  a função dada por  $F(t) = (t, 2t)$ .

- a) Calcule  $F(0)$  e  $F(1)$ .  
b) Desenhe a imagem de  $F$ .

*Solução*

- a)  $F(0) = (0, 0)$  e  $F(1) = (1, 2)$ .

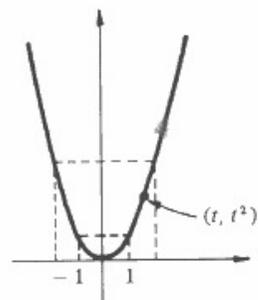


b) A imagem de  $F$  é a reta de equações paramétricas  $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

**EXEMPLO 2.** Desenhe a imagem da função  $F$  dada por  $F(t) = (t, t^2)$ .

*Solução*

A imagem de  $F$  é a curva de equações paramétricas  $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$

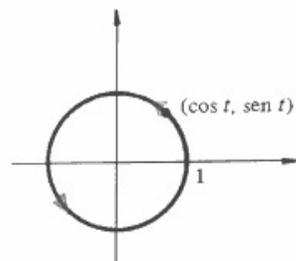


A imagem de  $F$  coincide com o gráfico da parábola  $y = x^2$ .

**EXEMPLO 3.** Seja  $F(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Desenhe a imagem de  $F$ .

*Solução*

A imagem de  $F$  é a circunferência de centro na origem e raio 1.



**EXEMPLO 4.** Seja  $F(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$ ,  $t \geq 0$ . Desenhe a imagem de  $F$ .

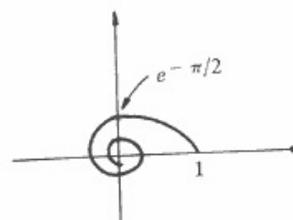
*Solução*

$$F(t) = e^{-t} (\cos t, \sin t)$$

$$\|F(t)\| = \sqrt{(e^{-t} \cos t)^2 + (e^{-t} \sin t)^2}$$

ou seja,

$$\|F(t)\| = e^{-t}.$$

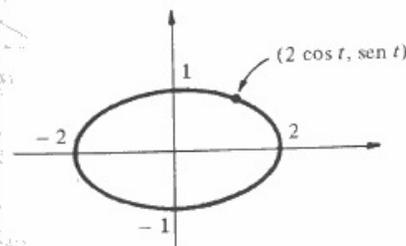


Quando  $t$  varia em  $[0, +\infty[$ , o ponto  $F(t)$  gira em torno da origem e a distância à origem tende a zero para  $t$  tendendo a  $+\infty$ . Observe que a imagem de  $F$  coincide com o gráfico da espiral  $\rho = e^{-\theta}$ ,  $\theta \geq 0$  (coordenadas polares).

**EXEMPLO 5.** Desenhe a imagem da função  $F$  dada por  $F(t) = (2 \cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

*Solução*

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$



Assim, para cada  $t \in [0, 2\pi]$  o ponto  $(2 \cos t, \sin t)$  pertence à elipse  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . Por outro lado, para cada  $(x, y)$  na elipse, existe  $t \in [0, 2\pi]$  tal que

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \text{ (por quê?)}$$

**Exercícios 7.1**

Desenhe a imagem:

- |                             |                        |
|-----------------------------|------------------------|
| 1. $F(t) = (1, t)$          | 2. $F(t) = (t, t + 1)$ |
| 3. $F(t) = (2t - 1, t + 2)$ | 4. $F(t) = (t, t^3)$   |

5.  $F(t) = (t^2, t)$

7.  $F(t) = (\cos t, 2 \sin t)$

9.  $F(t) = (\sin t, \sin^2 t)$

11.  $F(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), t \geq 0$

6.  $F(t) = (t^2, t^4)$

8.  $F(t) = (\sin t, \sin t)$

10.  $F(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2 \sin t)$

12.  $F(t) = (\sin t, t)$

### 7.2. FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL A VALORES EM $\mathbb{R}^3$

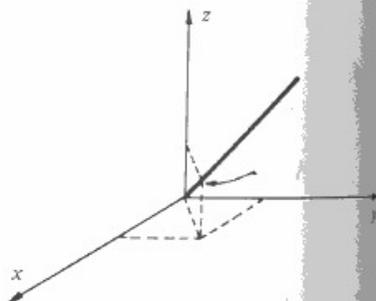
Uma função de uma variável real a valores em  $\mathbb{R}^3$  é uma função  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $A$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Uma tal função associa, a cada  $t \in A$ , um único vetor  $F(t) \in \mathbb{R}^3$ . A imagem ou trajetória de  $F$  é o lugar geométrico, em  $\mathbb{R}^3$ , descrito por  $F(t)$ , quando  $t$  varia em  $D_F$ .

**EXEMPLO 1.** Desenhe a imagem de  $F(t) = (t, t, t), t \geq 0$ .

*Solução*

A imagem de  $F$  é a semi-reta de equações paramétricas

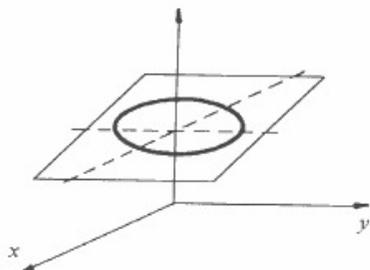
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad t \geq 0$$



**EXEMPLO 2.** Desenhe a imagem de  $F(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ .

*Solução*

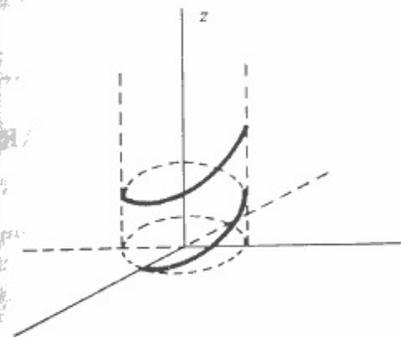
A imagem de  $F$  é uma circunferência situada no plano  $z = 1$ , com centro no eixo  $Oz$  e raio 1.



**EXEMPLO 3.** Desenhe a imagem de  $F(t) = (\cos t, \sin t, bt), t \geq 0$ , onde  $b > 0$  é um real fixo.

*Solução*

A imagem de  $F$  é uma hélice circular reta. Quando  $t$  varia em  $[0, +\infty[$ , a projeção de  $F(t)$ , sobre o plano  $xy$ , descreve a circunferência  $x = \cos t, y = \sin t$ , ao passo que a projeção sobre o eixo  $Oz$  descreve um movimento uniforme, com equação  $z = bt$ .



Muitas vezes será necessário considerar funções de uma variável real a valores em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 3$ . Os próximos exemplos exibem funções de uma variável real a valores em  $\mathbb{R}^4$  e em  $\mathbb{R}^5$ , respectivamente.

**EXEMPLO 4.**  $F(t) = (t, t^2, 1, t^2), t \in \mathbb{R}$ , é uma função de uma variável real a valores em  $\mathbb{R}^4$ .

**EXEMPLO 5.**  $F(t) = (\cos t, \sin t, t^2, t, t^3), t \in \mathbb{R}$ , é uma função de uma variável real a valores em  $\mathbb{R}^5$ .

#### Exercícios 7.2

1. Desenhe a imagem:

a)  $F(t) = (1, t, 1), t \in \mathbb{R}$

c)  $F(t) = (t, t, 1), t \geq 0$

e)  $F(t) = (t, t, 1 + \sin t), t \geq 0$

g)  $F(t) = (\cos t, \sin t, 2)$

i)  $F(t) = \left(t, t, \frac{1}{t}\right), t > 0$

l)  $F(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, e^{-t}), t \geq 0$

n)  $F(t) = (\sin t, \sin t, t), t \geq 0$

b)  $F(t) = (1, 1, t), t \geq 0$

d)  $F(t) = (1, 0, t), t \in \mathbb{R}$

f)  $F(t) = (t, \cos t, \sin t), t \geq 0$

h)  $F(t) = (\cos t, \sin t, e^{-t}), t \geq 0$

j)  $F(t) = (t, t, t^2), t \geq 0$

m)  $F(t) = (\sin t, \sin t, \sqrt{2} \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$

o)  $F(t) = (1 + \sin t, 1 + \sin t, \cos t)$

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

2. Seja  $F$  dada por  $F(t) = (\ln t, t, \sqrt{1-t^2}, t^2)$ .

a) Determine o domínio de  $F$ .

b) Calcule  $F\left(\frac{3}{5}\right)$ .

3. Determine o domínio.

a)  $F(t) = \left( t, \sqrt{\frac{t-2}{t+1}}, \ln(5-t^2), e^{-t} \right)$ .

b)  $F(t) = \left( 2, \frac{1}{t}, \sqrt[4]{2-t^2}, \operatorname{arctg} t \right)$ .

### 7.3. OPERAÇÕES COM FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL A VALORES EM $\mathbb{R}^n$

Seja  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de uma variável real a valores em  $\mathbb{R}^n$ ; então existem, e são únicas,  $n$  funções a valores reais  $F_i: A \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, \dots, n$ , tais que, qualquer que seja  $t \in A$ ,

$$F(t) = (F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)).$$

Tais funções são denominadas *funções componentes* de  $F$ . Escreveremos  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$  para indicar a função cujas componentes são  $F_1, F_2, \dots, F_n$ .

**EXEMPLO 1.** Seja  $F(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t), t \in \mathbb{R}$ . As componentes de  $F$  são as funções  $F_1, F_2, F_3$  definidas em  $\mathbb{R}$  e dadas, respectivamente, por  $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t$  e  $z = t$ .

**EXEMPLO 2.** Seja  $F(t) = (t, \sqrt{t}, \operatorname{sen} 3t, \operatorname{arctg} t), t \geq 0$ . As componentes de  $F$  são as funções  $F_1, F_2, F_3, F_4$  dadas por  $F_1(t) = t, F_2(t) = \sqrt{t}, F_3(t) = \operatorname{sen} 3t$  e  $F_4(t) = \operatorname{arctg} t$ , com  $t \geq 0$ .

Sejam  $F, G: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  duas funções de uma variável real a valores em  $\mathbb{R}^n, f: A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função a valores reais e  $k$  uma constante. Definimos:

a) a função  $F + G: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$(F + G)(t) = F(t) + G(t)$$

denomina-se *soma* de  $F$  e  $G$ .

b) a função  $kF: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$(kF)(t) = kF(t)$$

é o *produto de  $F$  pela constante  $k$* .

c) a função  $f \cdot F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$(f \cdot F)(t) = f(t) F(t)$$

é o *produto de  $F$  pela função escalar  $f$* .

d) a função  $F \cdot G: A \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$(F \cdot G)(t) = F(t) \cdot G(t)$$

onde  $F(t) \cdot G(t) = F_1(t) \cdot G_1(t) + F_2(t) \cdot G_2(t) + \dots + F_n(t) \cdot G_n(t)$ , é o *produto escalar de  $F$  e  $G$* . Estamos supondo aqui  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$  e  $G = (G_1, G_2, \dots, G_n)$ .  
e) Seja  $n = 3$ . A função  $F \wedge G: A \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$(F \wedge G)(t) = F(t) \wedge G(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_1(t) & F_2(t) & F_3(t) \\ G_1(t) & G_2(t) & G_3(t) \end{vmatrix}$$

denomina-se *produto vetorial* de  $F$  e  $G$ , onde

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_1(t) & F_2(t) & F_3(t) \\ G_1(t) & G_2(t) & G_3(t) \end{vmatrix} = [F_2(t)G_3(t) - F_3(t)G_2(t)] \vec{i} + [F_3(t)G_1(t) - F_1(t)G_3(t)] \vec{j} + [F_1(t)G_2(t) - F_2(t)G_1(t)] \vec{k}.$$

(Veja Exerc. 11 da Seção 6.3).

**EXEMPLO 3.** Sejam as funções  $F, G$  e  $f$ , definidas em  $\mathbb{R}$ , e dadas por  $F(t) = (\cos 3t, \operatorname{sen} 2t, t^2), G(t) = (3, t^3, \operatorname{arctg} t)$  e  $f(t) = e^{-2t}$ . Temos

a) o produto escalar de  $F$  e  $G$  é a função  $H$  dada por

$$H(t) = F(t) \cdot G(t) = 3 \cos 3t + t^3 \operatorname{sen} 2t + t^2 \operatorname{arctg} t.$$

b) o produto de  $F$  pela função escalar  $f$  é a função com valores em  $\mathbb{R}^3$  dada por

$$f(t) F(t) = e^{-2t} (\cos 3t, \operatorname{sen} 2t, t^2) = (e^{-2t} \cos 3t, e^{-2t} \operatorname{sen} 2t, e^{-2t} t^2).$$

c) O produto vetorial de  $F$  e  $G$  é a função a valores em  $\mathbb{R}^3$  dada por

$$(F \wedge G)(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos 3t & \operatorname{sen} 2t & t^2 \\ 3 & t^3 & \operatorname{arctg} t \end{vmatrix} = (\operatorname{sen} 2t \operatorname{arctg} t - t^5) \vec{i} + (3t^2 - \cos 3t \operatorname{arctg} t) \vec{j} + (t^3 \cos 3t - 3 \operatorname{sen} 2t) \vec{k}.$$

Uma função de uma variável real a valores em  $\mathbb{R}^n$  será frequentemente indicada com a notação vetorial  $\vec{F}$ .

**EXEMPLO 4.** Sejam as funções  $\vec{F}$  e  $\vec{G}$  dadas por  $\vec{F}(t) = (t, t^2, 2)$  e  $\vec{G}(t) = (3, t, t)$ . Calcule

- a)  $\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)$
- b)  $t\vec{F}(t)$
- c)  $\vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t)$
- d)  $2\vec{F}(t) + 3\vec{G}(t)$ .

*Solução*

a)  $\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = 3t + t^3 + 2t = 5t + t^3.$

b)  $t \vec{F}(t) = t(t, t^2, 2) = (t^2, t^3, 2t)$ .

c)  $\vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & t^2 & 2 \\ 3 & t & t \end{vmatrix} = (t^3 - 2t) \vec{i} + (6 - t^2) \vec{j} + (t^2 - 3t^2) \vec{k}$

ou seja,

$\vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t) = (t^3 - 2t) \vec{i} + (6 - t^2) \vec{j} - 2t^2 \vec{k}$ .

d)  $2 \vec{F}(t) + 3 \vec{G}(t) = 2(t, t^2, 2) + 3(3, t, t) = (2t + 9, 2t^2 + 3t, 4 + 3t)$ .

Exercícios 7.3

- Sejam  $\vec{F}(t) = (t, \text{sen } t, 2)$  e  $\vec{G}(t) = (3, t, t^2)$ . Calcule
  - $\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)$
  - $e^{-t} \vec{F}(t)$
  - $\vec{F}(t) - 2 \vec{G}(t)$
  - $\vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t)$
- Calcule  $\vec{r}(t) \wedge \vec{x}(t)$ , onde  $\vec{r}(t) = t \vec{i} + 2 \vec{j} + t^2 \vec{k}$  e  $\vec{x}(t) = t \vec{i} - \vec{j} + t \vec{k}$ .
- Calcule  $\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)$ , onde  $\vec{u}(t) = \text{sen } t \vec{i} + \text{cos } t \vec{j} + t \vec{k}$  e  $\vec{v}(t) = \text{sen } t \vec{i} + \text{cos } t \vec{j} + 1$ .
- Sejam  $\vec{F}, \vec{G}, \vec{H}$  três funções definidas em  $A \subset \mathbb{R}$  e a valores em  $\mathbb{R}^3$ . Verifique que
  - $\vec{F} \wedge \vec{G} = -\vec{G} \wedge \vec{F}$
  - $\vec{F} \cdot (\vec{G} + \vec{H}) = \vec{F} \cdot \vec{G} + \vec{F} \cdot \vec{H}$
  - $\vec{F} \wedge (\vec{G} + \vec{H}) = \vec{F} \wedge \vec{G} + \vec{F} \wedge \vec{H}$

7.4. LIMITE E CONTINUIDADE

Antes de definirmos limites faremos a seguinte observação: sempre que estivermos lidando com função de uma variável real ficará subentendido que o domínio ou é um intervalo ou uma reunião de intervalos.

**Definição 1.** Seja  $F$  uma função de uma variável real a valores em  $\mathbb{R}^n$  e seja  $t_0$  um ponto do domínio de  $F$  ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de  $F$ . Dizemos que  $F(t)$  tende a  $L$ ,  $L \in \mathbb{R}^n$ , quando  $t$  tende a  $t_0$ , e escrevemos

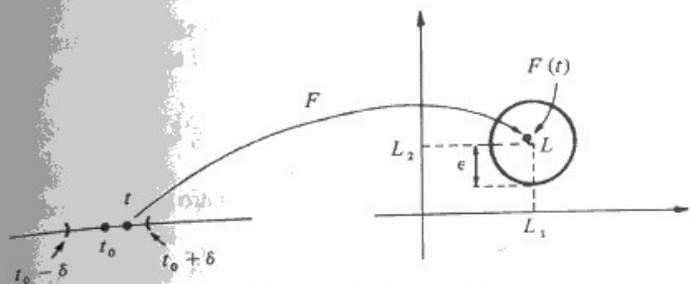
$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L$ , se para todo  $\epsilon > 0$  dado, existir  $\delta > 0$  tal que, para todo  $t \in D_F$ ,  
 $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|F(t) - L\| < \epsilon$ .

Observação

$\|F(t) - L\| < \epsilon \Leftrightarrow F(t) \in B_\epsilon(L)$

onde  $B_\epsilon(L)$  é a bola aberta de centro  $L$  e raio  $\epsilon$ :  $B_\epsilon(L) = \{Y \in \mathbb{R}^n \mid \|Y - L\| < \epsilon\}$ .

A figura seguinte nos dá uma visão geométrica do significado de  $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L$ , no caso  $n = 2$ :



dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que  $F(t)$  permanece na bola aberta  $B_\epsilon(L)$  quando  $t$  percorre o intervalo  $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ ,  $t \neq t_0$  e  $t \in D_F$ .

**EXEMPLO 1.** Seja  $F$  uma função de uma variável com valores em  $\mathbb{R}^n$  e seja  $L \in \mathbb{R}^n$ . Mostre que

$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \|F(t) - L\| = 0$ .

Solução

$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall t \in D_F \\ 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|F(t) - L\| < \epsilon \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall t \in D_F \\ 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|F(t) - L\| - 0 < \epsilon \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \|F(t) - L\| = 0$ .

O exemplo acima nos diz que se  $F(t)$  tende a  $L$ , para  $t \rightarrow t_0$ , então a distância de  $F(t)$  a  $L$  ( $\|F(t) - L\|$ ) tende a zero, para  $t \rightarrow t_0$ , e reciprocamente.

Antes de demonstrar o próximo teorema, lembramos que se  $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , então, para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\|\vec{X}\| \geq |x_i|$ , ou seja, o comprimento de  $\vec{X}$  é maior ou igual ao módulo de qualquer uma de suas componentes (veja Exerc. 4 — 6.4).

Seja, agora,  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$  uma função de uma variável com valores em  $\mathbb{R}^n$  e seja  $L = (L_1, L_2, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$ ; temos

$F(t) - L = (F_1(t) - L_1, F_2(t) - L_2, \dots, F_n(t) - L_n)$ .

Do que vimos acima, resulta:

$\|F(t) - L\| \geq |F_i(t) - L_i| \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ .

O próximo teorema nos diz que  $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t)$  existirá se e somente se existirem e forem finitos os limites das componentes  $F_i$  de  $F$ . Além disso, se, para  $i = 1, 2, \dots, n$ , acontecer  $\lim_{t \rightarrow t_0} F_i(t) = L_i$ , então  $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ .

**Teorema.** Sejam  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$  uma função de uma variável com valores em  $\mathbb{R}^n$  e  $L = (L_1, L_2, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$ . Então

$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} F_i(t) = L_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$ .

*Demonstração*

Vamos provar primeiro a implicação

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} F_i(t) = L_i$$

De  $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L$  segue que  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|F(t) - L\| = 0$ . Por outro lado, para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $|F_i(t) - L_i| \leq \|F(t) - L\|$ .

Pelo teorema do confronto,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (F_i(t) - L_i) = 0 \text{ ou } \lim_{t \rightarrow t_0} F_i(t) = L_i$$

Reciprocamente, de  $\lim_{t \rightarrow t_0} F_i(t) = L_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , segue que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{(F_1(t) - L_1)^2 + (F_2(t) - L_2)^2 + \dots + (F_n(t) - L_n)^2} = 0$$

e, portanto,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|F(t) - L\| = 0$ ; logo,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L. \quad \blacksquare$$

**EXEMPLO 1.** Seja  $\vec{F}(t) = \frac{\text{sen } t}{t} \vec{i} + (t^2 + 3) \vec{j}$ . Calcule  $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{F}(t)$ .

*Solução*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{F}(t) = \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen } t}{t} \right) \vec{i} + \left( \lim_{t \rightarrow 0} (t^2 + 3) \right) \vec{j} = \vec{i} + 3\vec{j}$$

**EXEMPLO 2.** Seja  $\vec{F}(t) = (\cos t, \text{sen } t, t)$ . Calcule  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(t+h) - \vec{F}(t)}{h}$ .

*Solução*

$$\frac{\vec{F}(t+h) - \vec{F}(t)}{h} = \left( \frac{\cos(t+h) - \cos t}{h}, \frac{\text{sen}(t+h) - \text{sen } t}{h}, 1 \right)$$

De

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(t+h) - \cos t}{h} = -\text{sen } t \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(t+h) - \text{sen } t}{h} = \cos t$$

segue

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(t+h) - \vec{F}(t)}{h} = (-\text{sen } t, \cos t, 1)$$

O próximo exemplo nos diz que o limite de um produto escalar é igual ao produto escalar dos limites, desde que tais limites existam.

**EXEMPLO 3.** Sejam  $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$  e  $\vec{G} = (G_1, G_2, \dots, G_n)$  duas funções de uma variável com valores em  $\mathbb{R}^n$ . Suponha que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \vec{a} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{G}(t) = \vec{b}$$

onde  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  e  $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ . Mostre que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

*Solução*

$$\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = F_1(t)G_1(t) + F_2(t)G_2(t) + \dots + F_n(t)G_n(t)$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \vec{a} &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} F_i(t) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{G}(t) = \vec{b} &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} G_i(t) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} F_1(t)G_1(t) + \dots + \lim_{t \rightarrow t_0} F_n(t)G_n(t) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \vec{a} \cdot \vec{b}. \end{aligned}$$

**Definição 2.** Sejam  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $t_0 \in A$ . Definimos:

$$F \text{ é contínua em } t_0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0).$$

Dizemos que  $F$  é contínua em  $B \subset A$  se  $F$  for contínua em todo  $t \in B$ ; dizemos, simplesmente, que  $F$  é contínua se for contínua em cada  $t$  de seu domínio.

Do teorema anterior, resulta que  $F$  será contínua em  $t_0$  se e somente se cada componente de  $F$  o for.

*Exercícios 7.4*

1. Calcule

a)  $\lim_{t \rightarrow 1} \vec{F}(t)$ , onde  $\vec{F}(t) = \left( \frac{\sqrt{t}-1}{t-1}, t^2, \frac{t-1}{t} \right)$

b)  $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{F}(t)$ , onde  $\vec{F}(t) = \left( \frac{\text{tg } 3t}{t}, \frac{e^{2t}-1}{t}, t^3 \right)$

c)  $\lim_{t \rightarrow 2} \vec{r}(t)$ , onde  $\vec{r}(t) = \frac{t^3-8}{t^2-4} \vec{i} + \frac{\cos \frac{\pi}{t}}{t-2} \vec{j} + 2t \vec{k}$ .

2. Sejam  $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ ,  $\vec{G} = (G_1, G_2, \dots, G_n)$  duas funções de uma variável real a valores em  $\mathbb{R}^n$  e  $f$  uma função de uma variável real a valores reais. Suponha que  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \vec{a}$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{G}(t) = \vec{b}$  e  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L$ , onde  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  e  $L$  real. Prove:
- $\lim_{t \rightarrow t_0} [\vec{F}(t) + \vec{G}(t)] = \vec{a} + \vec{b}$ .
  - $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \vec{F}(t) = L \vec{a}$ .
  - $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t) = \vec{a} \wedge \vec{b}$  ( $n = 3$ ).
3. Determine o conjunto dos pontos de continuidade. Justifique a resposta.
- $\vec{F}(t) = t \vec{i} + \sqrt{t} \vec{j} + 3 \vec{k}$ .
  - $\vec{F}(t) = \sqrt{t-1} \vec{i} + \sqrt{t+1} \vec{j} + e^t \vec{k}$ .
4. Sejam  $\vec{F}, \vec{G} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas em  $t_0 \in A$ . Prove que  $\vec{F} + \vec{G}, f \vec{F}, \vec{F} \cdot \vec{G}$  são contínuas em  $t_0$ . Se  $n = 3$ ,  $\vec{F} \wedge \vec{G}$  também é contínua em  $t_0$ .
5. Sejam  $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\vec{G} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Suponha  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) = \vec{0}$  e que  $\|\vec{G}(t)\| \leq M$  para todo  $t \in A$ , onde  $M > 0$  é um real fixo. Prove.
- $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = 0$
  - $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t) = \vec{0}$
6. Seja  $\vec{F} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua. Prove que existe  $M > 0$  tal que  $\|\vec{F}(t)\| \leq M$  em  $[a, b]$ .

## 7.5. DERIVADA

**Definição 1.** Sejam  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $t_0 \in A$ . Definimos a *derivada de F* em  $t_0$  por

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$$

desde que o limite exista.

Se  $F$  admite derivada em  $t_0$ , então diremos que  $F$  é *derivável* ou *diferenciável* em  $t_0$ . Dizemos que  $F$  é *derivável* em  $B \subset D_F$  se o for em cada  $t \in B$ . Dizemos, simplesmente, que  $F$  é *derivável* ou *diferenciável* se o for em cada ponto de seu domínio.

**Teorema 1.** Sejam  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$  e  $t_0$  pertencente ao domínio de  $F$ . Então,  $F$  será derivável em  $t_0$  se e somente se cada componente de  $F$  o for; além disso, se  $F$  for derivável em  $t_0$

$$F'(t_0) = (F'_1(t_0), F'_2(t_0), \dots, F'_n(t_0)).$$

*Demonstração*

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \left( \frac{F_1(t) - F_1(t_0)}{t - t_0}, \frac{F_2(t) - F_2(t_0)}{t - t_0}, \dots, \frac{F_n(t) - F_n(t_0)}{t - t_0} \right), t \neq t_0.$$

Pelo teorema da seção anterior,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$  existirá se e somente se existirem e forem finitos os limites  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F_i(t) - F_i(t_0)}{t - t_0}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Logo,  $F$  será derivável em  $t_0$  se e somente se cada componente o for. Teremos então:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \left( \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F_1(t) - F_1(t_0)}{t - t_0}, \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F_n(t) - F_n(t_0)}{t - t_0} \right)$$

ou seja,

$$F'(t_0) = (F'_1(t_0), F'_2(t_0), \dots, F'_n(t_0)). \quad \blacksquare$$

**EXEMPLO 1.** Seja  $\vec{F}(t) = (\text{sen } 3t, e^{t^2}, t)$ . Calcule

$$a) \frac{d\vec{F}}{dt}(t) \qquad b) \frac{d\vec{F}}{dt}(0)$$

*Solução*

$$a) \frac{d\vec{F}}{dt}(t) = ((\text{sen } 3t)', (e^{t^2})', (t)') = (3 \cos 3t, 2t e^{t^2}, 1)$$

ou seja,

$$\frac{d\vec{F}}{dt}(t) = (3 \cos 3t, 2t e^{t^2}, 1).$$

$$b) \frac{d\vec{F}}{dt}(0) = (3, 0, 1).$$

**EXEMPLO 2.** Seja  $\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + \arctg 2t \vec{j} + e^{-t} \vec{k}$ . Calcule.

$$a) \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad b) \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

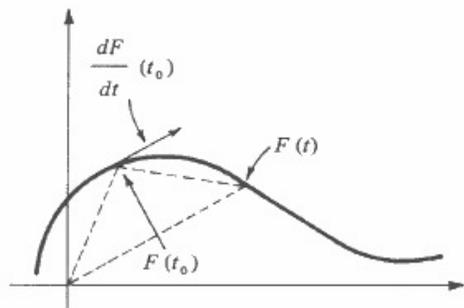
*Solução*

$$a) \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (t^2) \vec{i} + \frac{d}{dt} (\arctg 2t) \vec{j} + \frac{d}{dt} (e^{-t}) \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 2t \vec{i} + \frac{2}{1+4t^2} \vec{j} - e^{-t} \vec{k}.$$

b)  $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2 \vec{i} - \frac{16t}{(1+4t^2)^2} \vec{j} + e^{-t} \vec{k}.$

Seja, agora,  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$  e seja  $t_0 \in A$ . Geometricamente, vemos  $\frac{dF}{dt}(t_0)$  como um “vetor tangente” à trajetória de  $F$ , no ponto  $F(t_0)$ .



$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$  é paralelo ao vetor  $F'(t) - F'(t_0)$

Quando  $t \rightarrow t_0$ ,  $\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$  tende ao “vetor tangente”  $\frac{dF}{dt}(t_0)$  à trajetória de  $F$  em  $F(t_0)$ .

**Definição 2.** Seja  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  derivável em  $t_0$ , com  $\frac{dF}{dt}(t_0) \neq \vec{0}$ . Dizemos que  $\frac{dF}{dt}(t_0)$  é um *vetor tangente* à trajetória de  $F$ , em  $F(t_0)$ . A reta

$$X = F(t_0) + \lambda \frac{dF}{dt}(t_0), \lambda \in \mathbb{R}$$

denomina-se *reta tangente* à trajetória de  $F$  no ponto  $F(t_0)$ .

A reta tangente à trajetória de  $F$  no ponto  $F(t_0)$  é, então, por definição, a *reta passando pelo ponto  $F(t_0)$  e paralela ao vetor tangente  $\frac{dF}{dt}(t_0)$ .*

**EXEMPLO 3.** Seja  $F(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Determine a equação da reta tangente à trajetória de  $F$  no ponto  $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .

*Solução*

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \frac{dF}{dt} = (-\sin t, \cos t); \text{ assim, } \frac{dF}{dt}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

A equação da reta tangente em  $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$  é:

$$X = F\left(\frac{\pi}{4}\right) + \lambda \frac{dF}{dt}\left(\frac{\pi}{4}\right), \lambda \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \lambda \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Faça você o desenho da trajetória de  $F$  e da reta tangente.

**EXEMPLO 4.** Seja  $F(t) = (t, t, t^2)$ . Determine a equação da reta tangente no ponto  $F(1)$ .

*Solução*

$F(1) = (1, 1, 1)$ ;  $\frac{dF}{dt} = (1, 1, 2t)$ ; assim,  $\frac{dF}{dt}(1) = (1, 1, 2)$ . A equação da reta tangente em  $F(1)$  é:

$$X = F(1) + \lambda \frac{dF}{dt}(1), \lambda \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda (1, 1, 2), \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Teorema 2.** Sejam  $\vec{F}, \vec{G}: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  deriváveis em  $A$ . Então,  $f \cdot \vec{F}$  e  $\vec{F} \cdot \vec{G}$  serão, também, deriváveis em  $A$  e

a)  $\frac{d}{dt}(f \cdot \vec{F}) = \frac{df}{dt} \cdot \vec{F} + f \cdot \frac{d\vec{F}}{dt}.$

b)  $\frac{d}{dt}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt} \cdot \vec{G} + \vec{F} \cdot \frac{d\vec{G}}{dt}.$

Além disso, se  $n = 3$ , então  $\vec{F} \wedge \vec{G}$  será, também, derivável em  $A$  e

c)  $\frac{d}{dt}(\vec{F} \wedge \vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt} \wedge \vec{G} + \vec{F} \wedge \frac{d\vec{G}}{dt}.$

*Demonstração*

Faremos a demonstração no caso  $n = 3$ .

a)  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ; como  $f$  é uma função a valores reais

$$\mathbf{x}(t) \cdot \vec{F}(t) = (f(t) F_1(t), f(t) F_2(t), f(t) F_3(t))$$

para todo  $t \in A$ ,

$$\frac{d}{dt} [f(t) \vec{F}(t)] = \left( \frac{d}{dt} [f(t) F_1(t)], \frac{d}{dt} [f(t) F_2(t)], \frac{d}{dt} [f(t) F_3(t)] \right)$$

De

$$\frac{d}{dt} [f(t) F_1(t)] = f'(t) F_1(t) + f(t) F_1'(t)$$

$$\frac{d}{dt} [f(t) F_2(t)] = f'(t) F_2(t) + f(t) F_2'(t)$$

$$\frac{d}{dt} [f(t) F_3(t)] = f'(t) F_3(t) + f(t) F_3'(t)$$

resulta:

$$\frac{d}{dt} [f(t) \vec{F}(t)] = f'(t) (F_1(t), F_2(t), F_3(t)) + f(t) (F_1'(t), F_2'(t), F_3'(t))$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} (f \vec{F}) = \frac{df}{dt} \vec{F} + f \frac{d\vec{F}}{dt}$$

b)  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  e  $\vec{G} = (G_1, G_2, G_3)$ .

$$\vec{F} \cdot \vec{G} = F_1 G_1 + F_2 G_2 + F_3 G_3$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\vec{F} \cdot \vec{G}] &= \frac{d}{dt} [F_1 G_1] + \frac{d}{dt} [F_2 G_2] + \frac{d}{dt} [F_3 G_3] = \frac{dF_1}{dt} G_1 + F_1 \frac{dG_1}{dt} + \\ &+ \frac{dF_2}{dt} G_2 + F_2 \frac{dG_2}{dt} + \frac{dF_3}{dt} G_3 + F_3 \frac{dG_3}{dt} \end{aligned}$$

Como

$$\frac{d\vec{F}}{dt} \cdot \vec{G} = \frac{dF_1}{dt} G_1 + \frac{dF_2}{dt} G_2 + \frac{dF_3}{dt} G_3$$

e

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{G}}{dt} = F_1 \frac{dG_1}{dt} + F_2 \frac{dG_2}{dt} + F_3 \frac{dG_3}{dt}$$

resulta

$$\frac{d}{dt} [\vec{F} \cdot \vec{G}] = \frac{d\vec{F}}{dt} \cdot \vec{G} + \vec{F} \cdot \frac{d\vec{G}}{dt}$$

$$\begin{aligned} c) \frac{d(\vec{F} \wedge \vec{G})}{dt}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(t+h) \wedge \vec{G}(t+h) - \vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(t+h) \wedge \vec{G}(t+h) - \vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t+h) + \vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t+h) - \vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\vec{F}(t+h) - \vec{F}(t)}{h} \wedge \vec{G}(t+h) + \vec{F}(t) \wedge \frac{\vec{G}(t+h) - \vec{G}(t)}{h} \right] \\ &= \frac{d\vec{F}}{dt}(t) \wedge \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \wedge \frac{d\vec{G}}{dt}(t) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} [\vec{F} \wedge \vec{G}] = \frac{d\vec{F}}{dt} \wedge \vec{G} + \vec{F} \wedge \frac{d\vec{G}}{dt} \quad \blacksquare$$

**EXEMPLO 5.** Seja  $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  derivável e tal que  $\|\vec{F}(t)\| = k, \forall t \in A, k$  constante. Prove que

$$\vec{F}(t) \cdot \frac{d\vec{F}}{dt}(t) = 0$$

para todo  $t \in A$ . Interprete geometricamente no caso  $n = 2$ .

*Solução*

$$\|\vec{F}(t)\| = \sqrt{\vec{F}(t) \cdot \vec{F}(t)}$$

daí

$$\|\vec{F}(t)\|^2 = \vec{F}(t) \cdot \vec{F}(t);$$

logo, para todo  $t \in A$ ,

$$\vec{F}(t) \cdot \vec{F}(t) = k^2.$$

Segue que, para todo  $t$  em  $A$ ,

$$\frac{d}{dt} [\vec{F}(t) \cdot \vec{F}(t)] = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d\vec{F}}{dt}(t) \cdot \vec{F}(t) + \vec{F}(t) \cdot \frac{d\vec{F}}{dt}(t) = 0$$

e como o produto escalar é comutativo

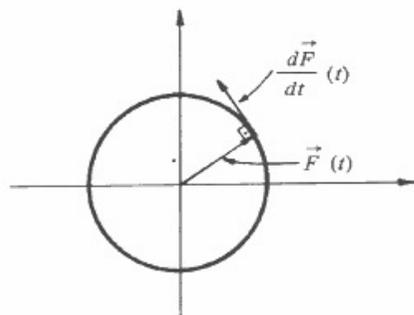
$$2 \vec{F}(t) \cdot \frac{d\vec{F}}{dt}(t) = 0.$$

Portanto, para todo  $t \in A$ ,

$$\vec{F}(t) \cdot \frac{d\vec{F}}{dt}(t) = 0.$$

Assim, sendo  $\|\vec{F}(t)\|$  constante, os vetores  $\vec{F}(t)$  e  $\frac{d\vec{F}}{dt}(t)$  serão ortogonais.

**Interpretação geométrica no caso  $n = 2$ .** Seja  $\vec{F}(t) = (F_1(t), F_2(t))$ ; sendo  $\|\vec{F}(t)\|$  constante e igual a  $k$  ( $k > 0$ ), a trajetória descrita por  $(F_1(t), F_2(t))$  está contida na circunferência de centro na origem e raio  $k$ ; como  $\frac{d\vec{F}}{dt}(t)$  é tangente à trajetória,  $\frac{d\vec{F}}{dt}(t)$  deve ser tangente à circunferência e deve, portanto, ser ortogonal ao vetor de posição  $\vec{F}(t)$ .



Exercícios 7.5

1. Calcule  $\frac{d\vec{F}}{dt}$  e  $\frac{d^2\vec{F}}{dt^2}$

- a)  $\vec{F}(t) = (3t^2, e^{-t}, \ln(t^2 + 1))$ .
- b)  $\vec{F}(t) = \sqrt[3]{t^2} \vec{i} + \cos t^2 \vec{j} + 3t \vec{k}$ .
- c)  $\vec{F}(t) = \sin 5t \vec{i} + \cos 4t \vec{j} - e^{-2t} \vec{k}$ .

2. Determine a equação da reta tangente à trajetória da função dada, no ponto dado.

- a)  $F(t) = (\cos t, \sin t, t)$  e  $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$
- b)  $G(t) = (t^2, t)$  e  $G(1)$
- c)  $F(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}, t^2\right)$  e  $F(2)$
- d)  $F(t) = (t, t^2, t, t^2)$  e  $F(1)$

- 3. Seja  $F$  definida no intervalo  $I$  e com valores em  $\mathbb{R}^n$ . Suponha que  $F'(t) = \vec{0}$  para todo  $t$  em  $I$ . Prove que existe uma constante  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $F(t) = k$  para todo  $t$  em  $I$ .
- 4. Seja  $\vec{F}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $I$  intervalo, derivável até a 2.ª ordem em  $I$ . Suponha que exista um real  $\lambda$  tal que, para todo  $t$  em  $I$ ,  $\frac{d^2\vec{F}}{dt^2}(t) = \lambda \vec{F}(t)$ . Prove que  $\vec{F}(t) \wedge \frac{d\vec{F}}{dt}(t)$  é constante em  $I$ .
- 5. Suponha que  $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  seja derivável até a 2.ª ordem e que, para todo  $t \geq 0$ ,

$$\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{t}.$$

- a) Prove que  $\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{r} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$  em  $[0, +\infty[$ .
- b) Seja  $\theta$  o ângulo entre  $\vec{r}$  e  $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ . Conclua que  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ .

6. Seja  $\vec{r}$  definida em  $\mathbb{R}$ , com valores em  $\mathbb{R}^3$ , e derivável até a 2.ª ordem. Prove que se  $\vec{r}(t) \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}(t)$  for constante em  $\mathbb{R}$ , então  $\vec{r}(t) \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \vec{0}$  em  $\mathbb{R}$ .

7. Seja  $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $I$  intervalo, derivável até a 2.ª ordem. Suponha que  $\vec{r}(t)$  forneça a posição, no instante  $t$ , de um ponto  $P$  que se move no espaço. Definimos a velocidade  $\vec{v}(t)$  e a aceleração  $\vec{a}(t)$  de  $P$ , no instante  $t$ , por:  $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t)$  e  $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t)$ . Determine  $\vec{v}(t)$  e  $\vec{a}(t)$  sendo:

- a)  $\vec{r}(t) = t \vec{i} + t^2 \vec{j} + 4 \vec{k}$
- b)  $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t \vec{k}$
- c)  $\vec{r}(t) = \vec{\eta}_0 + v_0 t$ , onde  $\vec{\eta}_0$  e  $v_0$  serão dois vetores fixos em  $\mathbb{R}^3$ .
- d)  $\vec{r}(t) = \vec{\eta}_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$ , onde  $\vec{\eta}_0$ ,  $v_0$  e  $a_0$  são constantes.

8. Um ponto se move no espaço de modo que  $\|\vec{v}(t)\| = k$  para todo  $t$ , onde  $k > 0$  é uma constante. Prove que  $\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0$  para todo  $t$ . Interprete.

9. Suponha  $\|\vec{v}(t)\| \neq 0$  para todo  $t$ . Faça  $\vec{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|}$  onde  $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$ . Prove que

- a)  $\vec{T}$  e  $\frac{d\vec{T}}{dt}$  são ortogonais.
- b)  $\vec{a} = v \frac{d\vec{T}}{dt} + \frac{dv}{dt} \vec{T}$ .

10. Seja  $\vec{r}(t) = a \cos wt \vec{i} + b \sin wt \vec{j}$ , onde  $a, b$  e  $w$  são constantes não-nulas. Mostre que

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -w^2 \vec{r}.$$

11. Sejam  $\vec{F}$  e  $\vec{G}$  definidas e deriváveis no intervalo  $I$  e com valores em  $\mathbb{R}^n$ . Suponha que para todo  $t \in I$ ,  $\frac{d\vec{F}}{dt}(t) = \frac{d\vec{G}}{dt}(t)$ . Prove que existe um vetor  $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\vec{G}(t) = \vec{F}(t) + \vec{c}$  para todo  $t \in I$ .

12. Determine  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  sabendo que

a)  $\frac{d\vec{r}}{dt} = t \vec{i} + 2 \vec{k}$  e  $\vec{r}(0) = \vec{i} + \vec{j}$ .

b)  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \sin t \vec{i} + \cos 2t \vec{j} + \frac{1}{t+1} \vec{k}$ ,  $t \geq 0$ , e  $\vec{r}(0) = \vec{i} - \vec{j} + 2 \vec{k}$

c)  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{1+4t^2} \vec{i} + e^{-t} \vec{j} + \vec{k}$  e  $\vec{r}(0) = \vec{k}$ .

13. (Regra da cadeia). Sejam  $t \rightarrow u(t)$ ,  $t \in I$ ,  $u \rightarrow \vec{F}(u) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in J$ , funções deriváveis, onde  $I$  e  $J$  são intervalos em  $\mathbb{R}$ . Suponha que, para todo  $t \in I$ ,  $u(t) \in J$ . Prove que a função  $\vec{H}$  dada por  $\vec{H}(t) = \vec{F}(u(t))$ ,  $t \in I$ , é derivável e que

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{d\vec{F}}{du} \frac{du}{dt}$$

onde  $\frac{d\vec{F}}{du}$  deve ser calculado em  $u = u(t)$ .

14. Suponha  $\vec{u}_\rho(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ ,  $\vec{u}_\theta(\theta) = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$  e  $\vec{r}(t) = \rho(t) \vec{u}_\rho(\theta(t))$ , com  $\theta = \theta(t)$  e  $\rho = \rho(t)$  deriváveis até a 2.ª ordem num intervalo  $I$ .

(Notação:  $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt}$ ,  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ ,  $\ddot{\rho} = \frac{d^2\rho}{dt^2}$ ). Verifique que

a)  $\frac{d}{dt} [\vec{u}_\rho(\theta)] = \dot{\theta} \vec{u}_\theta(\theta)$ .

b)  $\frac{d}{dt} [\vec{u}_\theta(\theta)] = -\dot{\theta} \vec{u}_\rho(\theta)$ .

c)  $\vec{v} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ .

d)  $\vec{a} = [\ddot{\rho} - \rho(\dot{\theta})^2] \vec{u}_\rho + [2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}] \vec{u}_\theta$ .

15. Seja  $F : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  derivável em  $t_0 \in I$  e seja  $E(\Delta t)$  o erro que se comete na aproximação do acréscimo " $F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)$ " por " $F'(t_0) \Delta t$ ". Prove que  $E(\Delta t)$  tende a  $\vec{0}$  mais rapidamente que  $\Delta t$ , quando  $\Delta t$  tende a zero, isto é, que  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E(\Delta t)}{\Delta t} = \vec{0}$ . Prove, ainda, que para todo  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ , com  $\vec{a} \neq F'(t_0)$ ,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\{F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)\} - \vec{a} \Delta t}{\Delta t} \neq \vec{0}$ .

**Observação.** A função linear de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^n$  dada por  $\Delta t \rightarrow F'(t_0) \Delta t$  denomina-se *diferencial* de  $F$  em  $t_0$ :  $F(t_0 + \Delta t) - F(t_0) = F'(t_0) \Delta t + E(\Delta t)$ , onde  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E(\Delta t)}{\Delta t} = \vec{0}$ .

### 7.6. INTEGRAL

Sejam  $\vec{F} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função,  $P : a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$  e, para cada  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , seja  $c_i$  um ponto de  $[t_{i-1}, t_i]$ . O vetor

$$\sum_{i=1}^m \vec{F}(c_i) \Delta t_i$$

denomina-se *soma de Riemann* de  $\vec{F}$  relativa à partição  $P$  e aos pontos  $c_i$ .

Dizemos que  $\sum_{i=1}^m \vec{F}(c_i) \Delta t_i$  tende ao vetor  $\vec{L} \in \mathbb{R}^n$ , quando  $\max \Delta t_i \rightarrow 0$ , e escrevemos

$$\lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \vec{F}(c_i) \Delta t_i = \vec{L}$$

se, para todo  $\epsilon > 0$  dado, existir  $\delta > 0$  que só depende de  $\epsilon$ , mas não da particular escolha dos  $c_i$ , tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^m \vec{F}(c_i) \Delta t_i - \vec{L} \right\| < \epsilon,$$

para toda partição  $P$  de  $[a, b]$  com  $\max \Delta t_i < \delta$ .

O vetor  $\vec{L}$ , que quando existe é único (verifique), denomina-se *integral* (de Riemann) de  $\vec{F}$  em  $[a, b]$  e indica-se por  $\int_a^b \vec{F}(t) dt$ . Assim, por definição,

$$\int_a^b \vec{F}(t) dt = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \vec{F}(c_i) \Delta t_i$$

Seja  $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m)$  definida em  $[a, b]$ . Deixamos a cargo do leitor verificar que  $\vec{F}$  será integrável em  $[a, b]$  se e somente se cada componente de  $\vec{F}$  o for; além disso, se  $F_i$  for integrável em  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b \vec{F}(t) dt = \left( \int_a^b F_1(t) dt, \int_a^b F_2(t) dt, \dots, \int_a^b F_m(t) dt \right).$$

Se  $\vec{F}$  for integrável em  $[a, b]$  e  $\vec{G}$  uma primitiva de  $\vec{F}$  em  $[a, b]$  teremos

$$\int_a^b \vec{F}(t) dt = \vec{G}(b) - \vec{G}(a).$$

De fato:

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{F} \Leftrightarrow \frac{dG_i}{dt} = F_i, i = 1, 2, \dots, m$$

então

$$\begin{aligned} \int_a^b \vec{F}(t) dt &= \left( \int_a^b F_1(t) dt, \int_a^b F_2(t) dt, \dots, \int_a^b F_n(t) dt \right) \\ &= (G_1(b) - G_1(a), G_2(b) - G_2(a), \dots, G_m(b) - G_m(a)) \\ &= \vec{G}(b) - \vec{G}(a). \end{aligned}$$

**EXEMPLO 1.** Calcule  $\int_0^1 [t \vec{i} + 4 \vec{j} + t^2 \vec{k}] dt$ .

*Solução*

$$\begin{aligned} \int_0^1 [t \vec{i} + 4 \vec{j} + t^2 \vec{k}] dt &= \left( \int_0^1 t dt \right) \vec{i} + \left( \int_0^1 4 dt \right) \vec{j} + \left( \int_0^1 t^2 dt \right) \vec{k} \\ &= \frac{1}{2} \vec{i} + 4 \vec{j} + \frac{1}{3} \vec{k}. \end{aligned}$$

**EXEMPLO 2.** Suponha  $\vec{F}$  contínua em  $[a, b]$ . Prove que

$$\left\| \int_a^b \vec{F}(t) dt \right\| \leq \int_a^b \left\| \vec{F}(t) \right\| dt.$$

*Solução*

Sendo  $\vec{F}$  contínua em  $[a, b]$ ,  $\|\vec{F}\|$  também será; logo,  $\int_a^b \|\vec{F}(t)\| dt$  existe.

$$\left\| \sum_{i=1}^m \vec{F}(c_i) \Delta t_i - \int_a^b \vec{F}(t) dt \right\| \geq \left\| \sum_{i=1}^m \vec{F}(c_i) \Delta t_i \right\| - \left\| \int_a^b \vec{F}(t) dt \right\|$$

assim, de

$$\lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \vec{F}(c_i) \Delta t_i = \int_a^b \vec{F}(t) dt$$

segue

$$\lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \left\| \sum_{i=1}^m \vec{F}(c_i) \Delta t_i \right\| = \left\| \int_a^b \vec{F}(t) dt \right\|.$$

Temos

$$\left\| \sum_{i=1}^m \vec{F}(c_i) \Delta t_i \right\| \leq \sum_{i=1}^m \|\vec{F}(c_i)\| \Delta t_i.$$

Então

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b \vec{F}(t) dt \right\| &= \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \left\| \sum_{i=1}^m \vec{F}(c_i) \Delta t_i \right\| \leq \\ &\leq \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \|\vec{F}(c_i)\| \Delta t_i \\ &= \int_a^b \|\vec{F}(t)\| dt \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\| \int_a^b \vec{F}(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\vec{F}(t)\| dt.$$

**Exercícios 7.6**

1. Calcule

a)  $\int_0^1 [t \vec{i} + e^t \vec{j}] dt$

b)  $\int_{-1}^1 [\text{sen } 3t \vec{i} + \frac{1}{1+t^2} \vec{j} + \vec{k}] dt$

c)  $\int_1^2 (3 \vec{i} + 2 \vec{j} + \vec{k}) dt$

2. Sejam  $\vec{F}(t) = t \vec{i} + \vec{j} + e^t \vec{k}$  e  $\vec{G}(t) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ . Calcule

a)  $\int_0^1 \vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t) dt$

b)  $\int_0^1 \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) dt.$

3. Seja  $\vec{F}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e seja  $\vec{G}(t) = \int_0^t \vec{F}(s) ds, t \in [a, b]$ . Prove que, para todo  $t \in [a, b]$ ,

$$\frac{d\vec{G}}{dt}(t) = \vec{F}(t).$$

4. Seja  $\vec{F}(t)$  uma força, dependendo do tempo  $t$ , que atua sobre uma partícula entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ . Supondo  $\vec{F}$  integrável em  $[t_1, t_2]$ , o vetor

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt$$

denomina-se *impulso* de  $\vec{F}$  no intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$ . Calcule o impulso de  $\vec{F}$  no intervalo de tempo dado.

a)  $\vec{F}(t) = t\vec{i} + \vec{j} + t^2\vec{k}, t_1 = 0 \text{ e } t_2 = 2.$   
 b)  $\vec{F}(t) = \frac{1}{t+1}\vec{i} + t^2\vec{j} + \vec{k}, t_1 = 0 \text{ e } t_2 = 1.$

5. Suponha que  $\vec{F}(t)$  é a força resultante que atua, no instante  $t$ , sobre uma partícula de massa  $m$  que se move no espaço. Mostre que o impulso de  $\vec{F}$  no intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$  é igual à variação da quantidade de movimento, isto é,

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = m \vec{v}_2 - m \vec{v}_1$$

onde  $\vec{v}_2$  e  $\vec{v}_1$  são, respectivamente, as velocidades nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ . (Sugestão: pela lei de Newton  $\vec{F}(t) = m \vec{a}(t)$ .)

### 7.7. COMPRIMENTO DE CURVA

Seja  $I$  um intervalo em  $\mathbb{R}$ . Uma curva  $\gamma$  em  $\mathbb{R}^n$ , definida em  $I$ , é uma função  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Uma curva em  $\mathbb{R}^n$ , definida em  $I$ , nada mais é, então, do que uma função de uma variável real a valores em  $\mathbb{R}^n$ . Segue que tudo o que dissemos anteriormente aplica-se às curvas.

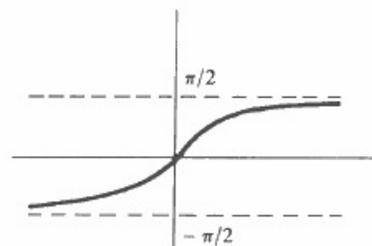
**EXEMPLO 1.** Seja  $\gamma(t) = (t, \arctg t), t \in \mathbb{R}$ , uma curva em  $\mathbb{R}^2$ .

- a) Desenhe a imagem de  $\gamma$ .  
 b) Determine uma curva  $\delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\gamma \neq \delta$  e  $Im \gamma = Im \delta$ .

*Solução*

a)  $\begin{cases} x = t \\ y = \arctg t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

A imagem de  $\gamma$  coincide com a gráfico de  $y = \arctg x$ .



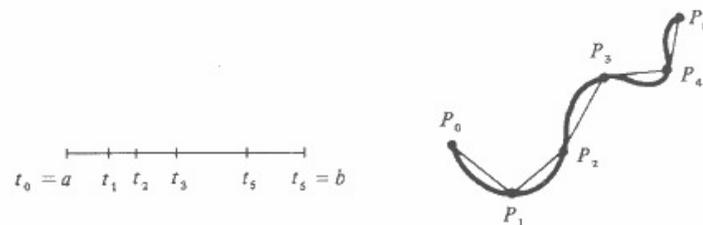
b)  $\delta(t) = (t^3, \arctg t^3), t \in \mathbb{R}.$

**Observação.** Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  tais que  $Im \gamma = A$ ; é comum referir-se a  $\gamma$  como uma parametrização do conjunto  $A$ . Assim, toda curva  $\gamma$  pode ser olhada como uma parametrização de sua imagem. O exemplo anterior mostra-nos que um mesmo conjunto pode admitir parametrizações diferentes.

Nosso objetivo, a seguir, é definir comprimento de curva em  $\mathbb{R}^n$ . Para motivar tal definição, trabalharemos com uma curva em  $\mathbb{R}^2$ . Seja, então,  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva em  $\mathbb{R}^2$ . Sendo  $P: a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$  uma partição qualquer de  $[a, b]$ , indicaremos por  $L(\gamma, P)$  o comprimento da poligonal de vértices  $P_0 = \gamma(t_0), P_1 = \gamma(t_1), \dots, P_n = \gamma(t_n)$ :

$$L(\gamma, P) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|.$$

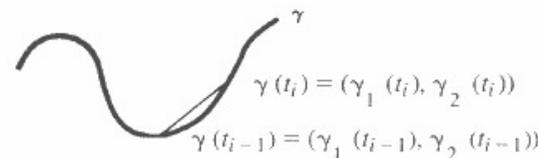
Tomando-se, por exemplo,  $P: a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 = b$ ,  $L(\gamma, P)$  será o comprimento da poligonal de vértices  $P_0 = \gamma(t_0), P_1 = \gamma(t_1), \dots, P_5 = \gamma(t_5)$ .



$$L(\gamma, P) = \|\gamma(t_1) - \gamma(t_0)\| + \|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\| + \dots + \|\gamma(t_5) - \gamma(t_4)\|.$$

Suponhamos  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  derivável em  $[a, b]$  e seja  $P: a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  uma partição qualquer de  $[a, b]$ . Temos

①  $\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sqrt{[\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1})]^2 + [\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1})]^2}.$



Pelo teorema do valor médio, existem  $\bar{t}_i$  e  $\bar{t}'_i$  em  $]t_{i-1}, t_i[$  tais que

$$\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}) = \gamma'_1(\bar{t}_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$\gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1}) = \gamma'_2(\bar{t}'_i)(t_i - t_{i-1})$$

ou seja,

$$\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}) = \gamma'_1(\bar{t}_i) \Delta t_i \quad \text{e} \quad \gamma_2(t_i) - \gamma_2(t_{i-1}) = \gamma'_2(\bar{t}'_i) \Delta t_i.$$

Substituindo em ① vem:

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sqrt{[\gamma'_1(\bar{t}_i)]^2 + [\gamma'_2(\bar{t}_i)]^2} \Delta t_i$$

Daí

$$\textcircled{2} \quad L(\gamma, P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{[\gamma'_1(\bar{t}_i)]^2 + [\gamma'_2(\bar{t}_i)]^2} \Delta t_i$$

Supondo  $\gamma'$  contínua em  $[a, b]$ ,  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2}$  será, também, contínua em  $[a, b]$  e, portanto, integrável neste intervalo:

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{(\gamma'_1(c_i))^2 + (\gamma'_2(c_i))^2} \Delta t_i$$

Embora ② não seja soma de Riemann da função  $g(t) = \|\gamma'(t)\|$ ,  $t \in [a, b]$ , (por quê?) é razoável esperar que, para  $\max \Delta t_i \rightarrow 0$ ,  $L(\gamma, P)$  tenda a  $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$  (veja Exerc. 12). Nada mais natural, então, do que a seguinte definição.

**Definição.** Seja  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva com derivada contínua em  $[a, b]$ . Definimos o comprimento  $L(\gamma)$  da curva  $\gamma$  por

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

**Observação.** A definição acima estende-se para uma curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  qualquer, com  $\|\gamma'(t)\|$  integrável em  $[a, b]$ .

**EXEMPLO 2.** Calcule o comprimento da curva  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

*Solução*

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1); \|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2}$$

O comprimento da curva  $\gamma$  é

$$\int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi \sqrt{2}.$$

Seja  $\gamma$  uma curva em  $\mathbb{R}^2$  dada por

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t) \\ y = \gamma_2(t) \end{cases} \quad t \in [a, b].$$

De  $\frac{dx}{dt} = \gamma'_1(t)$  e  $\frac{dy}{dt} = \gamma'_2(t)$  segue  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$  e, então, o comprimento de  $\gamma$  é:

$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ . Se  $\gamma$  for uma curva em  $\mathbb{R}^3$  dada por

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t) \\ y = \gamma_2(t) \\ z = \gamma_3(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

seu comprimento será:

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

**EXEMPLO 3.** Calcule o comprimento da curva  $\gamma$  dada por

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

*Solução*

$$L(\gamma) = \int_0^{\frac{1}{2}} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + 4t^2} dt.$$

Façamos a mudança de variável

$$\begin{cases} 2t = \operatorname{tg} u; dt = \frac{1}{2} \sec^2 u du \\ t = 0; u = 0 \\ t = \frac{1}{2}; u = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + 4t^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u} \cdot \frac{1}{2} \sec^2 u du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 u du.$$

*Cálculo de uma primitiva de  $\sec^3 u$*

$$\begin{aligned} \int \sec^3 u du &= \int \underbrace{\sec u}_f \underbrace{\sec^2 u}_g du = \sec u \operatorname{tg} u - \int \frac{\sec u \operatorname{tg} u \operatorname{tg} u}{f'} du \\ &= \sec u \operatorname{tg} u - \int \sec u (\sec^2 u - 1) du \end{aligned}$$

ou seja,

$$2 \int \sec^3 u du = \sec u \operatorname{tg} u + \int \sec u du$$

e, portanto,

$$\int \sec^3 u du = \frac{1}{2} \sec u \operatorname{tg} u + \frac{1}{2} \ln |\sec u + \operatorname{tg} u| + k.$$

Segue que

$$L(\gamma) = \frac{1}{4} [\sec u \operatorname{tg} u + \ln (\sec u + \operatorname{tg} u)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

ou seja,

$$L(\gamma) = \frac{1}{4} [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})].$$

**EXEMPLO 4.** Calcule o comprimento da circunferência de raio  $R > 0$ .

*Solução*

$$\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t), t \in [0, 2\pi].$$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt.$$

Assim,

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt$$

ou seja,

$$L(\gamma) = R \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

### Exercícios 7.7

1. Calcule o comprimento da curva dada.

a)  $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t), t \in [0, 2\pi]$ .

b)  $\gamma(t) = (2t - 1, t + 1), t \in [1, 2]$ .

c)  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, e^{-t}), t \in [0, \pi]$ .

d)  $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, e^{-t}), t \in [0, 1]$ .

e)  $\gamma(t) = (t, \ln t), t \in [1, e]$ .

f)  $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $x = 1 - \cos t, y = t - \sin t$ .

g)  $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), x \in [-1, 0]$ . (*Observação:* trata-se da curva  $\gamma$  dada por  $x = t, y = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ , com  $t \in [-1, 0]$ .)

2. Seja  $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva dada em coordenadas polares por  $\rho = \rho(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$ . (*Observação:* trata-se da curva dada por  $x = \rho(\theta) \cos \theta, y = \rho(\theta) \sin \theta, \theta \in [\alpha, \beta]$ ). Supondo que  $\rho = \rho(\theta)$  tenha derivada contínua, verifique que

$$L(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

3. Calcule o comprimento da curva dada em coordenadas polares (utilize o Exerc. 2).

a)  $\rho = \theta, \theta \in [0, \pi]$       b)  $\rho = 1 + \cos \theta, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

c)  $\rho = \sin \theta, \theta \in [0, \pi]$       d)  $\rho = e^{-\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$ .

Aproveite a oportunidade e desenhe estas trajetórias (no plano  $xy$ , claro!).

4. Dê exemplos de curvas  $\gamma$  e  $\delta$  tais que  $Im \gamma = Im \delta$ , mas que seus comprimentos sejam diferentes.

5. Sejam  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\delta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  duas curvas com derivadas contínuas. Suponha que exista  $g: [c, d] \rightarrow [a, b]$ , com derivada contínua e tal que  $g'(u) > 0$  em  $[c, d]$ . Suponha, ainda,  $g(c) = a, g(d) = b$  e, para todo  $u \in [c, d]$ ,  $\delta(u) = \gamma(g(u))$ . Prove:

a)  $Im \gamma = Im \delta$

b)  $L(\gamma) = L(\delta)$

**Observação.** Se as curvas  $\delta$  e  $\gamma$  estiverem relacionadas do modo acima descrito, então dizemos que a curva  $\delta$  é obtida de  $\gamma$  pela *mudança de parâmetro*  $t = g(u)$  que conserva a orientação.

6. Dizemos que uma curva  $\delta: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com derivada contínua, está *parametrizada pelo comprimento de arco* se  $\|\delta'(s)\| = 1$ , para todo  $s \in [\alpha, \beta]$ . Verifique que cada uma das curvas abaixo está parametrizada pelo comprimento de arco. Interprete o parâmetro  $s$ .

a)  $\delta(s) = (\cos s, \sin s), s \geq 0$

b)  $\delta(s) = \left(R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R}\right), s \geq 0$ , onde  $R > 0$  é um real fixo.

c)  $\delta(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{5}}, \frac{2s}{\sqrt{5}}\right), s \geq 0$ .

7. Seja  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com derivada contínua, e tal que  $\|\gamma'(t)\| \neq 0$  em  $[a, b]$ . Seja  $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

dada por  $s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du$ .

a) Verifique que a função  $s = s(t)$  é inversível e seja  $t = t(s)$  sua inversa.

b) Verifique que a curva  $\delta: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $L$  é o comprimento de  $\gamma$ ) dada por

$$\delta(s) = \gamma(t(s))$$

está parametrizada pelo comprimento de arco. Dizemos que  $\delta$  é a *reparametrização de  $\gamma$  pelo comprimento de arco*.

8. Reparametrize pelo comprimento de arco a curva  $\gamma$  dada.

a)  $\gamma(t) = (2t + 1, 3t - 1), t \geq 0$ .

b)  $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), t \geq 0$ .

c)  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t), t \geq 0$ .

d)  $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), t \geq 0$ .

9. Seja  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva derivável até a 2.ª ordem, com  $\|\gamma'(t)\| \neq 0$  no intervalo  $I$ . Seja

$$s = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du, t \in I, \text{ com } t_0 \text{ fixo em } I. \text{ Sejam, ainda, } \vec{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \text{ o versor de } \gamma'(t)$$

e  $\vec{t}(s)$  dada por  $\vec{t}(s) = \vec{T}(t)$ , onde  $t = t(s)$ . Mostre que

$$a) \frac{d\vec{T}}{dt}(t) = \frac{\gamma''(t) \|\gamma'(t)\|^2 - \gamma'(t)(\gamma''(t) \cdot \gamma'(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

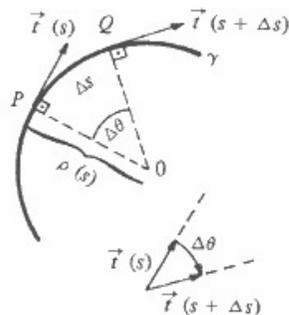
$$b) \frac{d\vec{t}}{ds}(s) = \frac{\gamma''(t) \|\gamma'(t)\|^2 - \gamma'(t)(\gamma''(t) \cdot \gamma'(t))}{\|\gamma'(t)\|^4}, t = t(s).$$

$$c) \left\| \frac{d\vec{t}}{ds}(s) \right\| = \sqrt{\left(\frac{d\vec{t}}{ds}(s) \cdot \frac{d\vec{t}}{ds}(s)\right)} = \frac{\sqrt{(\|\gamma''(t)\| \|\gamma'(t)\|)^2 - (\gamma''(t) \cdot \gamma'(t))^2}}{\|\gamma'(t)\|^3},$$

onde  $t = t(s)$ .

**Observação.** O número  $k(s) = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds}(s) \right\|$  denomina-se *curvatura* da curva  $\gamma$  no ponto  $\gamma(t), t =$

$t(s)$ . Se  $k(s) \neq 0$ , o número  $\rho(s) = \frac{1}{k(s)}$  é o *raio de curvatura* de  $\gamma$  em  $\gamma(t), t = t(s)$ . A motivação geométrica para tal definição é a seguinte: para  $\Delta s$  suficientemente pequeno o trecho  $PQ$  (de comprimento  $\Delta s$ ) da curva  $\gamma$  pode ser olhado como um arco de circunferência de centro  $O$  e raio  $\rho(s)$  (aproximadamente). Sendo  $\Delta\theta$  (radianos) o ângulo entre os vetores  $\vec{T}(s)$  e  $\vec{T}(s + \Delta s)$ , segue que  $\Delta\theta$  será, então, a medida do ângulo  $POQ$ .



$$\Delta\theta \cong \|\vec{T}(s + \Delta s) - \vec{T}(s)\|$$

Temos:

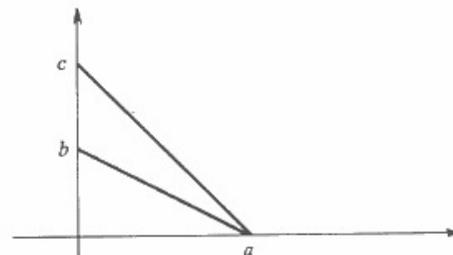
$$\Delta s \cong \rho(s) \Delta\theta \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho(s)} \cong \left\| \frac{\vec{T}(s + \Delta s) - \vec{T}(s)}{\Delta s} \right\|$$

10. Calcule a curvatura e o raio de curvatura da curva  $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$  ( $R > 0$  fixo).
11. Seja  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada pelo comprimento de arco (isto é:  $\|\gamma'(s)\| = 1$  para todo  $s \in I$ ).
  - a) Verifique que, para todo  $s \in I, k(s) = \|\gamma''(s)\|$ , onde  $k(s)$  é a curvatura em  $\gamma(s)$ .
  - b) Prove que se  $k(s) = 0$ , para todo  $s$ , então  $\gamma$  é uma reta.
11. Uma partícula move-se no plano de modo que no instante  $t$  sua posição seja  $\gamma(t)$ . Suponha que, para todo  $t, \|\vec{v}(t)\| \neq 0$  ( $\vec{v}(t) = \gamma'(t)$ ) e seja  $\vec{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)}$  onde  $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$ . Prove que
  - a)  $\vec{T}$  e  $\frac{d\vec{T}}{dt}$  são ortogonais.
  - b)  $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$ , onde  $\vec{n}$  é o versor de  $\frac{d\vec{T}}{dt}$  e  $\rho = \rho(t)$  o raio de curvatura de  $\gamma$  em  $\gamma(t)$ .
12. Seja  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva com derivada contínua e com componentes  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  ( $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ ). Seja  $P: a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$  uma partição qualquer de  $[a, b]$ .
  - a) Prove que quaisquer que sejam  $\bar{t}_i, \bar{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) tem-se:

$$\left| \sum_{i=1}^n \sqrt{[\gamma'_1(\bar{t}_i)]^2 + [\gamma'_2(\bar{t}_i)]^2} \Delta t_i - \sum_{i=1}^n \sqrt{[\gamma'_1(\bar{t}_i)]^2 + [\gamma'_2(\bar{t}_i)]^2} \Delta t_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |\gamma'_1(\bar{t}_i) - \gamma'_2(\bar{t}_i)| \Delta t_i$$

(Sugestão: utilize a desigualdade

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \leq |b - c|$$



- b) Sejam  $\bar{c}_i$  e  $\bar{c}_i$  os pontos de mínimo e de máximo, respectivamente, de  $\gamma'_2$  em  $[t_{i-1}, t_i]$ . Prove que

$$\sum_{i=1}^n |\gamma'_1(\bar{t}_i) - \gamma'_2(\bar{t}_i)| \Delta t_i \leq \sum_{i=1}^n \gamma'_2(\bar{c}_i) \Delta t_i - \sum_{i=1}^n \gamma'_2(\bar{c}_i) \Delta t_i$$

- c) Prove que

$$\lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{[\gamma'_1(\bar{t}_i)]^2 + [\gamma'_2(\bar{t}_i)]^2} \Delta t_i = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

$$\left( \text{Sugestão: } \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma'_2(\bar{c}_i) \Delta t_i = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma'_2(\bar{c}_i) \Delta t_i = \int_a^b \gamma'_2(t) dt \right)$$

# 8

## FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS A VALORES REAIS

A maioria das relações que ocorrem na física, economia e, de modo geral, na natureza é traduzida por funções de duas, três e mais variáveis reais; daí a conveniência de um estudo detalhado de tais funções.

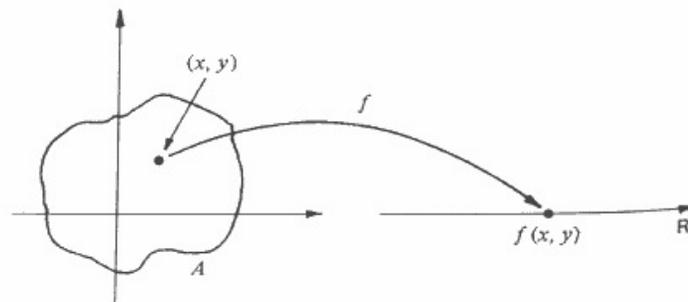
Neste capítulo e nos seguintes daremos ênfase ao estudo das funções reais de duas variáveis reais, e o leitor não terá dificuldade em generalizar os resultados para funções de mais de duas variáveis, já que não há diferenças importantes.

### 8.1. FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS REAIS A VALORES REAIS

Uma função de duas variáveis reais a valores reais é uma função  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $A$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ . Uma tal função associa, a cada par  $(x, y) \in A$ , um único número  $f(x, y) \in \mathbb{R}$ . O conjunto  $A$  é o domínio de  $f$  e será indicado por  $D_f$ . O conjunto

$$Im f = \{f(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in D_f\}$$

é a imagem de  $f$ . As palavras *aplicação* e *transformação* são sinônimas de função.



$f$  transforma o par  $(x, y)$  no número  $f(x, y)$

Por simplificação, deixaremos, muitas vezes, de especificar o domínio, ficando implícito, então, que se trata do "maior" subconjunto do  $\mathbb{R}^2$  para o qual faz sentido a regra em questão.

**EXEMPLO 1.** Seja  $f$  a função de duas variáveis reais a valores reais dada por  $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ . O domínio de  $f$  é o conjunto de todos os pares  $(x, y)$  de números reais, com  $x \neq y$ , isto é:  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$ . Esta função transforma o par  $(x, y)$  no número real

$$\frac{x+y}{x-y}$$

**EXEMPLO 2.** Seja  $f$  a função do exemplo anterior. Calcule

a)  $f(2, 3)$

b)  $f(a+b, a-b)$

*Solução*

a)  $f(2, 3) = \frac{2+3}{2-3} = -5$

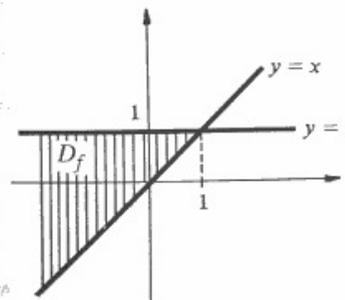
b)  $f(a+b, a-b) = \frac{a+b+a-b}{a+b-(a-b)} = \frac{a}{b}$

**EXEMPLO 3.** Represente graficamente o domínio da função  $f$  dada por

$$f(x, y) = \sqrt{y-x} + \sqrt{1-y}$$

*Solução*

O domínio de  $f$  é o conjunto de todos os pares  $(x, y)$ , com  $y-x \geq 0$  e  $1-y \geq 0$ :  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x \text{ e } y \leq 1\}$ .



**EXEMPLO 4.** Seja  $f$  a função dada por

$$(x, y) \mapsto z \text{ onde } z = 5x^2y - 3x.$$

O valor de  $f$  em  $(x, y)$  é  $z = f(x, y) = 5x^2y - 3x$ . Na equação acima,  $x$  e  $y$  estão sendo vistas como variáveis independentes e  $z$  como variável dependente. Observe que o domínio de  $f$  é o  $\mathbb{R}^2$ .

**EXEMPLO 5.** Represente graficamente o domínio da função  $w = f(u, v)$  dada por

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1, w \geq 0.$$

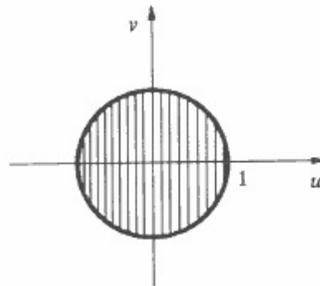
*Solução*

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1, w \geq 0 \Rightarrow w = \sqrt{1 - u^2 - v^2}.$$

Assim,  $f$  é a função dada por  $f(u, v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$ . Seu domínio é o conjunto de todas  $(u, v)$ , com  $1 - u^2 - v^2 \geq 0$ .

$$1 - u^2 - v^2 \geq 0 \Leftrightarrow u^2 + v^2 \leq 1.$$

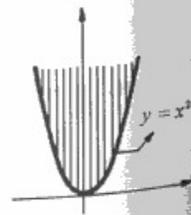
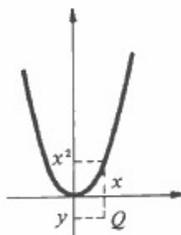
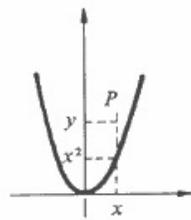
O domínio de  $f$  é o círculo de raio 1 e centro na origem.



**EXEMPLO 6.** Represente graficamente o domínio da função  $z = f(x, y)$  dada por  $z = \sqrt{y - x^2}$ .

*Solução*

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 \geq 0\}; y - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq x^2.$$



$P = (x, y)$  pertence a  $D_f$ , pois  $y > x^2$ .

$Q = (x, y)$  não pertence a  $D_f$ , pois  $y < x^2$ .

A região hachurada representa o domínio de  $f$ .

**EXEMPLO 7.** (Função polinomial). Uma função polinomial de duas variáveis reais a variáveis reais é uma função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \sum_{m+n \leq p} a_{mn} x^m y^n$$

onde  $p$  é um natural fixo e os  $a_{mn}$  são números reais dados; a soma é estendida a todas as soluções  $(m, n)$ ,  $m$  e  $n$  naturais, da inequação  $m + n \leq p$ .

a)  $f(x, y) = 3x^3y^2 - \frac{1}{3}xy + \sqrt{2}$  é uma função polinomial.

b)  $f(x, y) = ax + by + c$ , onde  $a, b, c$  são reais dados, é uma função polinomial; tal função denomina-se *função afim*.

**EXEMPLO 8.** (Função linear). Toda função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = ax + by$$

onde  $a, b$  são reais dados, denomina-se *função linear*. Toda função linear é uma função afim.

**EXEMPLO 9.** (Função racional). Toda função  $f$  dada por

$$f(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

onde  $p$  e  $q$  são funções polinomiais, denomina-se *função racional*. O domínio de  $f$  é o conjunto  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid q(x, y) \neq 0\}$ .

a)  $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$  é uma função racional. Seu domínio é:  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$ .

b)  $g(x, y) = \frac{x^2 - 3xy + 1}{x^2y^2 + 1}$  é uma função racional;  $D_g = \mathbb{R}^2$ .

**EXEMPLO 10.** (Função homogênea). Uma função  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}^2$ , denomina-se *função homogênea de grau  $\lambda$*  se

$$f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y)$$

para todo  $t > 0$  e para todo  $(x, y) \in A$  tais que  $(tx, ty) \in A$ .

a)  $f(x, y) = 3x^2 + 5xy + y^2$  é homogênea de grau 2. De fato,

$$f(tx, ty) = 3(tx)^2 + 5(tx)(ty) + (ty)^2 = t^2(3x^2 + 5xy + y^2)$$

ou seja,

$$f(tx, ty) = t^2 f(x, y).$$

b)  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$  é homogênea de grau  $-1$ .

De fato,

$$f(tx, ty) = \frac{tx}{t^2(x^2 + y^2)} = t^{-1} f(x, y).$$

c)  $f(x, y) = 2x + y + 5$  não é homogênea. (Por quê?)

Exercícios 8.1

1. Seja  $f(x, y) = 3x + 2y$ . Calcule

a)  $f(1, -1)$

b)  $f(a, x)$

c)  $\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$

d)  $\frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$

2. Seja  $f(x, y) = \frac{x-y}{x+2y}$ .

- a) Determine o domínio.
- b) Calcule  $f(2u+v, v-u)$ .

3. Represente graficamente o domínio da função  $z = f(x, y)$  dada por

a)  $x + y - 1 + z^2 = 0, z \geq 0$

b)  $f(x, y) = \frac{x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

c)  $z = \sqrt{y-x^2} + \sqrt{2x-y}$

d)  $z = \ln(2x^2 + y^2 - 1)$

e)  $z^2 + 4 = x^2 + y^2, z \geq 0$

f)  $z = \sqrt{|x| - |y|}$

g)  $4x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0$

h)  $z = \frac{x-y}{\sin x - \sin y}$

4. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função linear. Sabendo que  $f(1, 0) = 2$  e  $f(0, 1) = 3$ , calcule  $f(x, y)$ .

5. Verifique se a função é homogênea. Em caso afirmativo, determine o grau de homogeneidade.

a)  $f(x, y) = \frac{x^3 + 2xy^2}{x^3 - y^3}$

b)  $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$

c)  $f(x, y) = 5x^3y + x^4 + 3$

d)  $f(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2}$

6. Suponha que  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seja homogênea do grau 2 e  $f(a, b) = a$  para todo  $(a, b)$ , com  $a^2 + b^2 = 1$ . Calcule

a)  $f(4\sqrt{3}, 4)$

b)  $f(0, 3)$

c)  $f(x, y), (x, y) \neq (0, 0)$

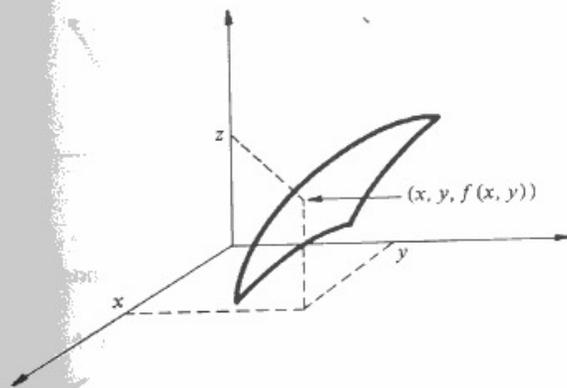
7. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  homogênea e suponha que  $f(a, b) = 0$  para todo  $(a, b)$ , com  $a^2 + b^2 = 1$ . Mostre que  $f(x, y) = 0$  para todo  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

8. Seja  $g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada. Prove que existe uma única função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , homogênea de grau  $\lambda \neq 0$ , tal que, para todo  $\alpha \in [0, 2\pi[$ ,  $f(\cos \alpha, \sin \alpha) = g(\alpha)$ . (Observação: o Exerc. 8 nos diz que uma função homogênea fica completamente determinada quando se conhecem os valores que ela assume sobre os pontos de uma circunferência de centro na origem.)

### 8.2. GRÁFICO E CURVAS DE NÍVEL

Seja  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in A$ , uma função real de duas variáveis reais. O conjunto  $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y), (x, y) \in A\}$

denomina-se gráfico de  $f$ . Munido-se o espaço de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de  $f$  pode então ser pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto  $(x, y, f(x, y))$ , quando  $(x, y)$  percorre o domínio de  $f$ .

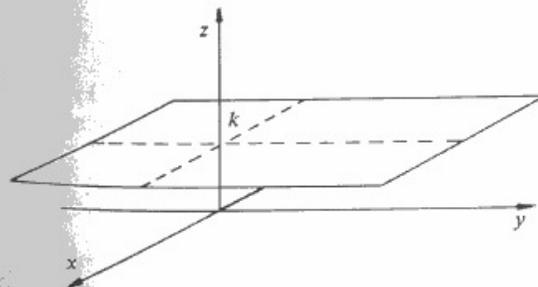


A representação geométrica do gráfico de uma função de duas variáveis não é tarefa fácil. Em vista disso, quando se pretende ter uma visão geométrica da função, lança-se mão de suas curvas de nível, cuja representação geométrica é sempre mais fácil de ser obtida do que o gráfico da função.

Sejam  $z = f(x, y)$  uma função e  $c \in \text{Im } f$ . O conjunto de todos os pontos  $(x, y)$  de  $D_f$  tais que  $f(x, y) = c$  denomina-se curva de nível de  $f$  correspondente ao nível  $z = c$ . Assim,  $f$  é constante sobre cada curva de nível.

O gráfico de  $f$  é um subconjunto do  $\mathbb{R}^3$ . Uma curva de nível é um subconjunto do domínio de  $f$ , portanto, do  $\mathbb{R}^2$ .

**EXEMPLO 1.** O gráfico da função constante  $f(x, y) = k$  é um plano paralelo ao plano  $xy$ .



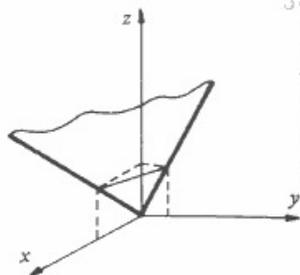
**EXEMPLO 2.** O gráfico da função linear dada por  $z = 2x + y$  é um plano passando pela origem e normal ao vetor  $\vec{n} = (2, 1, -1)$ :

$$z = 2x + y \Leftrightarrow 2x + y - z = 0 \Leftrightarrow (2, 1, -1) \cdot [(x, y, z) - (0, 0, 0)] = 0.$$

Tal plano é determinado pelas retas

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases} \text{ e } \begin{cases} y = 0 \\ z = 2x. \end{cases}$$

Observe que  $\begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases}$



é uma reta situada no plano  $yz$ , enquanto  $\begin{cases} y = 0 \\ z = 2x \end{cases}$  está situada no plano  $xz$ .

**EXEMPLO 3.** O gráfico da função afim  $f$  dada por  $z = ax + by + c$  é um plano normal ao vetor  $\vec{n} = (a, b, -1)$ . Tal plano é determinado pelas retas

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = by + c \end{cases} \text{ e } \begin{cases} y = 0 \\ z = ax + c. \end{cases}$$

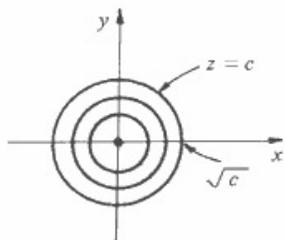
**EXEMPLO 4.** Desenhe as curvas de nível de  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

*Solução*

Observamos, inicialmente, que a imagem de  $f$  é o conjunto de todos os reais  $z \geq 0$ . Seja então,  $c \geq 0$ . A curva de nível correspondente a  $z = c$  é

$$f(x, y) = c \text{ ou } x^2 + y^2 = c.$$

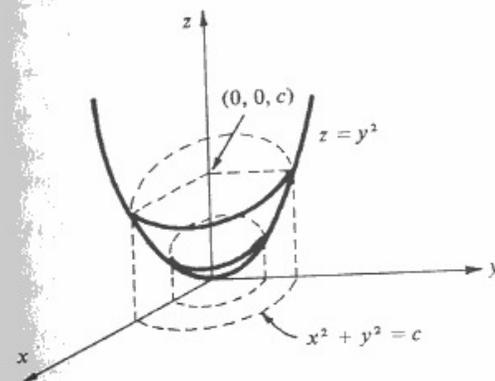
Assim, as curvas de nível ( $c > 0$ ) são circunferências concêntricas de centro na origem. Sobre cada curva de nível  $x^2 + y^2 = c$  a função assume sempre o mesmo valor  $c$ . A curva de nível correspondente a  $c = 0$  é o ponto  $(0, 0)$ .



**EXEMPLO 5.** Esboce o gráfico de  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

*Solução*

A interseção do gráfico de  $f$  com o plano  $x = 0$  é a parábola  $\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$  localizada no plano  $yz$ . Por outro lado, a interseção do gráfico de  $f$  com o plano  $z = c$  ( $c > 0$ ) é a circunferência  $\begin{cases} z = c \\ x^2 + y^2 = c \end{cases}$  de centro no eixo  $Oz$  e localizada no plano  $z = c$ . Assim, o gráfico de  $f$  é obtido girando, em torno do eixo  $Oz$ , a parábola  $\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$ . (Por quê?)



O gráfico de  $f$  é um *parabolóide de rotação*. Observe que a curva de nível  $f(x, y) = c$  nada mais é que a projeção no plano  $xy$  da interseção do gráfico de  $f$  com o plano  $z = c$ .

**Observação.** O gráfico da função dada por  $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  ( $a > 0$  e  $b > 0$ ) é uma superfície denominada *parabolóide elíptico*. Se  $a = b$ , temos o *parabolóide de rotação*.

**EXEMPLO 6.** Seja  $f$  a função dada por  $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ .

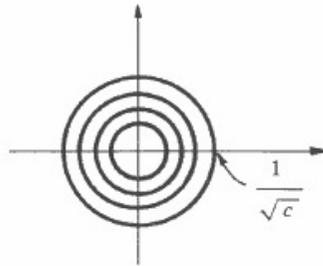
- Determine o domínio e a imagem.
- Desenhe as curvas de nível.
- Esboce o gráfico.

*Solução*

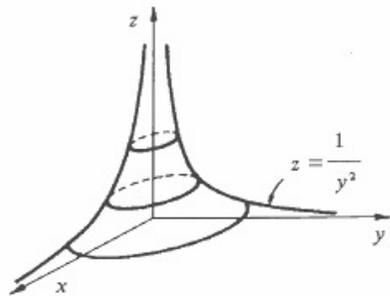
- $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$  e  $Im f = \{z \in \mathbb{R} \mid z > 0\}$ .
- A curva de nível correspondente a  $z = c$  ( $c > 0$ ) é

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = c \text{ ou } x^2 + y^2 = \frac{1}{c}.$$

As curvas de nível são então circunferências concêntricas de centro na origem. Quando  $c$  tende a  $+\infty$ , o raio tende a zero. Por outro lado, quando  $c$  tende a zero, o raio tende a  $+\infty$ .



c) O plano  $x = 0$  intercepta o gráfico de  $f$  segundo a curva  $\begin{cases} x = 0 \\ z = \frac{1}{y^2} \end{cases}$ . Para cada  $c > 0$ , o plano  $z = c$  intercepta o gráfico de  $f$  segundo a circunferência  $\begin{cases} z = c \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{c} \end{cases}$ . O gráfico de  $f$  é obtido, então, girando em torno do eixo  $Oz$ , a curva  $\begin{cases} x = 0 \\ z = \frac{1}{y^2} \end{cases}$ .



**EXEMPLO 7.** Considere a função  $f$  dada por  $z = \frac{y}{x-1}$ .

- a) Determine o domínio e a imagem.
- b) Desenhe as curvas de nível.

*Solução*

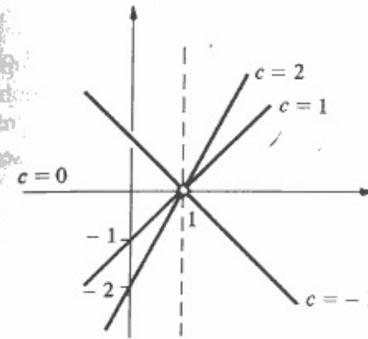
a) O domínio é o conjunto de todos  $(x, y)$ , com  $x \neq 1$ . De  $f(2, y) = y$ , para todo  $y$ , segue que a imagem de  $f$  é  $\mathbb{R}$ . Assim

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 1\} \text{ e } Im f = \mathbb{R}.$$

b) Para cada  $c$  real, a curva de nível correspondente a  $z = c$  é

$$c = \frac{y}{x-1} \text{ ou } y = c(x-1) \text{ (} x \neq 1 \text{)}.$$

Cada curva de nível de  $f$  é então uma reta que passa pelo ponto  $(1, 0)$  e “furada” neste ponto. Como é o gráfico de  $f$ ? (Sugestão: pegue cada curva de nível de  $f$  e coloque-a na altura  $z = c$  respectiva.)



Sejam  $z = f(x, y)$  uma função e  $A$  um subconjunto de  $D_f$ . Seja  $(x_0, y_0) \in A$ . Dizemos que  $f(x_0, y_0)$  é o *valor máximo* (resp. *valor mínimo*) de  $f$  em  $A$  se para todo  $(x, y) \in A$

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \text{ (resp. } f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \text{)}.$$

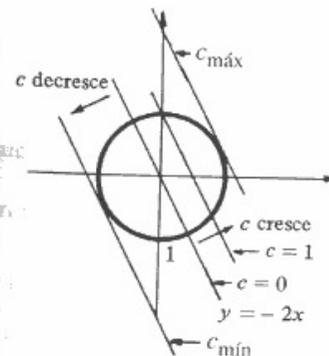
Diremos, então, que  $(x_0, y_0)$  é um *ponto de máximo* de  $f$  em  $A$  (resp. *ponto de mínimo*).

**EXEMPLO 8.** Sejam  $f(x, y) = 2x + y$  e  $A$  o conjunto de todos  $(x, y)$  tais que  $x^2 + y^2 = 1$ . Raciocinando geometricamente, determine, caso existam, os valores máximo e mínimo de  $f$  em  $A$ .

*Solução*

Para cada  $c$  real, a curva de nível de  $f$  correspondente a  $z = c$  é a reta

$$\textcircled{1} \quad c = 2x + y.$$



Indicando por  $c_{\text{máx}}$  o valor máximo de  $f$  em  $A$ , a reta  $\textcircled{1}$  para  $z = c_{\text{máx}}$  deve ser tangente à circunferência. (Por quê?) Da mesma forma, para  $z = c_{\text{mín}}$  a reta  $\textcircled{1}$  deve ser tangente à

circunferência. Vamos então determinar  $c$  para que a reta ① seja tangente à circunferência. Devemos determinar  $c$  de modo que o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + y = c \end{cases}$$

tenha solução única. Substituindo  $y = c - 2x$  em  $x^2 + y^2 = 1$  obtemos

$$x^2 + (c - 2x)^2 = 1 \text{ ou } 5x^2 - 4cx + c^2 - 1 = 0.$$

Para que o sistema tenha solução única, o discriminante deve ser igual a zero:

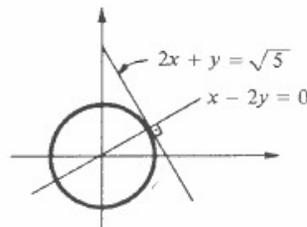
$$16c^2 - 20(c^2 - 1) = 0$$

ou seja,

$$c = \pm\sqrt{5}.$$

Assim,  $\sqrt{5}$  é o valor máximo de  $f$  em  $A$  e  $-\sqrt{5}$  o valor mínimo. Vamos, agora, determinar os pontos de máximo e de mínimo. O ponto de máximo é o ponto em que a reta  $2x + y = \sqrt{5}$  tangencia a circunferência. Tal ponto é a solução do sistema

$$\begin{cases} 2x + y = \sqrt{5} \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$



onde  $x - 2y = 0$  é a reta que passa pela origem e é perpendicular a  $2x + y = \sqrt{5}$ . O ponto de máximo é:  $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ . Deixamos a seu cargo verificar que  $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$  é o ponto de mínimo.

O próximo exemplo será utilizado posteriormente.

**EXEMPLO 9.** Seja  $f(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

- a) Desenhe as curvas de nível de  $f$ .
- b) Determine a imagem de  $f$ .

*Solução*

a) Se  $c = 0$ ,  $\frac{2xy^2}{x^2 + y^4} = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $y = 0$ .

Para  $c \neq 0$ ,

$$\frac{2xy^2}{x^2 + y^4} = c \Leftrightarrow 2xy^2 = cx^2 + cy^4 \Leftrightarrow cx^2 - 2xy^2 + cy^4 = 0.$$

Resolvendo em  $x$  obtemos

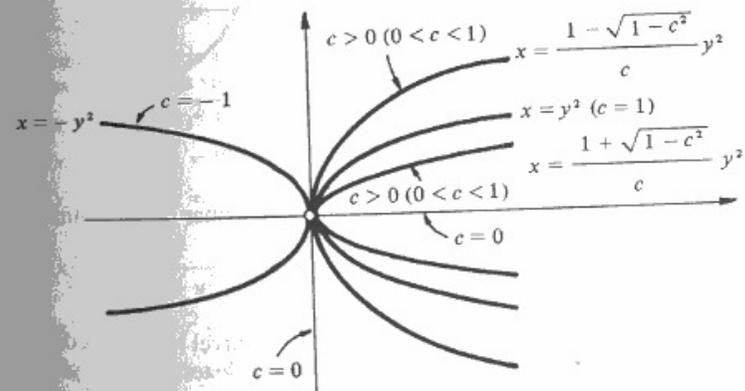
$$x = \frac{2y^2 \pm \sqrt{4y^4 - 4c^2y^4}}{2c} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - c^2}}{c} y^2. \quad (-1 \leq c \leq 1, c \neq 0).$$

De passagem, observamos que a imagem de  $f$  é o intervalo  $[-1, 1]$ . (Por quê?) O valor máximo de  $f$  é 1 e é atingido em todos os pontos, diferentes de  $(0, 0)$ , da parábola  $x = y^2$  ( $c = 1$ ). A curva de nível correspondente a  $c \neq 0$ ,  $-1 < c < 1$ , é constituída de todos os pontos  $(x, y) \neq (0, 0)$  que pertencem ou a

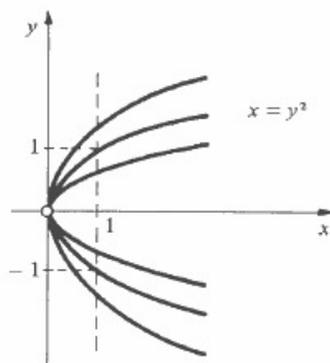
$$x = \frac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{c} y^2$$

ou a

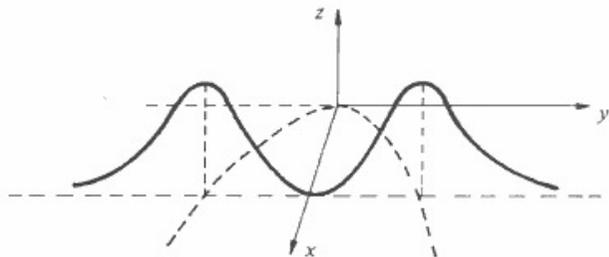
$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - c^2}}{c} y^2.$$



Observe que, à medida que  $c$  vai se aproximando de zero, a parábola de “fora”,  $x = \frac{1 - \sqrt{1 - c^2}}{c} y^2$ , vai “abrindo” cada vez mais, enquanto  $x = \frac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{c} y^2$  vai “fechando” cada vez mais. O valor mínimo de  $f$  é  $-1$  e é atingido em todos os pontos, diferentes de  $(0, 0)$ , da parábola  $x = -y^2$ . Para ajudá-lo a visualizar o gráfico, vamos estudar, com auxílio das curvas de nível, a variação de  $f$  sobre a reta  $x = 1$ ; o que vamos fazer, então, é estudar a variação de  $f(1, y)$  quando  $y$  varia em  $\mathbb{R}$ : quando  $y$  varia de  $-1$  a  $0$ ,  $f(1, y)$  decresce, passando do valor 1 em  $(1, -1)$  para o valor 0 em  $(1, 0)$ ; quando  $y$  varia de  $0$  a  $1$ ,  $f(1, y)$  cresce, passando do valor 0 em  $(1, 0)$  para o valor 1 em  $(1, 1)$ ;  $f(1, y)$  é crescente em  $]-\infty, -1]$  e decrescente em  $[1, +\infty[$ . Observe que  $f(1, y)$  tende a zero para  $y \rightarrow +\infty$  ou  $y \rightarrow -\infty$ .



A próxima figura mostra a interseção do gráfico de  $f$  com o plano  $x = 1$ . Sugerimos ao leitor desenhar a interseção do gráfico de  $f$  com o plano  $x = x_0$ , onde  $x_0 \neq 0$  é um real qualquer.



Deu para ter uma idéia do gráfico de  $f$ ? Desafio: tente desenhar ou fazer uma maquete do gráfico.

b)  $Im f = [-1, 1]$ .

Para finalizar, observamos que a denominação curva de nível varia de acordo com o que a função  $f$  representa. Por exemplo: se  $f$  é uma distribuição de temperatura plana, ( $f(x, y)$  é a temperatura no ponto  $(x, y)$ ) as curvas de nível denominam-se *isotermas* (pontos de mesma temperatura); se  $f$  é a energia potencial de um certo campo de forças bidimensional, as curvas de nível denominam-se *curvas equipotenciais* etc.

Exercícios 8.2

1. Desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico.

a)  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

b)  $f(x, y) = x + 3y$

c)  $z = 4x^2 + y^2$

d)  $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$

e)  $z = x + y + 1$

f)  $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

g)  $f(x, y) = x^2, -1 \leq x \leq 0$  e  $y \geq 0$

h)  $f(x, y) = 1 - x^2, x \geq 0, y \geq 0$  e  $x + y \leq 1$

i)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

j)  $z = (x - y)^2, x \geq 0$  e  $y \geq 0$

D)  $z = f(x, y)$  dada por  $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$

m)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, x^2 + y^2 < 1$  n)  $z = \arctg(x^2 + y^2)$

o)  $f(x, y) = x, x \geq 0$

p)  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 1$

q)  $f(x, y) = \text{sen } x, 0 \leq x \leq \pi, y \geq 0$

r)  $f(x, y) = xy, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

2. Desenhe as curvas de nível e determine a imagem:

a)  $f(x, y) = x - 2y$

b)  $z = \frac{y}{x - 2}$

c)  $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$

d)  $z = \frac{x}{y - 1}$

e)  $z = xy$

f)  $f(x, y) = x^2 - y^2$

g)  $z = 4x^2 + y^2$

h)  $z = 3x^2 - 4xy + y^2$

i)  $z = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

j)  $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

3. Desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico da função

$f(x, y) = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$ .

4. Determine, caso existam, os valores máximo e mínimo de  $f$  em  $A$ ; determine, também, os pontos em que estes valores são atingidos.

a)  $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 3$  e  $A = \mathbb{R}^2$ .

b)  $f(x, y) = xy$  e  $A = \mathbb{R}^2$ .

c)  $f(x, y) = xy$  e  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$ .

d)  $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$  e  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ .

e)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  e  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 1\}$ .

(Sugestão. Observe que  $g(y) = f(1 - 2y, y), y \in \mathbb{R}$ , fornece os valores de  $f$  sobre a reta  $x + 2y = 1$ .)

f)  $f(x, y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $A = \mathbb{R}^2$ .

g)  $f(x, y) = xy$  e  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ .

5. Raciocinando geometricamente, determine, caso existam, os valores máximo e mínimo de  $f$  em  $A$ , bem como os pontos em que estes valores são atingidos.

a)  $f(x, y) = 2x + y + 3$  e  $A$  o conjunto de todo  $(x, y)$  tais que  $x \geq 0, y \geq 0$  e  $x + y \leq 2$ .

b)  $f(x, y) = x + y$  e  $A$  o conjunto de todos  $(x, y)$  tais que  $x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 7, 2x + y \leq 5$  e  $y \geq x - 1$ .

c)  $f(x, y) = \frac{y}{x - 1}$  e  $A$  o conjunto de todos  $(x, y)$  tais que  $-1 \leq x \leq 0$  e  $1 \leq y \leq 2$ .

d)  $f(x, y) = \frac{y}{x + 1}$  e  $A$  o círculo  $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ .

6. Um ponto  $P$  descreve uma curva sobre a superfície  $z = xy$  de modo que a sua projeção  $Q$  sobre o plano  $xy$  descreve a curva  $x = 5 - t$ ,  $y = t^2 + 3$  e  $z = 0$ . Determine as alturas máxima e mínima (em relação ao plano  $xy$ ) quando  $t$  percorre o intervalo  $[0, 4]$ .
7. Um ponto  $P$  descreve uma curva sobre o gráfico da função  $f(x, y) = x^2 + y^2$  de modo que a sua projeção  $Q$  sobre o plano  $xy$  descreve a reta  $x + y = 1$ . Determine o ponto da curva que se encontra mais próximo do plano  $xy$ . (Desenhe a trajetória descrita por  $P$ .)
8. Seja  $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ . Desenhe a imagem da curva  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  onde  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$  e  $z = f(x(t), y(t))$  ( $R > 0$ ). Como é o gráfico de  $f$ ?
9. Mesmo exercício que o anterior para a função  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ .
10. Sejam  $f(x, y) = xy$  e  $\gamma(t) = (at, bt, f(at, bt))$ . Desenhe a imagem de  $\gamma$  sendo
- a)  $a = 0$  e  $b = 1$ .                      b)  $a = 1$  e  $b = 1$ .  
 c)  $a = 1$  e  $b = 0$ .                      d)  $a = -1$  e  $b = 1$ .
11. Como é o gráfico de  $f(x, y) = xy$ ?
12. Suponha que  $T(x, y) = 4x^2 + 9y^2$  represente uma distribuição de temperatura no plano  $xy$ :  $T(x, y)$  é a temperatura, que podemos supor em  $^{\circ}\text{C}$ , no ponto  $(x, y)$ .
- a) Desenhe a isoterma correspondente à temperatura de  $36^{\circ}\text{C}$ .  
 b) Determine o ponto de mais baixa temperatura da reta  $x + y = 1$ .
13. Suponha que  $T(x, y) = 2x + y$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) represente uma distribuição de temperatura no plano  $xy$ .
- a) Desenhe as isotermas correspondentes às temperaturas:  $0^{\circ}\text{C}$ ,  $3^{\circ}\text{C}$  e  $-1^{\circ}\text{C}$ .  
 b) Raciocinando geometricamente, determine os pontos de mais alta e mais baixa temperatura do círculo  $x^2 + y^2 \leq 4$ .
14. Duas curvas de nível podem interceptar-se? Justifique.

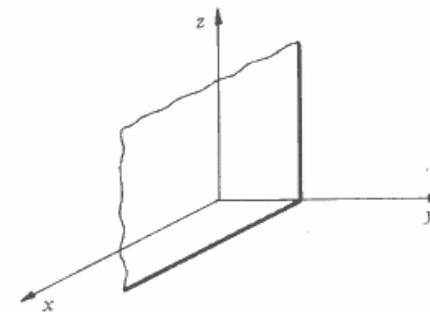
### 8.3. FUNÇÕES DE TRÊS VARIÁVEIS REAIS A VALORES REAIS. SUPERFÍCIES DE NÍVEL

Uma função de três variáveis reais a valores reais, definida em  $A \subset \mathbb{R}^3$ , é uma função que associa, a cada terna ordenada  $(x, y, z) \in A$ , um único número real  $w = f(x, y, z)$ . O gráfico de tal função é o conjunto

$$G_f = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid w = f(x, y, z), (x, y, z) \in A\}.$$

O gráfico de  $f$  é então um subconjunto do  $\mathbb{R}^4$ , não nos sendo possível, portanto, representá-lo geometricamente. Para se ter uma visão geométrica de tal função, podemos nos valer de suas *superfícies de nível*. Seja  $c \in \text{Im } f$  o conjunto de todos os pontos  $(x, y, z) \in A$  tais que  $f(x, y, z) = c$  denomina-se *superfície de nível correspondente ao nível  $w = c$* .

**EXEMPLO 1.** Seja  $f(x, y, z) = y$ . Para cada real  $c$ , a superfície de nível correspondente a  $w = c$  é o plano  $y = c$ .



**EXEMPLO 2.** As superfícies de nível de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  são superfícies esféricas de centro na origem

$$x^2 + y^2 + z^2 = c.$$

A superfície de nível correspondente a  $c = 0$  é o ponto  $(0, 0, 0)$ .

#### Exercícios 8.3

1. Represente geometricamente o domínio da função dada.

$$a) f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} \qquad b) f(x, y, z) = \sqrt{1 - z}$$

$$c) f(x, y, z) = \sqrt{1 - x - y - z}, \quad x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } z \geq 0$$

$$d) w = \sqrt{1 - |x| - |y| - |z|} \qquad e) f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$$

2. Desenhe a superfície de nível correspondente a  $c = 1$ .

$$a) f(x, y, z) = x \qquad b) f(x, y, z) = z$$

$$c) f(x, y, z) = x^2 + y^2 \qquad d) f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2$$

3. Duas superfícies de nível de uma função  $f$  podem interceptar-se? Justifique.

# 9

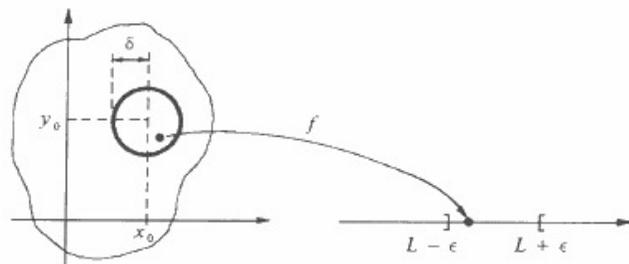
## LÍMITE E CONTINUIDADE

### 9.1. LÍMITE

Esta seção é quase que uma reprodução dos tópicos abordados no Cap. 3 sobre limite de funções de uma variável real, razão pela qual a maioria dos resultados será enunciada em forma de exercícios.

**Definição.** Sejam  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $(x_0, y_0)$  um ponto de acumulação de  $A$  e  $L$  um número real. Definimos,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Para todo } \epsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que, para todo} \\ (x, y) \in D_f, \\ 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon \end{cases}$$



$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$  significa: dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x, y)$  permanece em  $]L - \epsilon, L + \epsilon[$  quando  $(x, y)$ ,  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ , varia na bola aberta de centro  $(x_0, y_0)$  e raio  $\delta$ .

**Observação.** De agora em diante, sempre que falarmos que  $f$  tem limite em  $(x_0, y_0)$ , fica implícito que  $(x_0, y_0)$  é ponto de acumulação de  $D_f$ .

**EXEMPLO 1.** Se  $f(x, y) = k$  é uma função constante, então, para todo  $(x_0, y_0)$  em  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} k = k.$$

*Solução*

$|f(x, y) - k| = |k - k| = 0$ ; assim, dado  $\epsilon > 0$  e tomando-se um  $\delta > 0$  qualquer,

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - k| < \epsilon.$$

Logo,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} k = k.$$

**EXEMPLO 2.** Se  $f(x, y) = x$ , para todo  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x = x_0.$$

*Solução*

Para todo  $(x, y)$  em  $\mathbb{R}^2$ ,  $|x - x_0| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$ . (Verifique.)

Então, dado  $\epsilon > 0$  e tomando-se  $\delta = \epsilon$  vem:

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \epsilon$$

ou seja,

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - x_0| < \epsilon.$$

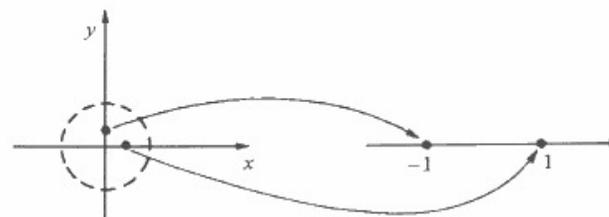
Logo,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x = x_0.$$

**EXEMPLO 3.**  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  tem limite em  $(0, 0)$ ? Justifique.

*Solução*

Inicialmente, vejamos como se comportam os valores  $f(x, y)$  para  $(x, y)$  próximo de  $(0, 0)$ . Sobre o eixo  $0x$  temos:  $f(x, 0) = 1, x \neq 0$ . Sobre o eixo  $0y$ ,  $f(0, y) = -1, y \neq 0$ .



O estudo anterior nos mostra que não existe número  $L$  tal que  $f(x, y)$  permaneça próximo de  $L$  para  $(x, y)$  próximo de  $(0, 0)$ ; este fato indica-nos que  $f$  não deve ter limite em  $(0, 0)$  e não tem mesmo, pois, qualquer que seja  $L$ , tomando-se  $\epsilon = \frac{1}{2}$ , tem-se:

$$\text{se } L \leq 0, |f(x, 0) - L| \geq \frac{1}{2} \text{ para todo } x \neq 0;$$

$$\text{se } L > 0, |f(0, y) - L| \geq \frac{1}{2} \text{ para todo } y \neq 0.$$

Assim, para todo real  $L$ , a afirmação

$$“\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, (x, y) \in D_f, 0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon”$$

é falsa.

Quando tivermos que provar que determinados limites não existem, o próximo exemplo poderá nos ajudar.

**EXEMPLO 4.** Suponha que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$ . Seja  $\gamma$  uma curva em  $\mathbb{R}^2$ , contínua em  $t_0$ , com  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$  e, para  $t \neq t_0$ ,  $\gamma(t) \neq (x_0, y_0)$  com  $\gamma(t) \in D_f$ . Prove que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma(t)) = L.$$

*Solução*

De  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$  segue que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$\textcircled{1} \quad 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon.$$

Sendo  $\gamma$  contínua em  $t_0$ , para todo  $\delta_1 > 0$  acima, existe  $\delta > 0$  tal que

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| < \delta_1$$

e, portanto, tendo em vista  $\gamma(t) \neq (x_0, y_0)$  para  $t \neq t_0$ ,

$$\textcircled{2} \quad 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow 0 < \|\gamma(t) - (x_0, y_0)\| < \delta_1.$$

De  $\textcircled{1}$  e  $\textcircled{2}$  segue

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(\gamma(t)) - L| < \epsilon$$

ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma(t)) = L.$$

**Observação.** Sejam  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  duas curvas nas condições do Exemplo 4. Segue do exemplo anterior que se ocorrer

$$\textcircled{3} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma_1(t)) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma_2(t)) = L_2$$

com  $L_1 \neq L_2$ , então,  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  não existirá. Da mesma forma, tal limite não existirá se um dos limites em  $\textcircled{3}$  não existir.

Vejamos como provar que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  não existe (Exemplo 3) utilizando a observação acima. Sejam  $\gamma_1(t) = (t, 0)$  e  $\gamma_2(t) = (0, t)$ . Seja  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ . Temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^2}{t^2} = -1.$$

Logo,  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  não existe.

Observamos que continuam válidas para funções de duas variáveis reais a valores reais as seguintes propriedades dos limites cujas demonstrações são exatamente iguais às que fizemos para funções de uma variável real (veja o Cap. 3 do Vol. 1).

1. **(Teorema do confronto.)** Se  $f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$  para  $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r$  e se

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} h(x, y)$$

então

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = L.$$

2. Se  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = 0$  e se  $|g(x, y)| \leq M$  para  $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r$ , onde  $r > 0$  e  $M > 0$  são reais fixos, então

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \cdot g(x, y) = 0$$

↑ limitada

3.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} |f(x, y)| = 0.$

4.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y) - L] = 0.$

5.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x_0+h, y_0+k) = L.$

6. Se  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L_1$  e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = L_2$ , então,

a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y) + g(x,y)] = L_1 + L_2.$

b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} kf(x,y) = kL_1.$  ( $k$  constante)

c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = L_1L_2.$

d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}$ , desde que  $L_2 \neq 0.$

7. (Conservação do sinal.) Se  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L, L > 0$ , então existirá  $\delta > 0$ , tal que, para todo  $(x,y) \in D_f$ ,

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow f(x,y) > 0.$$

EXEMPLO 5. Calcule, caso exista,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}.$

Solução

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} = x \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$  e  $\left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right| \leq 1$ , para todo  $(x,y) \neq (0,0)$ . Assim,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0.$$

EXEMPLO 6. Calcule, caso exista,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}.$

Solução

Seja  $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$  e tomemos  $\gamma_1(t) = (0,t)$  e  $\gamma_2(t) = (t,t)$ .

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0^2}{0^2+t^2} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{1}{2}.$$

Logo,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$  não existe.

CUIDADO:  $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$  não é limitada!

Exercícios 9.1

1. Calcule, caso exista.

a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}$

b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

e)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^4+y^4}$

f)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$

g)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{y-x^3}$

h)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2-y^2}$

2. Seja  $f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^4}$  (veja Exemplo 9 — Seç. 8.2).

a) Considere a reta  $\gamma(t) = (at, bt)$ , com  $a^2 + b^2 > 0$ ; mostre que, quaisquer que sejam  $a$  e  $b$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = 0.$$

Tente visualizar este resultado através das curvas de nível de  $f$ .

b) Calcule  $\lim_{t \rightarrow 0} f(\delta(t))$ , onde  $\delta(t) = (t^2, t)$ .

(Antes de calcular o limite, tente prever o resultado olhando para as curvas de nível de  $f$ .)

c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}$  existe? Por quê?

3. Sejam  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  curvas satisfazendo as condições do Exemplo 4. A afirmação:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma_2(t)) = L \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

é falsa ou verdadeira? Justifique.

4. Calcule  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x+h, y+k) - f(x,y) - 2xh - k}{\|(h,k)\|}$ , onde  $f(x,y) = x^2 + y$ .

5. Calcule, caso exista,  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|}$ , onde  $f$  é dada por  $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ .

6. Suponha que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = a$  e  $\lim_{u \rightarrow a} g(u) = L$ , com  $g$  não-definida em  $a \in \text{Im } f \subset D_g$ . Prove que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(f(x,y)) = \lim_{u \rightarrow a} g(u).$$

Prove, ainda, que o resultado acima continua válido se supusermos  $g$  definida em  $a$ , com  $g$  contínua em  $a$ .

7. Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ .

8. Seja  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2 - 1} & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$

Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2 - 1}$ .

## 9.2. CONTINUIDADE

**Definição.** Seja  $f$  uma função de duas variáveis reais a valores reais e seja  $(x_0, y_0) \in D_f$  com  $(x_0, y_0)$  ponto de acumulação de  $D_f$ . Definimos:

$$f \text{ contínua em } (x_0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

Se  $f$  for contínua em todos os pontos de um subconjunto  $A$  de  $D_f$ , diremos que  $f$  é contínua em  $A$ . Diremos, simplesmente, que  $f$  é contínua se o for em todos os pontos de seu domínio.

**EXEMPLO 1.** A função constante  $f(x,y) = k$  é contínua, pois,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = k = f(x_0, y_0)$$

para todo  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . (veja Exemplo 1 — Seção 9.1.)

**EXEMPLO 2.** A função  $f(x,y) = x$  é contínua, pois,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0 = f(x_0, y_0)$$

para todo  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . (Veja Exemplo 2 — Seção 9.1.)

**EXEMPLO 3.** A função  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$  é contínua em  $(0,0)$ . Justifique.

*Resolução*

Tomando-se  $\gamma_1(t) = (t, 0)$  e  $\gamma_2(t) = (0, t)$  vem,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

$$\text{e } \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^2}{t^2} = -1.$$

Logo,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  não existe, e, portanto,  $f$  não é contínua em  $(0,0)$ .

O próximo teorema nos diz que se  $g(u)$  e  $f(x,y)$  forem contínuas e se  $\text{Im } f \subset D_g$ , então a função composta  $h(x,y) = g(f(x,y))$  também o será.

**Teorema 1.** Sejam  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções tais que  $\text{Im } f \subset D_g$ . Se  $f$  for contínua em  $(x_0, y_0)$  e  $g$  contínua em  $f(x_0, y_0)$ , então a composta  $h(x,y) = g(f(x,y))$  será contínua em  $(x_0, y_0)$ .

*Demonstração*

Como  $g(u)$  é contínua em  $f(x_0, y_0)$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$\textcircled{1} \quad |u - f(x_0, y_0)| < \delta_1 \Rightarrow |g(u) - g(f(x_0, y_0))| < \epsilon.$$

Se  $f$  for contínua em  $(x_0, y_0)$ , para o  $\delta_1 > 0$  acima, existe  $\delta > 0$  tal que

$$\textcircled{2} \quad \|(x,y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \delta_1.$$

De  $\textcircled{1}$  e  $\textcircled{2}$  resulta,

$$\|(x,y) - (x_0, y_0)\| \leq \delta \Rightarrow |g(f(x,y)) - g(f(x_0, y_0))| < \epsilon;$$

logo,  $h(x,y) = g(f(x,y))$  é contínua em  $(x_0, y_0)$ . ■

Como consequência deste teorema, segue que se  $g(x)$  for contínua, então a função  $h$  dada por  $h(x,y) = g(x)$  também será contínua. De fato, sendo  $f(x,y) = x$ , teremos  $h(x,y) = g(f(x,y))$ , com  $g$  e  $f$  contínuas.

**EXEMPLO 4.**  $h(x,y) = x^2$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ , pois  $g(x) = x^2$  é contínua em  $\mathbb{R}$ .

**EXEMPLO 5.** Sendo  $f(x,y)$  contínua, as compostas  $\text{sen } f(x,y)$ ,  $\text{cos } f(x,y)$ ,  $[f(x,y)]^2$  etc. também serão.

**Teorema 2.** Sejam  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva tais que  $\gamma(t) \in A$  para todo  $t \in I$ . Se  $\gamma$  for contínua em  $t_0 \in I$  e  $f$  contínua em  $\gamma(t_0)$ , então a composta  $g(t) = f(\gamma(t))$  será contínua em  $t_0$ .

**Demonstração**

Fica a cargo do leitor.

Sejam  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  contínuas em  $(x_0, y_0)$  e seja  $k$  uma constante. Segue das propriedades dos limites que  $f + g$ ,  $kf$  e  $f \cdot g$  são, também, contínuas em  $(x_0, y_0)$ . Além disso, se  $g(x_0, y_0) \neq 0$ , então  $\frac{f}{g}$  será, também, contínua em  $(x_0, y_0)$ .

**EXEMPLO 4.** Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Determine o conjunto dos pontos de continuidade de  $f$ .

**Solução**

Nos pontos  $(x, y) \neq (0, 0)$  podemos aplicar a propriedade relativa a quociente de funções contínuas, pois,  $x^3$  e  $x^2 + y^2$  são contínuas e  $x^2 + y^2$  não se anula nestes pontos. Para estudar  $f$  com relação à continuidade no ponto  $(0, 0)$  precisamos primeiro ver o que acontece com o limite de  $f$  neste ponto.

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

$\left( \text{Observe que } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x = 0 \text{ e } \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1 \text{ para todo } (x, y) \neq (0, 0). \right)$  Assim
 
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0).$$

Conclusão:  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .

Sejam agora,  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g, h: B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  três funções tais que  $(g(x, y), h(x, y)) \in A$ , para todo  $(x, y) \in B$ . Sem nenhuma dificuldade, demonstra-se que se  $g$  e  $h$  forem contínuas em  $(x_0, y_0)$  e  $f$  contínua em  $(g(x_0, y_0), h(x_0, y_0))$ , então a composta  $f(g(x, y), h(x, y))$  será, também, contínua em  $(x_0, y_0)$ . Este resultado, bem como os teoremas 1 e 2, são casos particulares de um teorema mais geral sobre continuidade de funções compostas, que não enunciaremos aqui.

**Exercícios 9.2**

1. Determine o conjunto dos pontos de continuidade. Justifique a resposta.

a)  $f(x, y) = 3x^2y^2 - 5xy + 6$

b)  $f(x, y) = \sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2}$

c)  $f(x, y) = \ln \frac{x-y}{x^2+y^2}$

d)  $f(x, y) = \frac{x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

e)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-3y}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

f)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

g)  $f(x, y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{r^2}-1\right)} & \text{se } r < 1 \text{ onde } r = \|(x, y)\| \\ 0 & \text{se } r \geq 1 \end{cases}$

2.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  é contínua em  $(0, 0)$ ? Justifique.

3. Prove que se  $f$  for contínua em  $(x_0, y_0)$  e se  $f(x_0, y_0) > 0$ , então existirá  $r > 0$  tal que  $f(x, y) > 0$  para  $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r$ .

4. Seja  $A$  um subconjunto do  $\mathbb{R}^2$  que goza da propriedade: quaisquer que sejam  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  em  $A$ , existe uma curva contínua  $\gamma: [a, b] \rightarrow A$  tal que  $\gamma(a) = (x_0, y_0)$  e  $\gamma(b) = (x_1, y_1)$ . Prove que se  $f$  for contínua em  $A$  e se  $f(x_0, y_0) < m < f(x_1, y_1)$ , então existirá  $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$  tal que  $f(\bar{x}, \bar{y}) = m$ .

(Sugestão. Aplique o teorema do valor intermediário à função contínua  $g(t) = f(\gamma(t))$ ,  $t \in [a, b]$ .)

5. Seja  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto, uma função contínua e seja  $c$  um número real dado. Prove que o conjunto  $\{(x, y) \in A \mid f(x, y) < c\}$  é aberto.

6. Dizemos que a seqüência de pontos  $((x_n, y_n))_{n > 0}$  converge a  $(\bar{x}, \bar{y})$  se, dado  $\epsilon > 0$ , existe um natural  $n_0$  tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \|(x_n, y_n) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \epsilon.$$

Suponha que  $f(x, y)$  seja contínua em  $(\bar{x}, \bar{y})$ , que  $((x_n, y_n))_{n > 0}$  convirja para  $(\bar{x}, \bar{y})$  e que  $(x_n, y_n) \in D_f$  para todo  $n \geq 0$ . Prove que a seqüência dada por  $a_n = f(x_n, y_n)$  converge para  $f(\bar{x}, \bar{y})$ .

7. Suponha  $f$  contínua no retângulo  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \leq x \leq \beta, \bar{\alpha} \leq y \leq \bar{\beta}\}$ . Prove que  $f$  é limitada neste retângulo. ( $f$  limitada em  $A$  significa que existe  $M > 0$  tal que  $|f(x, y)| \leq M$  em  $A$ .)

(Sugestão. Suponha, por absurdo, que  $f$  não seja limitada em  $A$ . Então, existirá  $(x_1, y_1)$  em  $A$  tal que  $|f(x_1, y_1)| > 1$ . Tomando-se o ponto médio de cada lado, divida o retângulo  $A$  em 4 retângulos iguais; em um deles, batizado  $A_2$ ,  $f$  não será limitada, logo existirá  $(x_2, y_2) \in A_2$  tal que  $|f(x_2, y_2)| > 2$  etc.)

8. (Teorema de Weierstrass). Seja  $f$  como no Exercício 7. Prove que  $f$  assume em  $A$  valor máximo e valor mínimo.

(Sugestão. Veja Apêndice A2.4 — Volume I.)

## 10

## DERIVADAS PARCIAIS

## 10.1. DERIVADAS PARCIAIS

Seja  $z = f(x, y)$  uma função real de duas variáveis reais e seja  $(x_0, y_0) \in D_f$ . Fixado  $y_0$ , podemos considerar a função  $g$  de uma variável dada por

$$g(x) = f(x, y_0).$$

A derivada desta função no ponto  $x = x_0$  (caso exista) denomina-se *derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$ , no ponto  $(x_0, y_0)$*  e indica-se com uma das notações:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0}$$

Assim,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$ . De acordo com a definição de derivada temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

ou, ainda,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Seja  $A$  o subconjunto de  $D_f$  formado por todos os pontos  $(x, y)$  tais que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  existe; fica assim definida uma nova função, indicada por  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e definida em  $A$ , que a cada  $(x, y) \in A$  associa o número  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ , onde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Tal função denomina-se *função derivada parcial de 1.ª ordem de  $f$ , em relação a  $x$* , ou, simplesmente, *derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$* . De modo análogo, define-se *derivada parcial de  $f$ , em relação a  $y$ , no ponto  $(x_0, y_0)$*  que

se indica por  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  ou  $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Para se calcular  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  fixa-se  $y = y_0$  em  $z = f(x, y)$  e calcula-se a derivada de  $g(x) = f(x, y_0)$  em  $x = x_0$ :  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$ . Da mesma forma,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  é a derivada, em relação a  $x$ , de  $f(x, y)$ , mantendo-se  $y$  constante. Por outro lado,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  é a derivada, em relação a  $y$ , de  $f(x, y)$ , mantendo-se  $x$  constante.

**EXEMPLO 1.** Seja  $f(x, y) = 2xy - 4y$ . Calcule:

a)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$

b)  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

c)  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$

d)  $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1)$

**Solução**

a) Devemos olhar  $y$  como constante e derivar em relação a  $x$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - 4y) = 2y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x}(-4y) = 0.$$

Por limite:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x)y - 4y - 2xy + 4y}{\Delta x} \\ &= 2y.\end{aligned}$$

b) Devemos olhar  $x$  como constante e derivar em relação a  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (2xy - 4y) = 2x - 4.$$

c) Conforme a, para todo  $(x, y)$  em  $\mathbb{R}^2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y$ . Daí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2.$$

Assim,  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2$ .

d) Conforme b, para todo  $(x, y)$  em  $\mathbb{R}^2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x - 4$ . Logo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1) = -6.$$

**EXEMPLO 2.** Considere a função  $z = f(x, y)$  dada por  $z = \arctg(x^2 + y^2)$ . Calcule:

a)  $\frac{\partial z}{\partial x}$

b)  $\frac{\partial z}{\partial y}$

c)  $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=1, y=1}$

d)  $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{x=0, y=0}$

Solução

$$a) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\arctg(x^2 + y^2)) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)}{1 + (x^2 + y^2)^2},$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1 + (x^2 + y^2)^2}.$$

$$b) \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\arctg(x^2 + y^2)) = \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2),$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{1 + (x^2 + y^2)^2}.$$

$$c) \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=1, y=1} = \frac{2}{1 + 4} = \frac{2}{5}.$$

$$d) \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{x=0, y=0} = 0.$$

Antes de passarmos ao próximo exemplo, observamos que uma função  $z = f(x, y)$  se diz *definida ou dada implicitamente* pela equação  $g(x, y, z) = 0$  se, para todo  $(x, y) \in D_f$ ,  $g(x, y, f(x, y)) = 0$ . Por exemplo, a função  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ,  $x^2 + y^2 < 1$ , é dada implicitamente pela equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , pois, para todo  $(x, y)$  no seu domínio,  $x^2 + y^2 + (\sqrt{1 - x^2 - y^2})^2 = 1$ . As funções  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ , e  $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ , são também dadas implicitamente pela equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (verifique).

**EXEMPLO 3.** Sendo  $z = f(x, y)$  dada implicitamente por  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z > 0$ , calcule:

a)  $\frac{\partial z}{\partial x}$

b)  $\frac{\partial z}{\partial y}$

Solução

a)  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ,  $x^2 + y^2 < 1$ . Assim,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} (1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x)$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad x^2 + y^2 < 1.$$

Poderíamos, também, ter chegado ao resultado acima trabalhando diretamente com a equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ :

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial}{\partial x}(1);$$

como  $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x$ ,  $\frac{\partial}{\partial x}[z^2] = \frac{d}{dz}[z^2] \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 2z \frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial}{\partial x}(1) = 0$ , resulta:

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad x^2 + y^2 < 1.$$

b)  $\frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial}{\partial y} (1)$ , ou seja,

$$2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

e, portanto,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z} = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad x^2 + y^2 < 1.$

**CUIDADOS COM NOTAÇÕES.** A notação  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ , como vimos, indica a derivada de  $f(x, y)$  em relação a  $x$ , onde  $y$  é olhado como *constante*, ou seja, como *independente* de  $x$ . Por outro lado, a notação  $\frac{d}{dx}[f(x, y)]$  indica a derivada de  $f(x, y)$ , onde  $y$  deve ser olhado (quando nada for dito em contrário) como *função de  $x$* . As notações foram criadas para serem usadas corretamente. Portanto, não confunda  $\frac{\partial}{\partial x}$  com  $\frac{d}{dx}$ .

**EXEMPLO 4.**  $\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) = 2x$ , enquanto

$$\frac{d}{dx} (x^2 + y^2) = 2x + \frac{d}{dx} (y^2) = 2x + 2y \frac{dy}{dx}$$

pois,

$$\frac{d}{dx} (y^2) = \frac{d}{dy} (y^2) \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}.$$

**EXEMPLO 5.** Suponha que  $z = f(x, y)$  seja dada implicitamente pela equação

$$e^{xyz} = x^2 + y^2 + z^2.$$

Suponha que  $f$  admita derivada parcial em relação a  $x$ , expresse  $\frac{\partial z}{\partial x}$  em termos de  $x, y$  e  $z$ .

*Solução*

Para todo  $(x, y) \in D_f$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x} (e^{xyz}) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2).$$

Temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} (e^{xyz}) = e^{xyz} \frac{\partial}{\partial x} (xyz) = e^{xyz} \left( yz + xy \frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2) = 2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Assim,

$$e^{xyz} \left( yz + xy \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x},$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - yz e^{xyz}}{xy e^{xyz} - 2z}$$

em todo  $(x, y) \in D_f$  com  $xy e^{xyz} - 2z \neq 0$ .

**EXEMPLO 6.** Seja  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de uma variável e derivável. Considere a função  $g$  dada por  $g(x, y) = \phi(x^2 + y^2)$ . Verifique que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1).$$

*Solução*

$$g(x, y) = \phi(u) \text{ onde } u = x^2 + y^2.$$

Então,  $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \phi'(u) \frac{\partial u}{\partial x}$ , ou seja,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \phi'(x^2 + y^2) 2x.$$

Da mesma forma,  $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \phi'(x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)$ , ou seja,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \phi'(x^2 + y^2) 2y.$$

Assim,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 2 \phi'(2) = \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1).$$

**Observação.** Se no exemplo anterior a função  $\phi$  fosse, por exemplo, a função seno, teríamos  $g(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$  e, assim,  $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \cos(x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) = 2x \cos(x^2 + y^2)$  e  $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \cos(x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) = 2y \cos(x^2 + y^2)$ .

**EXEMPLO 7.** Seja  $f(x, y) = \begin{cases} x^3 - y^2 & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Determine

a)  $\frac{\partial f}{\partial x}$

b)  $\frac{\partial f}{\partial y}$

*Solução*

a) Nos pontos  $(x, y) \neq (0, 0)$  podemos aplicar a regra do quociente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - (x^3 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Em  $(0, 0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  é a derivada, em  $x = 0$ , de  $g(x) = f(x, 0)$ .

$$f(x, 0) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

assim,  $g(x) = f(x, 0) = x$ , para todo  $x$ ; segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = g'(0) = 1.$$

Poderíamos, também, ter calculado  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  por limite:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Assim,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  é a função de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}$  dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

b) Para  $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2x^2y(1+x)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Em  $(0, 0)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  é (caso exista) a derivada, em  $y = 0$ , de  $h(y) = f(0, y)$ ;

$$f(0, y) = \begin{cases} -1 & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

assim,  $h(y)$  não é contínua em  $y = 0$ , logo,  $h'(0)$  não existe, ou seja,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  não existe.

Segue que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  está definida em todo  $(x, y) \neq (0, 0)$  (mas não em  $(0, 0)$ ) e é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2x^2y(1+x)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

**EXEMPLO 8.** Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Prove que  $f$  não depende de  $x$ , isto é, que existe  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = \phi(y)$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

*Solução*

Fixado um  $y$  qualquer, a função  $h(x) = f(x, y)$  é constante em  $\mathbb{R}$ , pois, para todo  $x$ ,

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ . Segue que, para todo  $x$ ,

$$h(x) = h(0)$$

ou seja,

$$f(x, y) = f(0, y).$$

Como  $y$  foi fixado de modo arbitrário, resulta que  $f(x, y) = f(0, y)$  se verifica para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Tomando-se  $\phi(y) = f(0, y)$  teremos

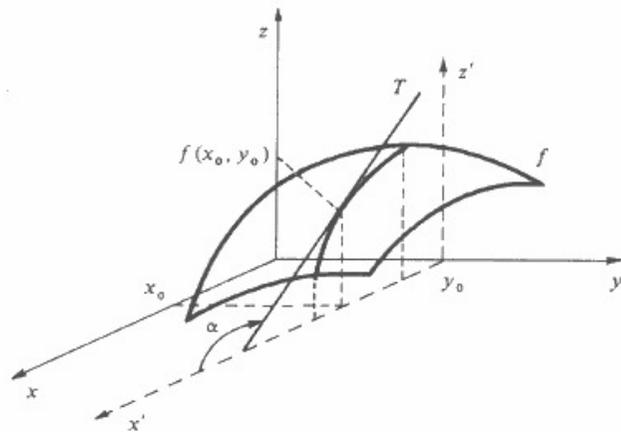
$$f(x, y) = \phi(y)$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**EXEMPLO 9 (Interpretação geométrica).** Suponhamos que  $z = f(x, y)$  admite derivadas parciais em  $(x_0, y_0) \in D_f$ . O gráfico da função  $g(x) = f(x, y_0)$ , no plano  $x'y_0z'$  (veja figura), é a intersecção do plano  $y = y_0$  com o gráfico de  $f$ ;  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  é, então, o coeficiente angular da reta tangente  $T$  a esta intersecção no ponto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha. \text{ Interprete você } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

O exemplo seguinte mostra-nos que a existência de derivada parcial num ponto não implica a continuidade da função neste ponto.



**EXEMPLO 10.** Mostre que a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

admite derivadas parciais em  $(0, 0)$ , mas não é contínua neste ponto.

*Solução*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0. \end{aligned}$$

Assim,  $f$  admite derivadas parciais em  $(0, 0)$ . Vamos mostrar, a seguir, que  $f$  não é contínua em  $(0, 0)$ . A composta de  $f$  com a reta  $\gamma$  dada por  $\gamma(t) = (t, t)$  é

$$g(t) = f(t, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

Como  $\gamma$  é contínua em  $t = 0$  e a composta  $g(t) = f(t, t)$  não é contínua em  $t = 0$ , resulta que  $f$  não é contínua em  $(0, 0)$ . (Por quê?)

O exemplo anterior mostra-nos ainda que a mera existência das derivadas parciais de  $f$  num ponto  $(x_0, y_0)$  não implica a derivabilidade em  $t_0$  da composta  $g(t) = f(\gamma(t))$ , onde  $\gamma$  é uma curva suposta diferenciável em  $t_0$  e  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ . No exemplo anterior,  $f$  admite derivadas parciais em  $(0, 0)$ ,  $\gamma(t) = (t, t)$  é diferenciável em  $t = 0$ , mas a composta  $g(t) = f(\gamma(t))$  não é diferenciável em  $t = 0$ .

Do que vimos acima, resulta que a existência de derivadas parciais num ponto  $(x_0, y_0)$  não é uma boa generalização do conceito de diferenciabilidade dado para funções de uma

variável real. Uma boa generalização deverá implicar a continuidade da função e a diferenciabilidade da composta  $g(t) = f(\gamma(t))$  quando  $f$  e  $\gamma$  o forem, porque é isso que acontece no caso de funções de uma variável. Veremos no próximo capítulo qual é a boa generalização do conceito de diferenciabilidade para funções de várias variáveis reais.

### Exercícios 10.1

1. Determine as derivadas parciais

a)  $f(x, y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4$

b)  $z = \cos xy$

c)  $z = \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}$

d)  $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$

e)  $z = x^2 \ln(1 + x^2 + y^2)$

f)  $z = xy e^{xy}$

g)  $f(x, y) = (4xy - 3y^3)^3 + 5x^2y$

h)  $z = \arctg \frac{x}{y}$

i)  $g(x, y) = x^y$

j)  $z = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

l)  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^2 + 3}$

m)  $z = \frac{x \operatorname{sen} y}{\cos(x^2 + y^2)}$

2. Considere a função  $z = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$ . Verifique que  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$ .

3. Seja  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de uma variável real, diferenciável e tal que  $\phi'(1) = 4$ . Seja

$g(x, y) = \phi\left(\frac{x}{y}\right)$ . Calcule

a)  $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$

b)  $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1)$

4. Seja  $g(x, y) = \phi\left(\frac{x}{y}\right)$  a função do exercício anterior. Verifique que

$$x \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , com  $y \neq 0$ .

5. Considere a função dada por  $z = x \operatorname{sen} \frac{x}{y}$ . Verifique que

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

6. A função  $p = p(V, T)$  é dada implicitamente pela equação  $pV = nRT$ , onde  $n$  e  $R$  são constantes não-nulas. Calcule  $\frac{\partial p}{\partial V}$  e  $\frac{\partial p}{\partial T}$ .

7. Seja  $z = e^y \phi(x - y)$ , onde  $\phi$  é uma função diferenciável de uma variável real. Mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

8. Seja  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável de uma variável real e seja  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \phi\left(\frac{x}{y}\right)$ . Mostre que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f.$$

9. Sejam  $z = e^{x^2 + y^2}$ ,  $x = \rho \cos \theta$  e  $y = \rho \sin \theta$ . Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = e^{x^2 + y^2} (2x \cos \theta + 2y \sin \theta).$$

Conclua que

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta.$$

10. Suponha que a função  $z = z(x, y)$  admita derivadas parciais em todos os pontos de seu domínio que seja dada implicitamente pela equação  $xyz + z^3 = x$ . Expresse  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$  em termos de  $x, y, z$ .
11. Seja  $z = f(x + at)$  onde  $f$  é uma função diferenciável de uma variável real e  $a$  uma constante. Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a \frac{\partial z}{\partial x}.$$

12. Seja  $z = f(x^2 - y^2)$ , onde  $f(u)$  é uma função diferenciável de uma variável real. Verifique que

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

13. Considere a função dada por  $w = xy + z^4$ , onde  $z = z(x, y)$ . Admita que  $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=1, y=1} = 1$  e que

$$z = 1 \text{ para } x = 1 \text{ e } y = 1. \text{ Calcule } \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=1, y=1}.$$

14. Seja  $f(x, y) = e^{-\frac{x}{2}} \phi(2y - x)$ , onde  $\phi$  é uma função diferenciável de uma variável real. Mostre que

$$2 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = -f.$$

15. Seja  $f(x, y) = \int_0^{x^2 + y^2} e^{-t^2} dt$ . Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ .

16. Seja  $f(x, y) = \int_{x^2}^{y^2} e^{-t^2} dt$ . Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ .

17. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e seja  $g(x, y) = f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$ . Verifique que

$$x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} = yf'(y).$$

18. Seja  $f(x, y) = x^3 y^2 - 6xy + \phi(y)$ . Determine uma função  $\phi$  de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 y - 6x + \frac{y}{y^2 + 1}.$$

19. Determine uma função  $f(x, y)$  tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^2 - 6y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 y - 6x + \frac{y}{y^2 + 1} \end{cases}$$

20. Determine  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sendo  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x + y^4}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

21. Seja  $f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} - 1\right) & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$

a) Esboce o gráfico de  $f$ .

b) Determine  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

22. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:  $f(x, 0) = 1 + x^2$ ,  $f(0, y) = 1 + y^2$  e  $f(x, y) = 0$  se  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ .

a) Esboce o gráfico de  $f$ .

b) Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .

c)  $f$  é contínua em  $(0, 0)$ ? Justifique.

d)  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$  existe?  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$ ?

e) Qual o domínio de  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ?

23. Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2$  e seja  $\gamma(t) = (t, t, z(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , uma curva cuja imagem está contida no gráfico de  $f$ .

a) Determine  $z(t)$ .

b) Esboce os gráficos de  $f$  e  $\gamma$ .

c) Determine a reta tangente a  $\gamma$  no ponto  $(1, 1, 2)$ .

d) Seja  $T$  a reta do item c; mostre que  $T$  está contida no plano de equação

$$z - f(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1).$$

24. Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2$  e seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  uma curva diferenciável cuja imagem está contida no gráfico de  $f$ . Suponha, ainda,  $\gamma(0) = (1, 1, 2)$ . Seja  $T$  a reta tangente a  $\gamma$  em  $\gamma(0)$ . Mostre que  $T$  está contida no plano

$$z - f(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1).$$

Interprete geometricamente.

25. Suponha que  $z = f(x, y)$  admita derivadas parciais em  $(x_0, y_0)$ . Considere as curvas cujas imagens estão contidas no gráfico de  $f$ :

$$\gamma_1: \begin{cases} x = x_0 \\ y = t \\ z = f(x_0, t) \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma_2: \begin{cases} x = t \\ y = y_0 \\ z = f(t, y_0) \end{cases}$$

Sejam  $T_1$  e  $T_2$  as retas tangentes a  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , nos pontos  $\gamma_1(y_0)$  e  $\gamma_2(x_0)$ , respectivamente. Mostre que a equação do plano determinado pelas retas  $T_1$  e  $T_2$  é

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

26. Seja  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  e seja  $\gamma(t) = (t, t, z(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , uma curva cuja imagem está no gráfico de  $f$ . Seja  $T$  a reta tangente a  $\gamma$  no ponto  $\gamma(0)$ . Mostre que  $T$  não está contida no plano da equação

$$z - f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0).$$

27. Considere a função  $z = f(x, y)$  e seja  $(x_0, y_0) \in D_f$ . Como você definiria plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$ ? Admitindo que  $f$  admita derivadas parciais em  $(x_0, y_0)$ , escreva a equação de um plano que você acha que seja um "forte" candidato a plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

28. Dê exemplo de uma função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  seja contínua em  $\mathbb{R}^2$ , mas que  $f$  não seja contínua em nenhum ponto de  $\mathbb{R}^2$ .

29. Dizemos que  $(x_0, y_0)$  é um ponto crítico ou estacionário de  $z = f(x, y)$  se  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$  e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \text{ Determine (caso existam) os pontos críticos da função dada.}$$

a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$

b)  $f(x, y) = 2x + y^3$

c)  $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + x - y$

d)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$

e)  $f(x, y) = 3x^2 + 8xy^2 - 14x - 16y$

f)  $f(x, y) = x^4 + 4xy + y^4$

30. Seja  $(x_0, y_0)$  um ponto de  $D_f$ . Dizemos que  $(x_0, y_0)$  é um ponto de máximo local de  $f$  (respectivamente, ponto de mínimo local) se existe uma bola aberta  $B$  de centro  $(x_0, y_0)$  tal que, para todo  $(x, y) \in B \cap D_f$ ,  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  (respectivamente,  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ ). Prove que se

$(x_0, y_0)$  é um ponto interior de  $D_f$  e se  $f$  admite derivadas parciais em  $(x_0, y_0)$ , então uma condição necessária para que  $(x_0, y_0)$  seja um ponto de máximo local ou de mínimo local é que  $(x_0, y_0)$  seja ponto crítico de  $f$ , isto é, que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

31. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e suponha que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Prove que  $f$  é constante.

32. Dê exemplo de uma função  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ , para todo  $(x, y) \in A$ , mas que  $f$  não seja constante em  $A$ .

33. Suponha que, quaisquer que sejam  $(x, y)$  e  $(s, t)$  em  $\mathbb{R}^2$ ,  $|f(x, y) - f(s, t)| \leq \|(x, y) - (s, t)\|^2$ . Prove que  $f$  é constante.

34. Seja  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto, e suponha que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  existe para todo  $(x, y) \in A$ . Sejam  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0 + h, y_0)$  dois pontos de  $A$ . Prove que se o segmento de extremidades  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0 + h, y_0)$  estiver contido em  $A$ , então existirá  $\bar{x}$  entre  $x_0$  e  $x_0 + h$  tal que

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0)h.$$

35. Seja  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto, e suponha que  $f$  admite derivadas parciais em  $A$ . Seja  $(x_0, y_0) \in A$ . Prove que se  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  forem contínuas em  $(x_0, y_0)$ , então  $f$  também será.

(Sugestão.  $f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{(I)} + \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{(II)}$ ; aplique o TVM a (I) e (II).)

## 10.2. DERIVADAS PARCIAIS DE FUNÇÕES DE TRÊS OU MAIS VARIÁVEIS REAIS

Sejam  $w = f(x, y, z)$  e  $(x_0, y_0, z_0) \in D_f$ . Mantendo-se  $y_0$  e  $z_0$  constantes, podemos considerar para função  $g(x) = f(x, y_0, z_0)$ . A derivada desta função, em  $x = x_0$  (caso exista), denomina-se derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$  no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  e indica-se por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \quad \text{ou} \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}}$$

De modo análogo, define-se as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$ . Tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}$$

Da mesma forma, definem-se as derivadas parciais de uma função de mais de três variáveis reais.

**EXEMPLO.** Calcule as derivadas parciais da função  $s = f(x, y, z, w)$  dada por

$$s = e^{xyzw}$$

*Solução*

$$\frac{\partial s}{\partial x} = e^{xyzw} \frac{\partial}{\partial x} (xyzw) = yzwe^{xyzw} \quad (y, z \text{ e } w \text{ são olhadas como constantes})$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = e^{xyzw} \frac{\partial}{\partial y} (xyzw) = xzwe^{xyzw}$$

$$\frac{\partial s}{\partial z} = e^{xyzw} \frac{\partial}{\partial z} (xyzw) = xywe^{xyzw}$$

$$\frac{\partial s}{\partial w} = e^{xyzw} \frac{\partial}{\partial w} (xyzw) = xyz e^{xyzw}$$

#### Exercícios 10.2

1. Calcule as derivadas parciais.

$$a) f(x, y, z) = x e^{x-y-z}$$

$$b) w = x^2 \arcsen \frac{y}{2}$$

$$c) w = \frac{xyz}{x+y+z}$$

$$d) f(x, y, z) = \arcsen(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$e) s = f(x, y, z, w) \text{ dada por } s = xw \ln(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$$

2. Seja  $f(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ . Verifique que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = -f.$$

3. Seja  $s = f(x, y, z, w)$  dada por  $s = e^{y - \frac{x-z}{w}}$ . Verifique que

$$x \frac{\partial s}{\partial x} + y \frac{\partial s}{\partial y} + z \frac{\partial s}{\partial z} + w \frac{\partial s}{\partial w} = 0.$$

4. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua com  $f(3) = 4$ . Seja

$$g(x, y, z) = \int_0^{x^2 + y^2 + z^2} f(t) dt.$$

Calcule:

$$a) \frac{\partial g}{\partial x}(1, 1, 1)$$

$$b) \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1, 1)$$

$$c) \frac{\partial g}{\partial z}(1, 1, 1)$$

Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável e seja  $g$  dada por  $g(x, y, z) = f(r)$  onde  $r = \|(x, y, z)\|$ . Verifique que

$$x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} + z \frac{\partial g}{\partial z} = r f'(r)$$

6. Seja  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável tal que  $\phi'(3) = 4$ . Seja  $g(x, y, z) = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$ . Calcule:

$$a) \frac{\partial g}{\partial x}(1, 1, 1)$$

$$b) \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1, 1)$$

$$c) \frac{\partial g}{\partial z}(1, 1, 1)$$

# 11

## FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS

### 11.1. FUNÇÃO DIFERENCIÁVEL: DEFINIÇÃO

O objetivo desta seção é estender para funções de duas variáveis reais o conceito de diferenciabilidade dado para funções de uma variável real.

Vimos que, por definição, uma função  $f(x)$  é diferenciável ou derivável em  $x_0$  se e somente se o limite, quando  $h$  tende a zero, da razão incremental  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  existir e for finito. Esta forma não é adequada para generalização, pois se  $f$  for uma função de duas variáveis reais  $h$  será um par ordenado e, então, a razão incremental não terá sentido. Nossa tarefa a seguir é a de tentar obter uma forma equivalente à definição de diferenciabilidade e que seja passível de generalização.

Supondo  $f(x)$  diferenciável em  $x_0$ , existe um real  $a$ ,  $a = f'(x_0)$ , tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a.$$

Temos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{h} = 0.$$

Como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(h)}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(h)}{|h|} = 0 \text{ (verifique)}$$

resulta

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{|h|} = 0.$$

Portanto,  $f$  é diferenciável em  $x_0$  se e somente se existir um real  $a$  tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{|h|} = 0.$$

Estamos, agora, em condições de definir diferenciabilidades para funções de duas variáveis reais.

**Definição.** Sejam  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto de  $\mathbb{R}^2$ , e  $(x_0, y_0) \in A$ . Dizemos que  $f$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$  se e somente se existirem reais  $a$  e  $b$  tais que

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h, k)\|} = 0$$

O próximo teorema nos diz que diferenciabilidade implica continuidade.

**Teorema 1.** Se  $f$  for diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , então  $f$  será contínua em  $(x_0, y_0)$ .

*Demonstração:*

Sendo  $f(x, y)$  diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , existem reais  $a$  e  $b$  tais que

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

onde  $E(h, k)$  é a função dada por

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ah + bk + E(h, k).$$

Como

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} (ah + bk) = 0$$

e

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} E(h, k) = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \|(h, k)\| \cdot \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

resulta

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0).$$

Logo,  $f$  é contínua em  $(x_0, y_0)$ . ■

Vamos mostrar, agora, que se  $f$  for diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , então  $f$  admitirá derivadas parciais em  $(x_0, y_0)$  e

$$L(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$$

será a *única* transformação linear que goza da propriedade

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\|(h, k)\|} = 0$$

**Teorema 2.** Seja  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto, e seja  $(x_0, y_0) \in A$ . Se  $f$  for diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , então  $f$  admitirá derivadas parciais neste ponto.

*Demonstração*

Sendo  $f(x, y)$  diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , existem reais  $a$  e  $b$  tais que

$$\textcircled{1} \quad \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

onde  $E(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk$ . Segue de  $\textcircled{1}$  que

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{E(h, 0)}{\|(h, 0)\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{|h|} = 0.$$

Daí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{h} = 0$$

e, portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

De modo análogo, obtém-se  $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ . ■

**Observação.** Provamos acima que se

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h, k)\|} = 0$$

então teremos necessariamente  $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  e  $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ . Deste modo, se  $f(x, y)$

for diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , então  $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  e  $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  serão os *únicos* reais para os quais o limite acima é zero. Segue do teorema 2 o seguinte importante

**Corolário.** Seja  $f(x, y)$  definida no aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$  e seja  $(x_0, y_0) \in A$ . Tem-se:

$$f \text{ diferenciável em } (x_0, y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} a) f \text{ admite derivadas parciais em } (x_0, y_0); \\ b) \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0. \end{cases}$$

$$\left( E(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \right)$$

**Observações:**

1. Segue do corolário acima que para provar que uma função  $f$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$  é suficiente provar que  $f$  admite derivadas parciais em  $(x_0, y_0)$  e que

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\|(h, k)\|} = 0$$

2. Se uma das derivadas parciais não existir em  $(x_0, y_0)$ , então  $f$  não será diferenciável neste ponto.

3. Se ambas as derivadas parciais existirem em  $(x_0, y_0)$ , mas se o limite acima não for zero, então  $f$  não será diferenciável em  $(x_0, y_0)$ .

4. Se  $f$  não for contínua em  $(x_0, y_0)$ , então  $f$  não será diferenciável em  $(x_0, y_0)$ .

Dizemos que  $f$  é diferenciável em  $B \subset D_f$  se  $f$  for diferenciável em todo  $(x, y) \in B$ . Diremos, simplesmente, que  $f$  é uma função diferenciável se  $f$  for diferenciável em todo ponto de seu domínio.

**EXEMPLO 1.** Prove que  $f(x, y) = x^2y$  é uma função diferenciável.

*Solução*

Precisamos provar que  $f$  é diferenciável em todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ( $D_f = \mathbb{R}^2$ ).  $f$  admite derivadas parciais em todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2.$$



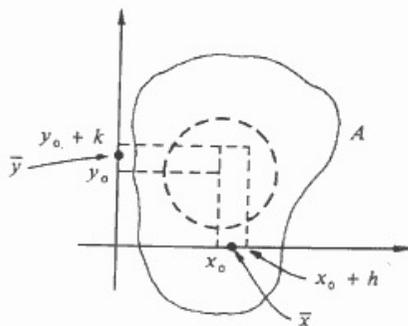
### 11.2. UMA CONDIÇÃO SUFICIENTE PARA DIFERENCIABILIDADE

Nosso objetivo, nesta seção, é demonstrar que a *continuidade em A*, *A* aberto, das derivadas parciais de uma função *f* garante a diferenciabilidade desta função em todos os pontos de *A*. Este resultado é bastante importante, pois, em muitas ocasiões, é mais fácil verificar a continuidade das derivadas parciais do que a diferenciabilidade diretamente pela definição.

**Teorema.** Sejam  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , *A* aberto, e  $(x_0, y_0) \in A$ . Se as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existirem em *A* e forem contínuas no ponto  $(x_0, y_0)$ , então *f* será diferenciável neste ponto.

*Demonstração*

Como *A* é aberto, existe uma bola aberta *B* de centro  $(x_0, y_0)$ , contida em *A*. Sejam *h* e *k* tais que  $(x_0 + h, y_0 + k) \in B$ . Temos



$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}_{(I)} + \underbrace{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}_{(II)}$$

Fazendo  $G(x) = f(x, y_0 + k)$ , pelo TVM existe  $\bar{x}$ , entre  $x_0$  e  $x_0 + h$  tal que

$$(I) = G(x_0 + h) - G(x_0) = G'(\bar{x})h = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + k)h$$

Do mesmo modo, existe  $\bar{y}$  entre  $y_0$  e  $y_0 + k$  tal que

$$(II) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y})k$$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y})k$$

Subtraindo a ambos os membros da igualdade acima  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$  obtemos:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right]h + \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right]k$$

Segue que

$$\left| \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\|(h, k)\|} \right| \leq \underbrace{\left| \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right|}_{(III)} + \underbrace{\left| \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right|}_{(IV)}$$

Pela continuidade de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  em  $(x_0, y_0)$ , as expressões (III) e (IV) tendem a zero, quando  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ , e, portanto,

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\|(h, k)\|} = 0;$$

logo, *f* é diferenciável em  $(x_0, y_0)$ . ■

Seja  $f(x, y)$  uma função. Dizemos que *f* é de classe  $C^1$  no aberto *A* se  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  forem contínuas em *A*.

Segue do teorema anterior o seguinte

**Corolário.** Seja  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , *A* aberto. Se *f* for de classe  $C^1$  em *A*, então *f* será diferenciável em *A*.

**EXEMPLO 1.**  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ , pois,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos(x^2 + y^2) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cos(x^2 + y^2)$$

são contínuas em  $\mathbb{R}^2$ .

**Observação.** O teorema anterior conta-nos que se  $f$  admite derivadas parciais em  $A$  e se estas são contínuas no ponto  $(x_0, y_0)$ , então  $f$  será diferenciável em  $(x_0, y_0)$ . A recíproca, entretanto, não é verdadeira: existem funções que são diferenciáveis num ponto sem que as derivadas parciais sejam contínuas neste ponto. O exemplo seguinte exhibe-nos uma tal função

**EXEMPLO 2.** Seja  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

a) Determine  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

b) Mostre que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  não são contínuas em  $(0, 0)$ .

c) Prove que  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ .

d) Prove que  $f$  é uma função diferenciável.

*Solução*

a)  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}}{x}$ , ou seja

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} = 0$$

limitada

De modo análogo,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 2y \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

b)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(t, t)$  não existe. (Verifique.) Logo,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  não é contínua em  $(0, 0)$ .

De modo análogo, verifica-se que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  não é contínua em  $(0, 0)$ .

c) 
$$\frac{f(0+h, 0+k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k}{\|(h, k)\|} = \frac{(h^2 + k^2) \operatorname{sen} \frac{1}{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \sqrt{h^2 + k^2} \operatorname{sen} \frac{1}{h^2 + k^2}$$

Como  $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \sqrt{h^2 + k^2} \operatorname{sen} \frac{1}{h^2 + k^2} = 0$ , resulta que  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ .

limitada

d)  $f$  é diferenciável em todo  $(x, y) \neq (0, 0)$ , pois,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são contínuas em todo  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

*Conclusão.*  $f$  é uma função diferenciável em todo  $(x, y) \in D_f (D_f = \mathbb{R}^2)$ .

**EXEMPLO 3.** Verifique que  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  é uma função diferenciável.

*Solução*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^5 + 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{-2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Vamos mostrar que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são contínuas em  $\mathbb{R}^2$ ;  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são contínuas em todo  $(x, y) \neq (0, 0)$ , pois são quocientes de contínuas.

Em (0, 0),

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^5 + 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[ \frac{0}{2x} \left( \frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2} \right) + 4x \left( \frac{x^2 \cdot y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

(Note:  $\frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2}$  and  $\frac{x^2 \cdot y^2}{(x^2 + y^2)^2}$  are circled and labeled "limitada")

ou seja,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0);$$

logo,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  é contínua em (0, 0). De modo análogo, prova-se que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  é contínua em (0, 0).

Da continuidade de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  em  $\mathbb{R}^2$ , segue que  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ .

**Observação.** Para todo  $(x, y) \neq (0, 0)$ , temos:

$$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow x^4 \leq (x^2 + y^2)^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq 1;$$

e

$$\begin{cases} 0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 \\ 0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 y^2 \leq (x^2 + y^2)^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \leq 1.$$

**Exercícios 11.2**

1. Verifique que a função dada é diferenciável.

- |                                  |                                   |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $f(x, y) = e^{x-y^2}$         | b) $f(x, y) = x^4 + y^3$          |
| c) $f(x, y) = x^2 y$             | d) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ |
| e) $f(x, y) = x \cos(x^2 + y^2)$ | f) $f(x, y) = \arctg xy$          |

2. Determine o conjunto dos pontos em que a função dada é diferenciável. Justifique.

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$d) f(x, y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right)} & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

### 11.3. PLANO TANGENTE E RETA NORMAL

Se  $f(x, y)$  diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , temos:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Fazendo  $x = x_0 + h$  e  $y = y_0 + k$ , resulta

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

Seja  $E(x, y)$  o erro que se comete na aproximação de  $f(x, y)$  por

$$T(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Assim,

$$f(x, y) = T(x, y) + E(x, y)$$

onde

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{E(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

Do que vimos na Seq. 11.1 (veja, também, o Exercício 15 desta seção), resulta que  $T(x, y)$  é a única função afim que aproxima  $f(x, y)$  com erro  $E(x, y)$  que tende a zero mais rapidamente que  $\|(x, y) - (x_0, y_0)\|$ , quando  $(x, y)$  tende a  $(x_0, y_0)$ . (Dizer que  $E(x, y)$  tende a zero mais rapidamente que  $\|(x, y) - (x_0, y_0)\|$ , quando  $(x, y)$  tende a  $(x_0, y_0)$ , significa que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0.$$

**Definição.** Seja  $f$  diferenciável no ponto  $(x_0, y_0)$ . O plano

$$\textcircled{1} \quad z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

denomina-se *plano tangente* ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

Observe que só definimos plano tangente em  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  se  $f$  for diferenciável em  $(x_0, y_0)$ . Se  $f$  não for diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , mas admitir derivadas parciais neste ponto, então o plano  $\textcircled{1}$  existirá, mas não será plano tangente. Veremos mais adiante que se  $f(x, y)$  for diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , o plano  $\textcircled{1}$  conterá todas as retas tangentes ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

Em notação de produto escalar, o plano  $\textcircled{1}$  se escreve:

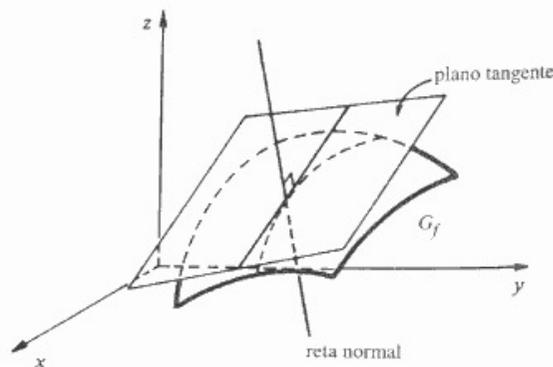
$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, f(x_0, y_0))] = 0.$$

Segue que o plano tangente em  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  é perpendicular à direção do vetor

$$\textcircled{2} \quad \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right).$$

A reta que passa pelo ponto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  e é paralela ao vetor  $\textcircled{2}$  denomina-se *reta normal* ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ . A equação de tal reta é:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right), \lambda \in \mathbb{R}.$$



**EXEMPLO 1.** Seja  $f(x, y) = 3x^2y - x$ . Determine as equações do plano tangente e da reta normal do ponto  $(1, 2, f(1, 2))$ .

*Solução*  
*Plano tangente*

$$z - f(1, 2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2)$$

$$\begin{cases} f(1, 2) = 5 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy - 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 11 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 3. \end{cases}$$

A equação do plano tangente é

$$z - 5 = 11(x - 1) + 3(y - 2)$$

*Reta normal*

$$(x, y, z) = (1, 2, f(1, 2)) + \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2), -1 \right), \lambda \in \mathbb{R}.$$

ou seja,

$$(x, y, z) = (1, 2, 5) + \lambda(11, 3, -1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

**EXEMPLO 2.** Seja  $f(x, y) = \begin{cases} xy^2 & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Mostre que o gráfico de  $f$  não admite plano tangente em  $(0, 0, f(0, 0))$ .

*Solução*

De acordo com a definição, para que  $f$  admita plano tangente no ponto  $(0, 0, f(0, 0))$ ,  $f$  deve ser diferenciável em  $(0, 0)$ . Se provarmos que  $f$  é não diferenciável em  $(0, 0)$ , seguirá que  $f$  não admite plano tangente no ponto dado. Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0. \text{ (Verifique.)}$$

$$\frac{f(0+h, 0+k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k}{\|(h, k)\|} = \frac{hk^2}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Seja  $G(h, k) = \frac{hk^2}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}$ . Temos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} G(0, t) = 0$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} G(t, t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Assim,

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(0+h, 0+k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k}{\|(h, k)\|}$$

não existe, logo,  $f$  não é diferenciável em  $(0, 0)$ ; portanto,  $f$  não admite plano tangente no ponto  $(0, 0, f(0, 0))$ . Observe que o plano

$$z - f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0)$$

ou seja,

$$z = 0$$

não contém a reta tangente à curva  $\gamma(t) = (t, t, f(t, t))$  no ponto  $\gamma(0) = (0, 0, f(0, 0))$ . De fato, a reta tangente a  $\gamma$  no ponto  $(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 0)$  é:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda \left(1, 1, \frac{1}{2}\right), \lambda \in \mathbb{R}$$

que, evidentemente, não está contida no plano  $z = 0$ .

### Exercícios 11.3

1. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função dada, no ponto dado.

a)  $f(x, y) = 2x^2y$  em  $(1, 1, f(1, 1))$ .

b)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  em  $(0, 1, f(0, 1))$ .

c)  $f(x, y) = 3x^2y - xy$  em  $(1, -1, f(1, -1))$ .

d)  $f(x, y) = xe^{x^2 - y^2}$  em  $(2, 2, f(2, 2))$ .

e)  $f(x, y) = \arctg(x - 2y)$  em  $\left(2, \frac{1}{2}, f\left(2, \frac{1}{2}\right)\right)$

f)  $f(x, y) = xy$  em  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$ .

2. Determine o plano que passa pelos pontos  $(1, 1, 2)$  e  $(-1, 1, 1)$  e que seja tangente ao gráfico de  $f(x, y) = xy$ .

3. Determine o plano que seja paralelo ao plano  $z = 2x + y$  e tangente ao gráfico de  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

4.  $z = 2x + y$  é a equação do plano tangente ao gráfico de  $f(x, y)$  no ponto  $(1, 1, 3)$ . Calcule

$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$ .

5.  $2x + y + 3z = 6$  é a equação do plano tangente ao gráfico de  $f(x, y)$  no ponto  $(1, 1, 1)$ .

a) Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$ .

b) Determine a equação da reta normal no ponto  $(1, 1, 1)$ .

6. Considere a função  $f(x, y) = x \phi\left(\frac{x}{y}\right)$  onde  $\phi(u)$  é uma função derivável de uma variável. Mostre que os planos tangentes ao gráfico de  $f$  passam pela origem.

7. Considere a função  $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ . Mostre que os planos tangentes ao gráfico de  $f$  passam pela origem.

8. Determine o plano que seja paralelo ao plano  $z = 2x + 3y$  e tangente ao gráfico de  $f(x, y) = x^2 + xy$ .

9. Determine os planos que sejam tangentes ao gráfico de  $f(x, y) = x^2 + y^2$  e que contenham a intersecção dos planos  $x + y + z = 3$  e  $z = 0$ .

10.  $\beta$  é um plano tangente aos gráficos de  $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$  e  $g(x, y) = -x^2 - y^2$ . Mostre que  $a^2 + b^2 = 1$ , sendo  $(a, b, f(a, b))$  o ponto em que  $\beta$  tangencia o gráfico de  $f$ .

11. Considere a função  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ . Seja  $\alpha$  o plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, b, 1 - a^2 - b^2)$ , com  $a > 0$ ,  $b > 0$  e  $a^2 + b^2 < 1$ . Seja  $V$  o volume do tetraedro determinado por  $\alpha$  e pelos planos coordenados.

a) Expresse  $V$  em função de  $a$  e  $b$ .

b) Determine  $a$  e  $b$  para que se tenha  $\frac{\partial V}{\partial a}(a, b) = 0$  e  $\frac{\partial V}{\partial b}(a, b) = 0$ .

12. Determine os planos tangentes ao gráfico de  $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$  e que contenham o eixo  $Ox$ .

13. Considere a função  $f(x, y) = xg(x^2 - y^2)$ , onde  $g(u)$  é uma função derivável de uma variável. Mostre que o plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, a, f(a, a))$  passa pela origem.

14. A função  $z = z(x, y)$  é diferenciável e dada implicitamente pela equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

Mostre que  $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$  é a equação do plano tangente no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $z_0 \neq 0$ .

15. Seja  $z = f(x, y)$  diferenciável em  $(x_0, y_0)$ . Seja  $S$  a função afim dada por  $S(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c$ . Suponha que

$$f(x, y) = S(x, y) + E(x, y)$$

com

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{E(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

Conclua que  $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ,  $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  e  $c = f(x_0, y_0)$ .

### 11.4. DIFERENCIAL

Seja  $f(x, y)$  diferenciável em  $(x_0, y_0)$  e consideremos a transformação linear (transformação é sinônimo de função)  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\textcircled{1} \quad L(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k.$$

Segue, do que vimos anteriormente, que  $L(h, k)$  é a única transformação linear de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}$  que aproxima o acréscimo

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

com erro  $E(h, k)$  que tende a zero mais rapidamente que  $\|(h, k)\|$ , quando  $(h, k)$  tende a  $(0, 0)$ . Isto é,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}_{L(h, k)} + E(h, k)$$

Com

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Pois bem, a transformação linear  $L$ , dada por  $\textcircled{1}$ , denomina-se *diferenciável* de  $f$  em  $(x_0, y_0)$ .

Seja  $T(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$ . Sabemos que o gráfico de  $T$  é o plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ . Fazendo  $x = x_0 + h$  e  $y = y_0 + k$ , vem:

$$T(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}_{L(h, k)}$$

Segue que  $L(h, k)$  é a variação que sofre  $T$ , quando se passa do ponto  $(x_0, y_0)$ , ao ponto  $(x_0 + h, y_0 + k)$ .

Por outro lado,  $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$  é a variação em  $f$ , quando se passa de  $(x_0, y_0)$  a  $(x_0 + h, y_0 + k)$ . Temos:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \cong \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$$

sendo a aproximação tanto melhor quanto menores forem os módulos de  $h$  e  $k$ .

Muitas vezes, referir-nos-emos a  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$  como a diferencial de  $f$  em  $(x_0, y_0)$ , relativa aos acréscimos  $h$  e  $k$ .

Consideremos, agora, a função diferenciável  $z = f(x, y)$ . Em notação clássica, a diferencial de  $f$  em  $(x, y)$ , relativa aos acréscimos  $dx$  e  $dy$  é indicada por  $dz$  (ou por  $df$ ):

$$\textcircled{2} \quad dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy.$$

No que se segue, referir-nos-emos a  $\textcircled{2}$  simplesmente como a diferencial de  $z = f(x, y)$ . O símbolo  $\Delta z$  será usado para representar a variação em  $f$ , quando se passa de  $(x, y)$  a  $(x + dx, y + dy)$ :

$$\Delta z = f(x + dx, y + dy) - f(x, y).$$

Assim,

$$\Delta z \cong dz$$

sendo a aproximação tanto melhor quanto menores forem os módulos de  $dx$  e  $dy$ .

**EXEMPLO.** Seja  $z = x^2y$ .

- Calcule a diferencial.
- Utilizando a diferencial, calcule um valor aproximado para a variação  $\Delta z$  em  $z$ , quando se passa de  $x = 1$  e  $y = 2$  para  $x = 1,02$  e  $y = 2,01$ .
- Calcule o erro cometido na aproximação acima.

*Solução*

a)  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$ ; assim,  $dz = 2xy dx + x^2 dy$ .

b)  $\Delta z \cong dz$  ou  $\Delta z \cong 2xy dx + x^2 dy$ .

Fazendo  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $dx = 0,02$  e  $dy = 0,01$  resulta  $\Delta z \cong 0,09$ .

c)  $\Delta z = (x + dx)^2(y + dy) - x^2y = (1,02)^2(2,01) - 2 = 0,091204$  (valor exato).

O erro cometido na avaliação acima é  $0,001204$ .

#### Exercícios 11.4

1. Calcule a diferencial.

a)  $z = x^3 + 2$

c)  $z = \text{sen } xy$

e)  $T = \ln(1 + p^2 + q^2)$

b)  $z = x \text{ arc tg}(x + 2y)$

d)  $u = e^{s^2 - r^2}$

f)  $x = \text{arc sen } uv$

2. Seja  $z = x a e^{x^2 - y^2}$ .
- Calcule um valor aproximado para a variação  $\Delta z$  em  $z$ , quando se passa de  $x = 1$  e  $y = 1$  para  $x = 1,01$  e  $y = 1,002$ .
  - Calcule um valor aproximado para  $z$ , correspondente a  $x = 1,01$  e  $y = 1,002$ .
3. Seja  $z = \sqrt{x} + \sqrt[3]{y}$ .
- Calcule a diferencial de  $z$  no ponto  $(1, 8)$ .
  - Calcule um valor aproximado para  $z$ , correspondente a  $x = 1,01$  e  $y = 7,9$ .
  - Calcule um valor aproximado para a variação  $\Delta z$  em  $z$ , quando se passa de  $x = 1$  e  $y = 8$  para  $x = 0,9$  e  $y = 8,01$ .
4. Calcule um valor aproximado para a variação  $\Delta A$  na área de um retângulo quando os lados variam de  $x = 2$  m e  $y = 3$  m para  $x = 2,01$  m e  $y = 2,97$  m.
5. Uma caixa de forma cilíndrica é feita com um material de espessura  $0,03$  m. As medidas internas são: altura  $2$  m e raio da base  $1$  m. A caixa é sem tampa. Calcule um valor aproximado para o volume do material utilizado na caixa.
6. A energia consumida num resistor elétrico é dada por  $P = \frac{V^2}{R}$  watts. Se  $V = 100$  volts e  $R = 10$  ohms, calcule um valor aproximado para a variação  $\Delta P$  em  $P$ , quando  $V$  decresce  $0,2$  volt e  $R$  aumenta de  $0,01$  ohm.
7. A altura de um cone é  $h = 20$  cm e o raio da base  $r = 12$  cm. Calcule um valor aproximado para a variação  $\Delta V$  no volume quando  $h$  aumenta  $2$  mm e  $r$  decresce  $1$  mm.
8. Calcule aproximadamente  $(1,01)^{2,03}$ .
9. Um dos catetos de um triângulo retângulo é  $x = 3$  cm e o outro,  $y = 4$  cm. Calcule um valor aproximado para a variação  $\Delta z$  na hipotenusa  $z$ , quando  $x$  aumenta  $0,01$  cm e  $y$  decresce  $0,1$  cm.
10. Defina diferencial de uma função de três variáveis.
11. Calcule a diferencial.
- $w = xyz$
  - $x = e^{2u + 2v - t^2}$
  - $w = \frac{x^2 + y^2}{1 + z^2}$
  - $s = (1 + x^2)^{yz}$
12. Calcule aproximadamente  $\sqrt{(0,01)^2 + (3,02)^2 + (3,9)^2}$ .

## 11.5. O VETOR GRADIENTE

Seja  $z = f(x, y)$  uma função que admite derivadas parciais em  $(x_0, y_0)$ . O vetor

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

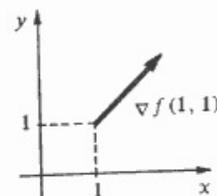
denomina-se *gradiente* de  $f$  em  $(x_0, y_0)$ . Outra notação usada para o gradiente de  $f$  em  $(x_0, y_0)$  é:  $\text{grad } f(x_0, y_0)$ . Geometricamente, interpretaremos  $\nabla f(x_0, y_0)$  como um vetor aplicado no ponto  $(x_0, y_0)$ .

**EXEMPLO.** Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Calcule  $\nabla f(1, 1)$  e represente-o geometricamente.

*Solução*

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (2x, 2y). \text{ Assim,}$$

$$\nabla f(1, 1) = (2, 2) = 2\vec{i} + 2\vec{j}.$$



Suponhamos, agora, que  $f(x, y)$  seja diferenciável em  $(x_0, y_0)$ . Temos:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + E(x, y)$$

com

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{E(h, k)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

Tendo em vista a igualdade

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)]$$

resulta

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)] + E(x, y)$$

com

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{E(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

Fazendo  $X = (x, y)$  e  $X_0 = (x_0, y_0)$  teremos:

$$f(X) = f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0) + E(X)$$

com

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{E(X)}{\|X - X_0\|} = 0.$$

Já vimos que se  $f(x)$  for função de variável real e diferenciável em  $x_0$ , então

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + E(x)$$

com

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E(x)}{|x - x_0|} = 0.$$

Seja  $f(x, y)$  diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , nada mais natural, então, do que definir a derivada de  $f$  em  $(x_0, y_0)$  por:  $f'(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0)$ . Assim, a derivada de  $f(x, y)$  em  $(x_0, y_0)$  é o gradiente de  $f$  em  $(x_0, y_0)$ .

Mais adiante, destacaremos as principais propriedades do vetor gradiente.

### Exercícios 11.5

- Calcule  $\nabla f(x, y)$  sendo  $f(x, y) =$ 
  - $x^2 y$
  - $e^{x^2 - y^2}$
  - $\frac{x}{y}$
  - $\arctg \frac{x}{y}$
- Defina gradiente de uma função de três variáveis. Calcule  $\nabla f(x, y, z)$  sendo  $f(x, y, z) =$ 
  - $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
  - $x^2 + y^2 + z^2$
  - $(x^2 + y^2 + 1)^{-1}$
  - $z \arctg \frac{x}{y}$
- Seja  $f(x, y) = x^2 - y^2$ . Represente geometricamente  $\nabla f(x_0, y_0)$ , sendo  $(x_0, y_0) =$ 
  - $(1, 1)$
  - $(-1, 1)$
  - $(-1, -1)$
  - $(1, -1)$
- Seja  $f(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$ . Represente geometricamente  $\nabla f(x_0, y_0)$ , sendo  $(x_0, y_0)$  um ponto da circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ .
- Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2$  e seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  uma curva diferenciável cuja imagem está contida na curva de nível  $f(x, y) = 1$ , isto é, para todo  $t$  no domínio de  $\gamma$ ,  $f(x(t), y(t)) = 1$  (dê exemplo de uma tal curva). Seja  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ . Prove que  $\gamma'(t_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0) = 0$ . Interprete geometricamente.  
(Sugestão. Para todo  $t$  no domínio de  $\gamma$ ,  $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$ ; derive em relação a  $t$  e faça  $t = t_0$ .)
- Seja  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  e seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  uma curva diferencial cuja imagem está contida na superfície de nível  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Seja  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ . Prove que  $\gamma'(t_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0, z_0) = 0$ . Interprete geometricamente.
- Calcule  $f'(x, y)$  sendo  $f(x, y) =$ 
  - $xy$
  - $2^{x-y}$
  - $x \arctg \frac{x}{y}$
  - $\arcsen xy$
- Seja  $f(x, y) = xy$  e seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in I$ , uma curva diferenciável cuja imagem está contida na curva de nível  $f(x, y) = 2$ . Mostre que para todo  $t$  em  $I$ ,  $\gamma'(t) \cdot \nabla f(\gamma(t)) = 0$ . Dê exemplo de uma curva cuja imagem esteja contida na curva de nível  $xy = 2$ .
- Sejam  $f(x, y) = y - x^2$  e  $\gamma(t) = (\sen t, \sen^2 t)$ .

- Verifique que a imagem de  $\gamma$  está contida na curva de nível  $y - x^2 = 0$ .
- Desenhe a imagem de  $\gamma$ .
- Verifique que para todo  $t$ ,  $\gamma'(t) \cdot \nabla f(\gamma(t)) = 0$ .

10. Seja  $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ .

- Dê exemplo de uma curva  $\gamma(t)$ , diferenciável, cuja imagem esteja contida na superfície de nível  $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$ .
- Verifique que  $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$ . Interprete geometricamente.

11. Considere a função  $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$  e seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  uma curva diferenciável qualquer, com imagem contida na superfície de nível  $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$ , e tal que  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ .

- Prove que  $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$ .
- Determine a equação do plano tangente à superfície de nível dada, no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$ .
- Determine a equação do plano tangente à superfície de nível  $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 14$ , no ponto  $(1, 1, 1)$ .

## 12

## REGRA DA CADEIA

## 12.1. REGRA DA CADEIA

Sejam  $f(x, y)$  uma função definida num aberto do  $\mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t)$  uma curva definida num intervalo  $I$ , tais que  $\gamma(t) \in D_f$  para todo  $t \in I$ . Nosso objetivo a seguir é provar que, se  $f$  e  $\gamma$  forem diferenciáveis, então a composta  $F(t) = f(\gamma(t))$  será, também, diferenciável e vale a regra da cadeia

$$F'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t),$$

onde  $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$  é o produto escalar dos vetores  $\nabla f(\gamma(t))$  e  $\gamma'(t)$ .  
Vamos precisar do seguinte lema.

**Lema.** Se  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto, for diferenciável em  $X_0 \in A$ , então existirá uma função  $\varphi(X)$  definida em  $A$  tal que

$$f(X) - f(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0) + \varphi(X) \|X - X_0\|$$

$$\text{com } \lim_{X \rightarrow X_0} \varphi(X) = 0 = \varphi(X_0).$$

*Demonstração*

Sendo  $f$  diferenciável em  $X_0$  tem-se

$$f(X) - f(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0) + E(X)$$

com

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{E(X)}{\|X - X_0\|} = 0.$$

tem-se

$$\varphi(X) = \begin{cases} \frac{E(X)}{\|X - X_0\|} & \text{se } X \neq X_0 \\ 0 & \text{se } X = X_0 \end{cases}$$

segue a nossa afirmação. Observe que  $\varphi(X)$  é contínua em  $X_0$ . ■

Note que no lema acima nada muda se supusermos  $f$  uma função de  $n$  variáveis. Antes de enunciar e demonstrar a regra da cadeia para derivação da composta de uma função de duas variáveis com uma curva, vejamos o seguinte exemplo.

**EXEMPLO 1.** Sejam  $f(x, y) = xy$  e  $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ . Considere a composta  $F(t) = f(\gamma(t))$ .

- a) Calcule  $F'(t)$ .  
b) Calcule  $F'(t)$  e verifique que  $F'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ .

*Solução*

a)  $F(t) = f(\gamma(t)) = f(t^3, t^2) = t^5$ . Observe que  $F$  fornece os valores que  $f(x, y)$  assume nos pontos da curva  $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ .

b)  $\nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (y, x)$ ; segue que  $\nabla f(t^3, t^2) = (t^2, t^3)$ . Por outro lado,  $\gamma'(t) = (3t^2, 2t)$ . Assim,

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (t^2, t^3) \cdot (3t^2, 2t) = 3t^4 + 2t^4$$

ou seja,

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 5t^4 = F'(t).$$

**Teorema.** Sejam  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto, e  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tais que  $\gamma(t) \in A$  para todo  $t$  no intervalo  $I$ . Nestas condições, se  $\gamma$  for diferenciável em  $t_0$  e  $f$  em  $X_0 = \gamma(t_0)$ , então a composta  $F(t) = f(\gamma(t))$  será diferenciável em  $t_0$  e vale a regra da cadeia

$$F'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0).$$

*Demonstração*

Pelo lema, para todo  $X \in A$ ,

①

$$f(X) - f(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot (X - X_0) + \varphi(X) \|X - X_0\|$$

onde

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \varphi(X) = 0 = \varphi(X_0).$$

Substituindo em ①  $X$  por  $\gamma(t)$  e  $X_0$  por  $\gamma(t_0)$  e dividindo por  $t - t_0$ ,  $t \neq t_0$ , vem

$$\frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0} = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} + \varphi(\gamma(t)) \frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0}$$

Observe que

$$\frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0} = \frac{|t - t_0|}{t - t_0} \cdot \left\| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right\|$$

De

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi\left(\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \left\| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right\| = \|\gamma'(t_0)\|$$

resulta

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(\gamma(t)) \frac{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}{t - t_0} = 0.$$

Logo,

$$F'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0} = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0).$$

A demonstração do teorema acima é exatamente a mesma, se substituirmos  $f$  de duas variáveis por  $f$  de  $n$  variáveis.

Segue desse último teorema que se  $f$  for diferenciável em  $A \subset \mathbb{R}^2$  e  $\gamma$  diferenciável em  $I$ , então a composta  $F(t) = f(\gamma(t))$  será diferenciável e, para todo  $t$  em  $I$ ,

$$F'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Fazendo  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  e lembrando que

$$\nabla f(\gamma(t)) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \right) \text{ e } \gamma'(t) = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

resulta:

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}$$

Escreveremos com frequência

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

quando subentendido que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  devem ser calculados em  $(x(t), y(t))$  quando  $\frac{dF}{dt}$  for calculado em  $t$ .

Com frequência, ocorrerão, ainda, problemas do seguinte tipo: são dadas as funções diferenciáveis  $z = f(x, y)$ ,  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  e pede-se calcular  $\frac{dz}{dt}$ . Evidentemente, o que se deseja é a derivada da composta  $z = f(x(t), y(t))$ . Assim:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} [f(x, y)] = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

ou ainda,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Tudo se passa da mesma forma no caso em que  $f$  é uma função de três ou mais variáveis.

**EXEMPLO 2.** Sejam  $z = x^2y$ ,  $x = e^{t^2}$  e  $y = 2t + 1$ . Calcule  $\frac{dz}{dt}$ .

*Solução*

*1.º processo*

$$z = x^2y, \quad x = e^{t^2} \text{ e } y = 2t + 1 \Rightarrow z = 2e^{2t^2} (2t + 1).$$

$$\frac{dz}{dt} = 4te^{2t^2} (2t + 1) + 2e^{2t^2}$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dt} = 2e^{2t^2} [4t^2 + 2t + 1].$$

*2.º processo (regra da cadeia)*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2, \quad \frac{dx}{dt} = 2te^{t^2} \text{ e } \frac{dy}{dt} = 2.$$

Assim,

$$\frac{dz}{dt} = 4xyte^{t^2} + 2x^2$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dt} = 4te^{t^2}(2t+1)e^{t^2} + 2e^{2t^2} = 2e^{2t^2}[4t^2 + 2t + 1].$$

**EXEMPLO 3.** Seja  $F(t) = f(e^{t^2}, \sin t)$ , onde  $f(x, y)$  é uma função dada, diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ .

a) Expresse  $F'(t)$  em termos das derivadas parciais de  $f$ .

b) Calcule  $F'(0)$  supondo  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 5$ .

*Solução*

a)  $F(t) = f(x, y)$  onde  $x = e^{t^2}$  e  $y = \sin t$ .

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dt}.$$

Daí

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(e^{t^2}, \sin t) 2te^{t^2} + \frac{\partial f}{\partial y}(e^{t^2}, \sin t) \cos t.$$

b)  $F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) \cdot 1$ ; logo

$$F'(0) = 5.$$

**EXEMPLO 4.**  $z = f(x^2, 3x + 1)$ , onde  $f(u, v)$  é uma função de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ .

a) Expresse  $\frac{dz}{dx}$  em termos das derivadas parciais de  $f$ .

b) Verifique que  $\frac{dz}{dx}\Big|_{x=1} = 2 \frac{\partial f}{\partial u}(1, 4) + 3 \frac{\partial f}{\partial v}(1, 4)$ .

*Solução*

Sendo  $f(u, v)$  de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ ,  $f(u, v)$  será diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ ;  $u = x^2$  e  $v = 3x + 1$  também são diferenciáveis. Podemos então, aplicar a regra da cadeia.

a)  $z = f(u, v)$ ,  $u = x^2$  e  $v = 3x + 1$ .

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \frac{dv}{dx},$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dx} = 2x \frac{\partial f}{\partial u}(x^2, 3x + 1) + 3 \frac{\partial f}{\partial v}(x^2, 3x + 1).$$

Fazendo  $x = 1$  na expressão anterior, obtemos:

$$\frac{dz}{dx}\Big|_{x=1} = 2 \frac{\partial f}{\partial u}(1, 4) + 3 \frac{\partial f}{\partial v}(1, 4).$$

**EXEMPLO 5.** Seja  $g(x) = f(x, x^3 + 2)$ , onde  $f(x, y)$  é uma função dada, definida e diferenciável num aberto do  $\mathbb{R}^2$ . Expresse  $g'(x)$  em termos das derivadas parciais de  $f$ .

*Solução*

$g(x) = f(x, y)$  onde  $y = x^3 + 2$ .

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dx}.$$

ou seja,

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, x^3 + 2) + 3x^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, x^3 + 2).$$

**EXEMPLO 6.** Suponha  $f(x, y)$  diferenciável e que, para todo  $x$ ,

$$f(3x + 1, 3x - 1) = 4.$$

Verifique que  $\frac{\partial f}{\partial x}(3x + 1, 3x - 1) = -\frac{\partial f}{\partial y}(3x + 1, 3x - 1)$ .

*Solução*

Para evitar confusão com as variáveis, vamos primeiro substituir  $x$  por  $t$ . Assim, para todo  $t$ ,

$$f(3t + 1, 3t - 1) = 4.$$

Derivando em relação a  $t$  os dois membros obtemos:

$$\frac{d}{dt} [f(3t + 1, 3t - 1)] = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [f(3t + 1, 3t - 1)] &= \frac{\partial f}{\partial x}(3t + 1, 3t - 1) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(3t + 1, 3t - 1) \frac{dy}{dt} \\ &= 3 \frac{\partial f}{\partial x}(3t + 1, 3t - 1) + 3 \frac{\partial f}{\partial y}(3t + 1, 3t - 1) \end{aligned}$$

teremos, para todo  $t$ ,

$$3 \frac{\partial f}{\partial x} (3t + 1, 3t - 1) + 3 \frac{\partial f}{\partial y} (3t + 1, 3t - 1) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x} (3t + 1, 3t - 1) = - \frac{\partial f}{\partial y} (3t + 1, 3t - 1).$$

Segue que, para todo  $x$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} (3x + 1, 3x - 1) = - \frac{\partial f}{\partial y} (3x + 1, 3x - 1).$$

**Observação.** Sejam  $f(x, y)$ ,  $g(x)$  e  $h(x)$  funções diferenciáveis e seja  $\gamma(x) = (g(x), h(x))$ . Assim,

$$f(g(x), h(x)) = f(\gamma(x)).$$

Pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dx} [f(g(x), h(x))] = \frac{d}{dx} [f(\gamma(x))] = \nabla f(\gamma(x)) \cdot \gamma'(x),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx} [f(g(x), h(x))] = \frac{\partial f}{\partial x} (g(x), h(x)) g'(x) + \frac{\partial f}{\partial y} (g(x), h(x)) h'(x).$$

Vamos, agora, resolver o exemplo anterior trabalhando diretamente com a equação

$$f(3x + 1, 3x - 1) = 4.$$

Derivando em relação a  $x$  os dois membros, obtemos:

$$\frac{d}{dx} [f(3x + 1, 3x - 1)] = 0.$$

Como (veja observação acima)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [f(3x + 1, 3x - 1)] &= \frac{\partial f}{\partial x} (3x + 1, 3x - 1)(3x + 1)' + \frac{\partial f}{\partial y} (3x + 1, 3x - 1)(3x - 1)' \\ &= 3 \frac{\partial f}{\partial x} (3x + 1, 3x - 1) + 3 \frac{\partial f}{\partial y} (3x + 1, 3x - 1) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} (3x + 1, 3x - 1) = - \frac{\partial f}{\partial y} (3x + 1, 3x - 1).$$

**EXEMPLO 7.**  $z = f(e^{-u}, u^2)$ , onde  $f(x, y)$  é uma função diferenciável dada. Expresse  $\frac{dz}{du}$  em termos das derivadas parciais de  $f$ .

*Solução*

$z = f(x, y)$  onde  $x = e^{-u}$  e  $y = u^2$ .

$$\frac{dz}{du} = \frac{\partial f}{\partial x} (x, y) \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} (x, y) \frac{dy}{du}$$

ou seja,

$$\frac{dz}{du} = -e^{-u} \frac{\partial f}{\partial x} (x, y) + 2u \frac{\partial f}{\partial y} (x, y)$$

onde  $x = e^{-u}$  e  $y = u^2$ .

**EXEMPLO 8.** Sejam  $A$  e  $B$  abertos do  $\mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y)$  diferenciável em  $A$ ,  $g(u, v)$  e  $h(u, v)$  diferenciáveis em  $B$  tais que, para todo  $(u, v)$  em  $B$ ,  $(g(u, v), h(u, v)) \in A$ . Seja

$$F(u, v) = f(g(u, v), h(u, v)), (u, v) \in B.$$

(Observe que a mudança de variáveis  $x = g(u, v)$  e  $y = h(u, v)$  transforma a função de duas variáveis  $z = f(x, y)$  na função de duas variáveis

$$z = F(u, v) = f(g(u, v), h(u, v)).$$

Mostre que

a)  $\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$  (ou  $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$ ) onde  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  devem ser calculadas no ponto  $(g(u, v), h(u, v))$ .

b)  $\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$  (ou  $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$ ).

*Solução*

$F(u, v) = f(x, y)$  onde  $x = g(u, v)$  e  $y = h(u, v)$ . Para calcular  $\frac{\partial F}{\partial u}$  vamos aplicar a regra da cadeia, olhando  $v$  como constante; tudo se passa como se  $x$  e  $y$  dependessem apenas de  $u$ :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial u}$$

onde  $x = g(u, v)$  e  $y = h(u, v)$ .

**Cuidado.** Escrevemos  $\frac{\partial x}{\partial u}$  e  $\frac{\partial y}{\partial u}$  e não  $\frac{dx}{du}$  e  $\frac{dy}{du}$  por se tratarem de derivadas parciais.

b) Para calcular  $\frac{\partial F}{\partial v}$  vamos aplicar a regra da cadeia, olhando  $u$  como constante; tudo se passa como se  $x$  e  $y$  dependessem apenas de  $v$ :

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial v}$$

onde  $x = g(u, v)$  e  $y = h(u, v)$ .

**EXEMPLO 9.**  $z = f(u^2 + v^2, uv)$ , onde  $f(x, y)$  é uma função diferenciável dada. Expresse

$\frac{\partial z}{\partial u}$  e  $\frac{\partial z}{\partial v}$  em termos das derivadas parciais de  $f$ .

*Solução*

$z = f(x, y)$  onde  $x = u^2 + v^2$  e  $y = uv$ .

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial u} = 2u \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 + v^2, uv) + v \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 + v^2, uv)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial v} = 2v \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + u \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

onde  $x = u^2 + v^2$  e  $y = uv$ .

**EXEMPLO 10.**  $F(r, \theta) = f(x, y)$  onde  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , sendo  $f(x, y)$  uma função diferenciável dada. Verifique que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) + \sin \theta \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta).$$

*Solução*

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = -\sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Multiplicando ① por  $\sin \theta$ , ② por  $\cos \theta$  e somando membro a membro obtemos a relação que queremos.

**EXEMPLO 11.** Suponha  $z = f(x, y)$  de classe  $C^1$ ,  $f(1, 2) = -2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 3$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(1,$

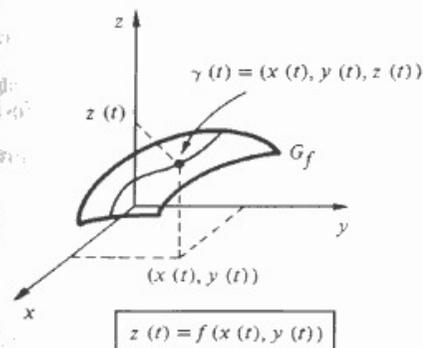
$2) = 4$ . Admita que a imagem da curva  $\gamma(t) = (t^2, 3t - 1, z(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , esteja contida no gráfico de  $f$ .

a) Calcule  $z(t)$ .

b) Ache a equação da reta tangente a  $\gamma$  no ponto  $\gamma(1)$ .

*Solução*

a)  $(x, y, z) \in G_f \Leftrightarrow z = f(x, y)$ . Como a imagem de  $\gamma$  está contida no gráfico de  $f$ , para todo  $t$ ,  $(t^2, 3t - 1, z(t)) \in G_f$ , logo,  $z(t) = f(t^2, 3t - 1)$ .



b) A equação da reta tangente no ponto  $\gamma(1)$  é:

$$(x, y, z) = \gamma(1) + \lambda \gamma'(1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Temos:

$$\gamma(1) = (1, 2, z(1)) = (1, 2, f(1, 2)) = (1, 2, -2);$$

$$\gamma'(t) = \left( 2t, 3, \frac{dz}{dt} \right);$$

$$z = f(t^2, 3t - 1) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t - 1) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t - 1) \frac{dy}{dt}$$

Assim,  $\frac{dz}{dt} = 2t \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t - 1) + 3 \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t - 1)$  e, portanto,  $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=1} = 18$ . Segue que

$$\gamma'(1) = (2, 3, 18).$$

A equação da reta tangente é, então,

$$(x, y, z) = (1, 2, -2) + \lambda (2, 3, 18), \lambda \in \mathbb{R}.$$

O próximo exemplo mostra-nos que se  $\gamma$  for uma curva qualquer, diferenciável em  $t_0$ , cuja imagem está contida no gráfico da função  $f(x, y)$ , diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , então a reta tangente  $\gamma$  no ponto  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  está contida no plano tangente em  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

**EXEMPLO 12.** Seja  $f(x, y)$  diferenciável em  $(x_0, y_0)$ ,  $\gamma(t)$  uma curva diferenciável em  $t_0$  cuja imagem está contida no gráfico de  $f$ . Seja  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ . Então a reta tangente a  $\gamma$  no ponto  $\gamma(t_0)$  está contida no plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $\gamma(t_0)$ .

*Solução*

Seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ; como a imagem de  $\gamma$  está contida no gráfico de  $f$

$$z(t) = f(x(t), y(t)).$$

Sendo  $f$  diferenciável em  $(x_0, y_0)$ ,  $x(t)$  e  $y(t)$  diferenciáveis em  $t_0$ , podemos aplicar a regra da cadeia para obter  $z'(t_0)$ :

$$\textcircled{1} \quad z'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) y'(t_0).$$

A equação da reta tangente em  $\gamma(t_0)$  é:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \lambda (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)), \lambda \in \mathbb{R}.$$

precisamos mostrar que, para todo  $\lambda$ , o ponto

$$(x_0 + \lambda x'(t_0), y_0 + \lambda y'(t_0), f(x_0, y_0) + \lambda z'(t_0))$$

pertence ao plano

$$\textcircled{2} \quad z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Basta mostrar, então, que fazendo em  $\textcircled{2}$   $x = x_0 + \lambda x'(t_0)$  e  $y = y_0 + \lambda y'(t_0)$  obteremos  $z = f(x_0, y_0) + \lambda z'(t_0)$ . De fato, para  $x = x_0 + \lambda x'(t_0)$  e  $y = y_0 + \lambda y'(t_0)$  temos:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \lambda x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \lambda y'(t_0),$$

ou seja,

$$z = f(x_0, y_0) + \lambda \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) y'(t_0) \right];$$

tendo em vista  $\textcircled{1}$

$$z = f(x_0, y_0) + \lambda z'(t_0).$$

**Exercícios 12.1**

(Todas as funções são supostas de classe  $C^1$  ou diferenciáveis, quando necessário)

1. Calcule  $\frac{dz}{dt}$  pelo dois processos descritos no Exemplo 2.

a)  $z = \sin xy, x = 3t$  e  $y = t^2$ .

b)  $z = x^2 + 3y^2, x = \sin t$  e  $y = \cos t$ .

c)  $z = \ln(1 + x^2 + y^2), x = \sin 3t$  e  $y = \cos 3t$ .

2. Seja  $g(t) = f(3t, 2t^2 - 1)$ .

a) Expresse  $g'(t)$  em termos das derivadas parciais de  $f$ .

b) Calcule  $g'(0)$  admitindo  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = \frac{1}{3}$ .

3. Expresse  $\frac{dz}{dt}$  em termos das derivadas parciais de  $f$ , sendo  $z = f(x, y)$  e

a)  $x = t^2$  e  $y = 3t$ .

b)  $x = \sin 3t$  e  $y = \cos 2t$ .

4. Suponha que, para todo  $t$ ,  $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t$ . Mostre que  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$ .

5. Suponha que, para todo  $x$ ,  $f(3x, x^3) = \arctg x$ .

a) Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(3, 1)$  admitindo  $\frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = 2$ .

b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(3, 1, f(3, 1))$ .

6. Admita que, para todo  $(x, y)$ ,

$$4y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2.$$

Calcule  $g'(t)$ , sendo  $g(t) = f(2 \cos t, \sin t)$ .

7. Admita que, para todo  $(x, y)$ ,

$$4y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Prove que  $f$  é constante sobre a elipse  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

(Sugestão. Observe que a função  $g$  do exercício anterior fornece os valores de  $f$  sobre a elipse.)

8. A imagem da curva  $\gamma(t) = (2t, t^2, z(t))$  está contida no gráfico de  $z = f(x, y)$ . Sabe-se que  $f(2, 1) = 3$ .

3.  $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 1$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -1$ . Determine a equação da reta tangente a  $\gamma$  no ponto  $\gamma(1)$ .

9. Admita que, para todo  $(x, y)$ ,

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Mostre que  $g(t) = f\left(t, \frac{2}{t}\right)$ ,  $t > 0$ , é constante.

10. Seja  $z = f(u + 2v, u^2 - v)$ . Expresse  $\frac{\partial z}{\partial u}$  e  $\frac{\partial z}{\partial v}$  em termos das derivadas parciais de  $f$ .

11. Seja  $z = f(u - v, v - u)$ . Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

12. Considere a função  $F(x, y) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$ . Mostre que  $x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ .

13. Prove que a função  $u = f(x + at, y + bt)$ ,  $a$  e  $b$  constantes, é solução da equação a derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y}.$$

14. Seja  $z = f^2(x, y)$ , onde  $x = t^2$  e  $y = t^3$ . Expresse  $\frac{dz}{dt}$  em termos das derivadas parciais de  $f$ .

15. Seja  $g$  dada por  $g(t) = f(x, y)$  sen  $3t$ , onde  $x = 2t$  e  $y = 3t$ . Verifique que

$$g'(t) = 3f(x, y) \cos 3t + \sin 3t \left[ 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right],$$

onde  $x = 2t$  e  $y = 3t$ .

16. Seja  $z = uf(u - v, u + v)$ . Verifique que

$$u \frac{\partial z}{\partial u} + u \frac{\partial z}{\partial v} = z + 2u^2 \frac{\partial f}{\partial y}.$$

17. Seja  $g(x, y) = (x^2 + y^2)f(u, v)$ , onde  $u = 2x - y$  e  $v = x + 2y$ . Mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xf(u, v) + (x^2 + y^2) \left[ 2 \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right].$$

18. Seja  $g(x)$  uma função diferenciável tal que  $f(x, g(x)) = 0$ , para todo  $x \in D_g$ . Mostre que

$$g'(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$$

para todo  $x \in D_g$ , com  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0$ .

19.  $f(t)$  e  $g(x, y)$  são funções diferenciáveis tais que  $g(t, f(t)) = 0$ , para todo  $t$ . Suponha  $f(0) = 1$ .

$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 1) = 2$  e  $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 1) = 4$ . Determine a equação da reta tangente a  $\gamma(t) = (t, f(t))$ , no ponto  $\gamma(0)$ .

20.  $f(x, y, z)$  e  $g(x, y)$  são funções diferenciáveis tais que, para todo  $(x, y)$  no domínio de  $g$ ,  $f(x, y, g(x, y)) = 0$ . Suponha  $g(1, 1) = 3$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 3) = 2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 3) = 5$  e  $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 3) = 10$ .

Determine a equação do plano tangente ao gráfico de  $g$  no ponto  $(1, 1, 3)$ .

21. Seja  $g(t) = f(3t^2, t^3, e^{2t})$ ; suponha  $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = 4$ .

a) Expresse  $g'(t)$  em termos das derivadas parciais de  $f$ .

b) Calcule  $g'(0)$ .

22. Seja  $g(x, y) = xf(x^2 + y, 2y, 2x - y)$ . Expresse  $\frac{\partial g}{\partial x}$  e  $\frac{\partial g}{\partial y}$  em termos das derivadas parciais de  $f$ .

23. Suponha que, para todo  $(x, y)$ ,  $f(x, y, x^2 + y^2) = 0$ . Mostre que  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 2) = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 2)$ .

24. Seja  $F(x, y, z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$ . Mostre que

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

25. Seja  $F(u, v)$  diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ , com  $\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \neq 0$ , para todo  $(u, v)$ . Suponha que, para

todo  $(x, y)$ ,  $F(xv, z) = 0$ , onde  $z = z(x, y)$ . Mostre que  $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

26. Seja  $f(x, y)$  diferenciável e homogênea de grau  $\lambda$  no aberto  $A$ . Prove:

a)  $a \frac{\partial f}{\partial x}(at, bt) + b \frac{\partial f}{\partial y}(at, bt) = \lambda t^{\lambda-1} f(a, b)$  para todo  $t > 0$  e para todo  $(a, b) \in A$ , com  $(at, bt) \in A$ .

b) (Relação de Euler). Conclua de a) que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda f.$$

(Sugestão para a): Derive em relação a  $t$  os dois membros de  $f(at, bt) = t^\lambda f(a, b)$ .

27. Seja  $f(x, y)$  definida e diferenciável na bola aberta  $A$ . Suponha que  $f$  verifica em  $A$  a relação de Euler

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda f(x, y).$$

Prove que  $f$  é homogênea de grau  $\lambda$ .

(Sugestão. Mostre que  $g(t) = \frac{f(at, bt)}{t^\lambda}$  é constante.)

28. Seja  $\phi(u)$  uma função diferenciável qualquer. A função  $f(x, y) = x^2 \phi\left(\frac{x}{y}\right)$  verifica a relação

de Euler  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f$ ? Por quê?

29.  $f(x, y) = \frac{x}{e^y \arctg \frac{x}{y} + \operatorname{sen}\left(\cos \frac{x}{y}\right)}$  verifica a equação  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = -f$ ? Por quê?

Determine uma família de funções que verifiquem a equação  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ .

30. Suponha  $f(x, y)$  diferenciável no aberto  $A$  e homogênea de grau  $\lambda$ . Prove que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  é homogênea de grau  $\lambda - 1$ , isto é, que  $\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{\lambda-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  para todo  $t > 0$ , e para todo  $(x, y)$  em  $A$  com  $(tx, ty) \in A$ .

(Sugestão. Derive em relação a  $x$  os dois membros de  $f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y)$ .)

31. Seja  $f(x, y)$  definida em  $\mathbb{R}^2$ , diferenciável em  $(0, 0)$  e tal que  $f(tx, ty) = tf(x, y)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Prove que  $f$  é linear, isto é, que existem reais  $a$  e  $b$  tais que  $f(x, y) = ax + by$ .

32. Seja  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

a) Verifique que  $f(tx, ty) = tf(x, y)$  para todo  $t$  e todo  $(x, y)$ .  
b) Olhe para o Exercício 32 e responda:  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ ? Por quê?

33. Seja  $f(x, y)$  diferenciável em  $\mathbb{R}^2$  e tal que para todo  $(x, y)$  em  $\mathbb{R}^2$

$$\textcircled{1} \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

a) Verifique que a função  $g(u, v)$  dada por  $g(u, v) = f(x, y)$ , onde  $x = u + v$  e  $y = u$ , é tal que  $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$  em  $\mathbb{R}^2$ . Conclua que  $g(u, v) = \varphi(v)$  para alguma função  $\varphi$ , definida e diferenciável em  $\mathbb{R}$ .

b) Determine uma família de soluções da equação  $\textcircled{1}$ .

$$\textcircled{2} \quad f(x, y) = \frac{e^{(x-y)^2} + \arctg(\operatorname{sen}(x-y)) + \ln[1 + (x-y)^2]}{(x-y)^2 + 5}$$

verifica  $\textcircled{1}$ ? (Não precisa fazer contas!)

## 12.2. DERIVAÇÃO DE FUNÇÕES DEFINIDAS IMPLICITAMENTE. TEOREMA DAS FUNÇÕES IMPLÍCITAS

Como já vimos, a função  $y = g(x)$  é definida implicitamente pela equação  $f(x, y) = 0$  se, para todo  $x \in D_g$ ,

$$f(x, g(x)) = 0.$$

Admitindo que  $f$  e  $g$  sejam diferenciáveis, vamos deduzir uma fórmula para o cálculo de  $g'(x)$  em todo  $x \in D_g$  para os quais  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0$ . Então, derivando em relação a  $x$  os dois membros da equação anterior, obtemos,

$$\frac{d}{dx} [f(x, g(x))] = 0$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) g'(x) = 0$$

e, portanto,

$$g'(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}, \quad y = g(x),$$

$$\text{desde que } \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0.$$

Da mesma forma,  $x = h(y)$  é definida implicitamente pela equação  $f(x, y) = 0$  se, para todo  $y \in D_h$ ,

$$f(h(y), y) = 0.$$

Supondo  $f$  e  $h$  diferenciáveis e derivando os dois membros da equação acima em relação a  $y$ , obtemos:

$$\frac{d}{dy} [f(h(y), y)] = 0$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{dx}{dy} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dy} = 0$$

e, portanto,

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}, \quad x = h(y),$$

$$\text{em todo } y \in D_h, \text{ com } \frac{\partial f}{\partial x}(h(y), y) \neq 0.$$

**EXEMPLO 1.** A função diferenciável  $y = y(x)$  é definida implicitamente pela equação

$$y^3 + xy + x^3 = 3.$$

Expresse  $\frac{dy}{dx}$  em termos de  $x$  e de  $y$ .

*Solução*

1.º processo

$$\frac{y^3 + xy + x^3 - 3}{f(x, y)} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)} = - \frac{y + 3x^2}{3y^2 + x}$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{y + 3x^2}{3y^2 + x}$$

em todo  $x$  no domínio de  $y = y(x)$ , com  $3(y(x))^2 + x \neq 0$ .

2.º processo

$$\frac{d}{dx} [y^3 + xy + x^3] = \frac{d}{dx} (3) \quad (3)$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} + 3x^2 = 0$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{y + 3x^2}{3y^2 + x}.$$

**EXEMPLO 2.** Suponha que a função diferenciável  $z = g(x, y)$  seja dada implicitamente pela equação  $f(x, y, z) = 0$ , onde  $f$  é diferenciável num aberto de  $\mathbb{R}^3$ . Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)}$$

em todo  $(x, y) \in D_g$ , com  $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \neq 0$ .

$$b) \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)}$$

em todo  $(x, y) \in D_g$ , com  $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \neq 0$ .

*Solução*

a) Para todo  $(x, y) \in D_g$

$$\textcircled{1} \quad f(x, y, g(x, y)) = 0.$$

Derivando em relação a  $x$  os dois membros da equação, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} [f(x, y, \overbrace{g(x, y)}^z)] = 0$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} = 0;$$

como  $\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$  e  $\frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$ , resulta

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)}$$

b) Derivando os dois membros de  $\textcircled{1}$  em relação a  $y$ , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial y} [f(x, y, \overbrace{g(x, y)}^z)] = 0$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

portanto,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)}$$

**EXEMPLO 3.** A função diferenciável  $z = z(x, y)$  é dada implicitamente pela equação

$$xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 5.$$

Expresse  $\frac{\partial z}{\partial x}$  em termos de  $x, y$  e  $z$ .

*Solução*

1.º processo

$$\frac{xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 5}{f(x, y, z)} = 0$$

Pela parte a) do exemplo anterior

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)} = - \frac{yz + 3x^2}{xy + 3z^2}.$$

2.º processo

$$\frac{\partial}{\partial x} [xyz + x^3 + y^3 + z^3] = \frac{\partial}{\partial x} (5),$$

assim,

$$yz + xy \frac{\partial z}{\partial x} + 3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{yz + 3x^2}{xy + 3z^2}.$$

**EXEMPLO 4.** As funções diferenciáveis  $y = y(x)$  e  $z = z(x)$ , definidas no intervalo aberto  $I$ , são dadas implicitamente pelo sistema

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

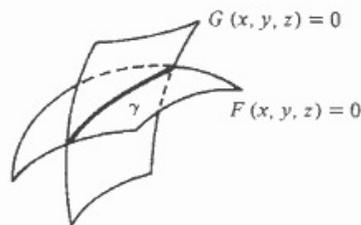
onde  $F$  e  $G$  são supostas diferenciáveis num aberto de  $\mathbb{R}^3$ . Expresse  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{dz}{dx}$  em termos das derivadas parciais de  $F$  e de  $G$ .

*Solução*

Dizer que  $y = y(x)$  e  $z = z(x)$  estão definidas implicitamente por  $\textcircled{1}$  significa que, para todo  $x$  em  $I$ ,

$$\textcircled{2} \quad F(x, y(x), z(x)) = 0 \quad \text{e} \quad G(x, y(x), z(x)) = 0,$$

ou seja, significa que a imagem da curva  $\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$  está contida na intersecção das superfícies  $F(x, y, z) = 0$  e  $G(x, y, z) = 0$ .



Para obter  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{dz}{dx}$ , vamos derivar em relação a  $x$  os dois membros de  $\textcircled{2}$ . Temos, então:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dz}{dx} = -\frac{\partial G}{\partial x} \end{cases}$$

Pela regra de Cramer,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}$$

para todo  $x \in I$ , com  $\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$  em  $(x, y(x), z(x))$ .

**Notações.** O símbolo  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}$  é usado para indicar o *determinante jacobiano* de  $F$  e  $G$  em relação a  $y$  e  $z$ :

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Da mesma forma:

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}$$

Com estas notações,  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{dz}{dx}$  se escrevem:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}}$$

**EXEMPLO 5.** Sejam  $y = y(x)$  e  $z = z(x)$  diferenciáveis em  $\mathbb{R}$  e dadas implicitamente pelo sistema

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

a) Calcule  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{dz}{dx}$ .

b) Determine um par de funções  $y = y(x)$  e  $z = z(x)$  que sejam dadas implicitamente pelo sistema  $\textcircled{1}$ .

*Solução*

a) Para obtermos  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{dz}{dx}$ , vamos derivar os dois membros de  $\textcircled{1}$  em relação a  $x$ , observando que  $y$  e  $z$  são funções de  $x$ :

$$\frac{d}{dx} [2x + y - z] = \frac{d}{dx} [3], \text{ ou seja, } 2 + \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = 0;$$

$$\frac{d}{dx} [x + y + z] = \frac{d}{dx} [1], \text{ ou seja, } 1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0.$$

Assim,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = -2 \\ \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = -1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}.$$

(Sugerimos ao leitor calcular  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{dz}{dx}$  utilizando o exemplo anterior.)

b)  $\textcircled{1}$  é equivalente a  $\begin{cases} y - z = 3 - 2x \\ y + z = 1 - x \end{cases}$ .

Resolvendo o sistema nas incógnitas  $y$  e  $z$  obtemos:

$$y = 2 - \frac{3}{2}x \quad \text{e} \quad z = -1 + \frac{1}{2}x.$$

Observe que a imagem de

$$\gamma(x) = \left( x, 2 - \frac{3}{2}x, -1 + \frac{1}{2}x \right)$$

é a reta intersecção dos planos  $2x + y - z = 3$  e  $x + y + z = 1$ .

**EXEMPLO 6.** Sejam  $y = y(x)$  e  $z = z(x)$ ,  $z > 0$ , diferenciáveis e dadas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

a) Expresse  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{dz}{dx}$  em termos de  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

b) Expresse  $y$  e  $z$  em função de  $x$ .

c) Desenhe a imagem da curva  $\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$ .

*Solução*

a)  $\frac{d}{dx} [x^2 + y^2 + z^2] = \frac{d}{dx} [1]$ , ou seja,  $2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = 0$ ;

$$\frac{d}{dx} [x + y] = \frac{d}{dx} [1], \text{ ou seja, } 1 + \frac{dy}{dx} = 0.$$

Assim,

$$\begin{cases} y \frac{dy}{dx} + z \frac{dz}{dx} = -x \\ \frac{dy}{dx} = -1 \end{cases}$$

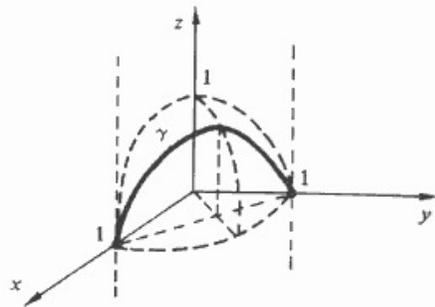
Resolvendo o sistema obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = -1 \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y-x}{z}.$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 1 - x^2 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

Substituindo  $y = 1 - x$  na 1.ª equação e observando que  $z > 0$  obtemos:  $z = \sqrt{2x - 2x^2}$ . Assim,  $y = 1 - x$  e  $z = \sqrt{2x - 2x^2}$ , com  $0 < x < 1$ .

c)



A imagem de  $\gamma$  está contida na intersecção do plano  $x + y = 1$  com a superfície esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Até agora, o problema referente a uma função  $y = g(x)$  dada implicitamente por uma equação  $F(x, y) = 0$  era colocado da seguinte forma: suponha  $y = g(x)$  diferenciável e definida implicitamente pela equação  $F(x, y) = 0$ ; calcule  $\frac{dy}{dx}$ . Evidentemente,  $\frac{dy}{dx}$  só terá significado se realmente  $F(x, y) = 0$  definir implicitamente alguma função  $y = g(x)$ . Por exemplo,  $x^2 + y^2 = -3$  não define implicitamente função alguma; logo,  $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$  não terá, neste caso, nenhum significado.

O teorema que vamos enunciar a seguir fornece-nos uma condição suficiente para que a equação  $F(x, y) = 0$  defina implicitamente uma função diferenciável  $y = g(x)$ . Antes, porém, vamos ver alguns exemplos.

**EXEMPLO 7.** Seja  $F(x, y)$  de classe  $C^1$  num aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  e seja  $(x_0, y_0) \in A$ , com  $F(x_0, y_0) = 0$ . Suponha que  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$ . Prove que existem intervalos abertos  $I$  e  $J$ , com  $x_0 \in I$  e  $y_0 \in J$ , tais que, para cada  $x \in I$ , existe um único  $g(x) \in J$ , com  $F(x, g(x)) = 0$ .

*Solução*

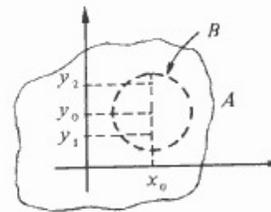
$\frac{\partial F}{\partial y}$  é contínua, pois, por hipótese,  $F$  é de classe  $C^1$ . Como  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$ , pelo teorema da conservação do sinal existe uma bola aberta  $B$  de centro  $(x_0, y_0)$ , que podemos supor contida em  $A$ , pois  $A$  é aberto, tal que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0 \text{ em } B.$$

Sejam  $y_1$  e  $y_2$  tais que  $y_1 < y_0 < y_2$ , com  $(x_0, y_1)$  e  $(x_0, y_2)$  em  $B$ . Fixado  $x_0$ , consideremos a função

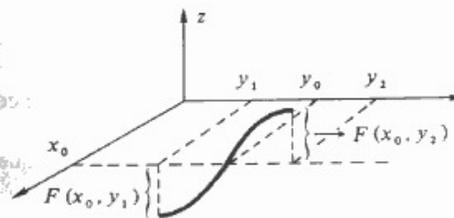
$$z = F(x_0, y), y \in [y_1, y_2]$$

①

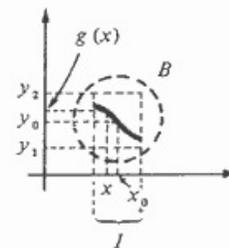


Como  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y) > 0$  para todo  $y \in [y_1, y_2]$ , segue que ① é estritamente crescente em  $[y_1, y_2]$ . Tendo em vista que  $F(x_0, y_0) = 0$ , resulta:

$$\textcircled{2} \quad F(x_0, y_1) < 0 \text{ e } F(x_0, y_2) > 0.$$



Seja  $J = ]y_1, y_2[$ ; observe que  $y_0 = g(x_0)$  é o único número em  $J$  tal que  $F(x_0, y_0) = 0$ . Tendo em vista ② e pela continuidade de  $F$ , existe um intervalo aberto  $I$ , com  $x_0 \in I$ , tal que para todo  $x \in I$ ,  $(x, y_1)$  e  $(x, y_2)$  pertencem a  $B$ , com  $F(x, y_1) < 0$  e  $F(x, y_2) > 0$ .

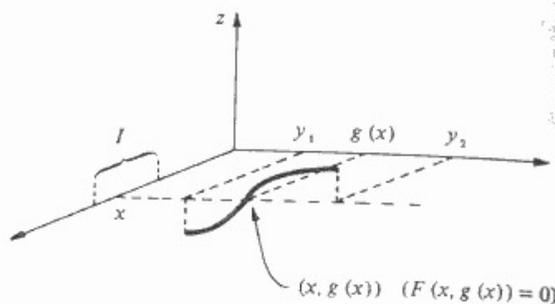


Como  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$  em  $B$ , para todo  $x \in I$ , a função

③

$$z = F(x, y) \text{ (x fixo)}$$

é estritamente crescente em  $[y_1, y_2]$ ; tendo em vista que  $F(x, y_1) < 0$  e  $F(x, y_2) > 0$ , pelo teorema do valor intermediário e pelo fato de ③ ser estritamente crescente em  $[y_1, y_2]$ , existirá um único  $g(x) \in ]y_1, y_2[$  tal que  $F(x, g(x)) = 0$  (veja figura seguinte).



A função  $g : I \rightarrow J$  está definida implicitamente pela equação  $F(x, y) = 0$ .

**Observação.** Para todos  $\bar{y}_1$  e  $\bar{y}_2$ , com  $y_1 < \bar{y}_1 < y_0 < \bar{y}_2 < y_2$ , procedendo como acima, encontraremos um intervalo aberto  $I_1 \subset I$ , com  $x_0 \in I_1$ , tal que

$$x \in I_1 \Rightarrow g(x) \in ]\bar{y}_1, \bar{y}_2[;$$

logo,  $g$  é contínua em  $x_0$ . Deixamos a seu cargo verificar que  $g$  é contínua em todo  $x \in I_1$ .

**EXEMPLO 8.** Suponha  $F(x, y)$  diferenciável em  $(x_0, y_0)$ . Prove que existem funções  $\varphi_1(x, y)$  e  $\varphi_2(x, y)$ , definidas em  $D_F$ , tais que

$$\textcircled{4} \quad F(x, y) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \varphi_1(x, y)(x - x_0) + \varphi_2(x, y)(y - y_0)$$

com

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \varphi_1(x, y) = 0 = \varphi_1(x_0, y_0) \text{ e } \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \varphi_2(x, y) = 0 = \varphi_2(x_0, y_0)$$

**Solução**

Pelo lema da Seç. 12.1,

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \varphi(x, y) \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$$

onde  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \varphi(x, y) = 0 = \varphi(x_0, y_0)$ .

Para  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) \|(x, y) - (x_0, y_0)\| &= \varphi(x, y) \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = \\ &= \varphi(x, y) \frac{x - x_0}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} (x - x_0) + \varphi(x, y) \frac{y - y_0}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} (y - y_0). \end{aligned}$$

Basta tomar

$$\varphi_1(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y) \frac{x - x_0}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} & \text{se } (x, y) \neq (x_0, y_0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

$$\varphi_2(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y) \frac{y - y_0}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} & \text{se } (x, y) \neq (x_0, y_0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

**EXEMPLO 9.** Prove que a função  $g$  do Exemplo 7 é diferenciável em  $x_0$  e que

$$g'(x_0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, g(x_0))}$$

**Solução**

Substituindo  $y = g(x)$  e  $y_0 = g(x_0)$  em ④ do Ex. 8 e lembrando que  $F(x, g(x)) = 0$  e  $F(x_0, g(x_0)) = 0$  resulta, após dividir por  $x - x_0$  ( $x \neq x_0$ ):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, g(x_0)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \varphi_1(x, g(x)) + \\ &+ \varphi_2(x, g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Pelo fato de  $g$  ser contínua em  $x_0$  e  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ , resulta:

$$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, g(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, g(x_0))}$$

**Teorema das funções implícitas** (Caso  $F(x, y) = 0$ ). Seja  $F(x, y)$  de classe  $C^1$  num aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  e seja  $(x_0, y_0) \in A$ , com  $F(x_0, y_0) = 0$ . Nesta condições, se  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ , então existirão intervalos abertos  $I$  e  $J$ , com  $x_0 \in I$  e  $y_0 \in J$ , tais que, para cada  $x \in I$ , existe um único  $g(x) \in J$ , com  $F(x, g(x)) = 0$ . A função  $g: I \rightarrow J$  é diferenciável e

$$g'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}$$

**Demonstração**

Veja Exemplos 7, 8 e 9. ■

**Observação.** Se a hipótese  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$  for substituída por  $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ , então existirão intervalos abertos  $I$  e  $J$ , com  $x_0 \in I$  e  $y_0 \in J$ , tais que, para cada  $y \in J$ , existirá um único  $h(y) \in I$ , com  $F(h(y), y) = 0$ . A função  $h: J \rightarrow I$  será diferenciável e

$$h'(y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(h(y), y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(h(y), y)}$$

**Teorema das funções implícitas** (Caso  $F(x, y, z) = 0$ ). Seja  $F(x, y, z)$  de classe  $C^1$  no aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^3$  e seja  $(x_0, y_0, z_0) \in A$ , com  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ . Nestas condições, se  $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , então existirão uma bola aberta  $B$  de centro  $(x_0, y_0)$  e um intervalo aberto  $J$ , com  $z_0 \in J$ , tais que, para cada  $(x, y) \in B$ , existe um único  $g(x, y) \in J$ , com  $F(x, y, g(x, y)) = 0$ . A função  $z = g(x, y)$ ,  $(x, y) \in B$ , é diferenciável e

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}$$

**Demonstração**

Deixamos a cargo do leitor adaptar a demonstração do teorema anterior a este caso. ■

**Observação.** Note que, pelo fato de  $F$  ser de classe  $C^1$  e  $g$  contínua, as funções  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))$  e  $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))$  serão contínuas em  $B$ ; logo,  $\frac{\partial g}{\partial x}$  e  $\frac{\partial g}{\partial y}$  serão, também, contínuas em  $B$ , isto é,  $g$  é de classe  $C^1$  em  $B$ .

**Teorema das funções implícitas** (Caso  $F(x, y, z) = 0$  e  $G(x, y, z) = 0$ ). Sejam  $F(x, y, z)$  e  $G(x, y, z)$  de classe  $C^1$  no aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^3$  e seja  $(x_0, y_0, z_0) \in A$ , com  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$  e  $G(x_0, y_0, z_0) = 0$ . Nestas condições, se  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \neq 0$  em  $(x_0, y_0, z_0)$ , então existirão um intervalo aberto  $I$ , com  $x_0 \in I$ , e um par de funções  $y = y(x)$  e  $z = z(x)$  definidas e de classe  $C^1$  em  $I$ , tais que, para todo  $x \in I$ ,  $F(x, y(x), z(x)) = 0$  e  $G(x, y(x), z(x)) = 0$ ; além disso,  $y_0 = y(x_0)$  e  $z_0 = z(x_0)$ . Tem-se, ainda:

$$\textcircled{1} \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx} = - \frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}}$$

sendo que os determinantes jacobianos devem ser calculados em  $(x, y(x), z(x))$ .

**Demonstração**

Como  $F$  e  $G$  são classe  $C^1$  em  $A$ , e

$$\textcircled{2} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

pelo teorema da conservação do sinal  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}$  permanece diferente de zero numa bola aberta de centro  $(x_0, y_0, z_0)$ . Podemos, então, supor que  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \neq 0$  em  $A$ . Segue de  $\textcircled{2}$  que  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  ou  $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ . Suponhamos  $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ . Pelo teorema anterior, a equação

$$F(x, y, z) = 0$$

define implicitamente uma função  $z = g(x, y)$ ,  $(x, y) \in B$ , sendo  $g$  de classe  $C^1$  na bola aberta  $B$  de centro  $(x_0, y_0)$  e  $z_0 = g(x_0, y_0)$ . Consideremos, agora, a função

$$H(x, y) = G(x, y, g(x, y)), \quad (x, y) \in B.$$

Temos:  $H(x, y)$  é de classe  $C^1$ ,  $H(x_0, y_0) = 0$  e  $\frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$  (verifique). Segue que a equação

$$H(x, y) = 0, \text{ ou seja, } G(x, y, g(x, y)) = 0$$

define implicitamente uma função  $y = y(x)$ ,  $x \in I$ , sendo  $y(x)$  de classe  $C^1$  no intervalo aberto  $I$  e  $y_0 = y(x_0)$  ( $x_0 \in I$ ). Deixamos para o leitor completar a demonstração. ■

No Vol. 3, voltaremos aos teoremas da função implícita e da função inversa.

Exercícios 12.2

1. A equação  $y^3 + xy + x^3 = 4$  define implicitamente alguma função diferenciável  $y = y(x)$ ?

Em caso afirmativo, expresse  $\frac{dy}{dx}$  em termos de  $x$  e  $y$ .

(Sugestão. Observe que  $(0, \sqrt[3]{4})$  satisfaz a equação e utilize o teorema das funções implícitas (caso  $F(x, y) = 0$ ).

2. Mostre que cada uma das equações seguintes define implicitamente pelo menos uma função diferenciável  $y = y(x)$ . Expresse  $\frac{dy}{dx}$  em termos de  $x$  e  $y$ .

a)  $x^2y + \sin y = x$

b)  $y^4 + x^2y^2 + x^4 = 3$

3. Mostre que cada uma das equações a seguir define implicitamente pelo menos uma função diferenciável  $z = z(x, y)$ . Expresse  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$  em termos de  $x, y$  e  $z$ .

a)  $e^{x+y+z} + xyz = 1$

b)  $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$

4. Suponha que  $y = y(x)$  seja diferenciável e dada implicitamente pela equação  $x = F(x^2 + y, y^2)$ , onde  $F(u, v)$  é suposta diferenciável. Expresse  $\frac{dy}{dx}$  em termos de  $x, y$  e das derivadas parciais de  $F$ .

5. Suponha que  $y = g(x)$  seja diferenciável no intervalo aberto  $I$  e dada implicitamente pela equação  $f(x, y) = 0$ , onde  $f(x, y)$  é suposta de classe  $C^2$ . Suponha, ainda,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$  em  $D_f$

a) Prove que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$  é uma condição necessária para que  $x_0$  seja ponto de máximo

local de  $g$ .  
b) Prove que  $g''$  é contínua em  $I$ .  
c) Prove que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$$

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3} < 0 \text{ em } (x_0, y_0)$$

é condição suficiente para que  $x_0$  seja ponto de máximo local de  $g$ .

6. A função diferenciável  $z = z(x, y)$  é dada implicitamente pela equação  $f\left(\frac{x}{y}, z\right) = 0$ , onde

$f(u, v)$  é suposta diferenciável e  $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \neq 0$ . Verifique que

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

7. A função diferenciável  $z = z(x, y)$  é dada implicitamente pela equação  $f\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{x^\lambda}\right) = 0$  ( $\lambda \neq$

0 um real fixo), onde  $f(u, v)$  é suposta diferenciável e  $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \neq 0$ . Verifique que

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \lambda z.$$

8. Suponha que as funções diferenciáveis  $y = y(x)$  e  $z = z(x)$  sejam dadas implicitamente pelo sistema

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

a) Expresse  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{dz}{dx}$  em termos de  $x, y$  e  $z$ .

b) Determine um par de funções  $y = y(x)$  e  $z = z(x)$  dadas implicitamente por  $\textcircled{1}$ .

9. Suponha que  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$  sejam dadas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (x \neq 0).$$

Mostre que  $\frac{\partial x}{\partial u} \left(1 + \frac{y}{x}\right) = 1$ .

10. Sejam  $u = x + y$  e  $v = \frac{y}{x}$ . Calcule o determinante jacobiano  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ .

11. Calcule:

a)  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$  sendo  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  e  $G(x, y, z) = x + y + z$ .

b)  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)}$  sendo  $u = xyz$  e  $v = x^3 + y^2$ .

c)  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, s)}$  sendo  $x = r + 3s + t^2$  e  $y = r^2 - s^2 - 3t^2$ .

d)  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}$  sendo  $x = r + 3s + t^2$  e  $y = r^2 - s^2 - 3t^2$ .

12. Seja  $g(u, v) = f(x, y)$ , onde  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$  são dadas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{cases}$$

Suponha  $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ .

a) Mostre que  $\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{y}{x} \frac{\partial x}{\partial u}$ .

b) Calcule  $\frac{\partial g}{\partial u}$ .

c) Mostre que  $f$  é constante sobre as hipérbolas  $xy = c$ .

13. Sejam  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$  dadas implicitamente pelo sistema

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{cases}$$

a) Expresse  $\frac{\partial x}{\partial u}$  e  $\frac{\partial y}{\partial u}$  em termos de  $x$  e  $y$ .

b) Determine um par de funções  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$  definidas implicitamente por  $\textcircled{1}$ .

14. Sejam  $x = x(y, z)$ ,  $y = y(x, z)$  e  $z = z(x, y)$  definidas implicitamente pela equação  $F(x, y, z) = 0$ . Suponha  $x_0 = x(y_0, z_0)$ ,  $y_0 = y(x_0, z_0)$ ,  $z_0 = z(x_0, y_0)$  e que no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  as derivadas parciais de  $F$  sejam diferentes de zero. Mostre que

$$\frac{\partial x}{\partial y} \Big|_{z=z_0, y=y_0} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \Big|_{x=x_0, z=z_0} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0} = -1.$$

15. Sejam  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$  definidas implicitamente pelo sistema

$$\begin{cases} x^2 + uy^2 = v \\ x + y^2 = u. \end{cases}$$

a) Expresse  $\frac{\partial x}{\partial u}$  em termos de  $x, y$  e  $u$ .

b) Determine um par de funções  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$  definidas implicitamente pelo sistema.

## 13

GRADIENTE E DERIVADA  
DIRECIONAL13.1. GRADIENTE DE UMA FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS:  
INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

O gradiente de uma função  $f(x, y)$  foi introduzido na Seç. 11.5; nosso objetivo aqui é interpretá-lo geometricamente. Antes vamos recordar a regra da cadeia: se  $f(x, y)$  for diferenciável no aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t)$  diferenciável no intervalo aberto  $I$ , onde  $\gamma(t) \in A$  para todo  $t \in I$ , então,  $h(t) = f(\gamma(t))$  será diferenciável e

$$h'(t) = \frac{d}{dt} [f(\gamma(t))] = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Seja  $f(x, y)$  de classe  $C^1$  num aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$  e seja  $(x_0, y_0)$  um ponto da curva de nível  $f(x, y) = c$ ; suponhamos  $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ . Vamos mostrar a seguir que  $\nabla f(x_0, y_0)$  é perpendicular em  $(x_0, y_0)$  a toda curva  $\gamma$ , diferenciável, passando por  $(x_0, y_0)$  e cuja imagem esteja contida na curva de nível  $f(x, y) = c$  (nas condições acima, pelo teorema das funções implícitas, uma tal curva existe). Seja, então,  $\gamma(t)$ ,  $t \in I$ , uma tal curva, com  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ ; como estamos admitindo que a imagem de  $\gamma$  está contida na curva de nível  $f(x, y) = c$ , teremos

$$\textcircled{1} \quad f(\gamma(t)) = c$$

para todo  $t$  no domínio de  $\gamma$ . Derivando os dois membros de  $\textcircled{1}$  em relação a  $t$ , obtemos

$$\frac{d}{dt} [f(\gamma(t))] = \frac{d}{dt} (c)$$

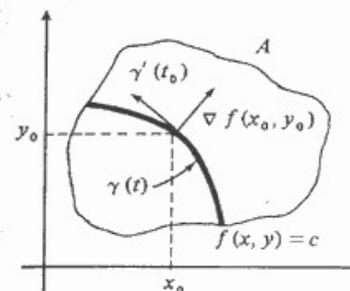
ou

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0, t \in I.$$

portanto,

$$\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0$$

ou seja,  $\nabla f(x_0, y_0)$  é perpendicular a  $\gamma$ , em  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ .



Dizemos, então, que  $\nabla f(x_0, y_0)$  é um vetor normal à curva de nível  $f(x, y) = c$ , em  $(x_0, y_0)$ . A reta passando por  $(x_0, y_0)$  e perpendicular a  $\nabla f(x_0, y_0)$  denomina-se *reta tangente*, em  $(x_0, y_0)$ , à curva de nível  $f(x, y) = c$ . A equação de tal reta é:

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)] = 0.$$

**EXEMPLO 1.** A curva  $\gamma(t)$  passa pelo ponto  $(1, 2)$  e é tal que  $f(\gamma(t)) = 6$  para todo  $t$  no domínio de  $\gamma$ , onde  $f(x, y) = x^3y^3 - xy$  (observe que a imagem de  $\gamma$  está contida na curva de nível  $f(x, y) = 6$ ). Suponha  $\gamma(t_0) = (1, 2)$  e  $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$ . Determine a equação da reta tangente a  $\gamma$  no ponto  $(1, 2)$ .

*Solução*

$$\nabla f(1, 2) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) \right) = (22, 11).$$

A reta tangente a  $\gamma$  em  $\gamma(t_0) = (1, 2)$  coincide com a reta tangente à curva de nível  $f(x, y) = 6$  em  $(1, 2)$ . Assim, a equação da reta tangente a  $\gamma$  em  $(1, 2)$  é:

$$\nabla f(1, 2) \cdot [(x, y) - (1, 2)] = 0$$

ou

$$22(x - 1) + 11(y - 2) = 0$$

ou

$$y = -2x + 4.$$

Vejam como fica, em notação vetorial, a equação desta reta. O vetor  $(-11, 22)$  é perpendicular a  $\nabla f(1, 2) = (22, 11)$ ; logo,  $(-11, 22)$  é paralelo a  $\gamma'(t_0)$ ; assim, a equação da reta tangente acima pode, também, ser dada na forma

$$(x, y) = (1, 2) + \lambda(-11, 22), \lambda \in \mathbb{R}.$$

**EXEMPLO 2.** Considere a equação a derivadas parciais

$$\textcircled{2} \quad 2 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

a) Com argumentos geométricos, obtenha solução de  $\textcircled{2}$ .

b) Suponha  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável; prove que se  $f$  satisfaz  $\textcircled{2}$ , então existe  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável tal que  $f(x, y) = \varphi(2y - x)$ .

*Solução*

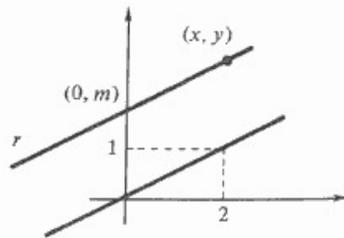
a) Sendo  $f(x, y)$  solução de  $\textcircled{2}$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

ou

$$(2, 1) \cdot \nabla f(x, y) = 0.$$

Como para todo  $(x, y)$ ,  $\nabla f(x, y)$  é perpendicular ao vetor  $(2, 1)$  e como  $\nabla f(x, y)$  é perpendicular, em  $(x, y)$ , à curva de nível de  $f$  que passa por este ponto, é razoável esperar que as curvas de nível de  $f$  sejam retas paralelas ao vetor  $(2, 1)$ ; assim  $f$  deve ser constante sobre cada reta paralela ao vetor  $(2, 1)$ .



Sendo  $f(x, y)$  constante sobre a reta  $r$

$$f(x, y) = f(0, m), \text{ onde}$$

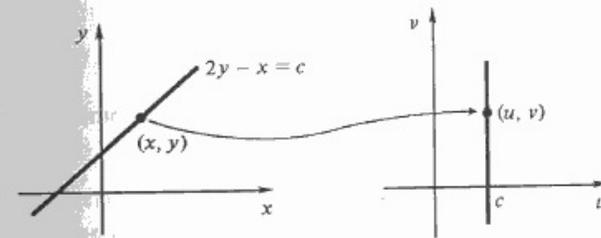
$\frac{-m}{x-0} = \frac{1}{2}$ , ou,  $m = \frac{2y-x}{2}$ . Assim,  $f(x, y) = f\left(0, \frac{2y-x}{2}\right)$ ; tomando-se  $\varphi(u) =$

$f\left(0, \frac{u}{2}\right)$ , resulta  $f(x, y) = \varphi(2y - x)$ , onde  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função derivável. Verifique você que, para toda  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável,  $f(x, y) = \varphi(2y - x)$  é solução de  $\textcircled{2}$ . Assim, as funções  $\sin(2y - x)$ ,  $e^{2y-x}$ ,  $\frac{(2y-x)^2 + e^{2y-x}}{(2y-x)^4 + 1}$  etc. são soluções de  $\textcircled{2}$ .

**Observação.** Consideremos a mudança de variável

$$\begin{cases} u = 2y - x \\ v = y \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 2v - u \\ y = v \end{cases}$$

Note que quando  $(x, y)$  percorre a reta  $2y - x = c$  o correspondente ponto  $(u, v)$  percorrerá a reta vertical  $u = c$ .



Seja  $g(u, v) = f(x, y)$ , com  $x = 2v - u$  e  $y = v$ . Vimos, geometricamente, que  $f$  deve ser constante sobre as retas  $2y - x = c$ ; é de se esperar, então, que  $g$  seja constante sobre as retas  $u = c$ , ou seja, que  $g$  não dependa de  $v$ . Vamos, agora, resolver a parte b).

b) Seja  $f(x, y)$  diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ ; supondo  $f$  solução de  $\textcircled{2}$  teremos

$$2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

Seja  $g(u, v) = f(x, y)$  com  $x = 2v - u$  e  $y = v$  (veja observação anterior). Temos:

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 2 \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}_0$$

Assim, para todo  $(u, v)$  em  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 0$$

o que mostra que  $g$  não depende de  $v$ , isto é,

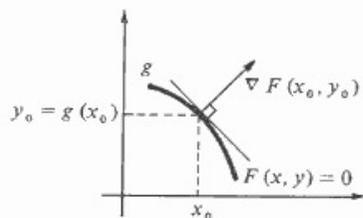
$$g(u, v) = \varphi(u),$$

para alguma função  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável. Portanto,  $f(x, y) = \varphi(2y - x)$ , onde  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável.

Vejamos, agora, como utilizar o gradiente de uma função de duas variáveis na obtenção da reta tangente e da reta normal ao gráfico de uma função  $y = g(x)$  de uma variável. Para isto, consideremos a função de duas variáveis  $F(x, y) = g(x) - y$ ; evidentemente, o gráfico de  $g$  coincide com a curva de nível  $F(x, y) = 0$ . Seja  $(x_0, y_0)$ , com  $y_0 = g(x_0)$ , um ponto do gráfico de  $g$ .

Segue que  $\nabla F(x_0, y_0)$  é normal ao gráfico de  $g$  em  $(x_0, y_0)$ . Como

$$\nabla F(x, y) = (g'(x), -1)$$



resulta,  $\nabla F(x_0, y_0) = (g'(x_0), -1)$ . A equação da reta tangente ao gráfico de  $g$ , no ponto de abscissa  $x_0$ , é, então

$$(g'(x_0), -1) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)] = 0$$

ou

$$g'(x_0)(x - x_0) - (y - y_0) = 0$$

ou, ainda,  $y - y_0 = g'(x_0)(x - x_0)$ .

Por outro lado, a equação da reta normal ao gráfico de  $g$  no ponto de abscissa  $x_0$  é:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda (g'(x_0), -1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Suponhamos, agora, que a função diferenciável  $y = g(x)$  seja dada implicitamente pela equação  $F(x, y) = 0$ , onde  $F$  é suposta diferenciável e  $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$ , com  $y_0 = g(x_0)$  (observe que a situação anterior é um caso particular desta). Segue que, para todo  $\lambda$  no domínio de  $g$ ,  $F(x, g(x)) = 0$ , isto é, a imagem da curva  $\gamma(x) = (x, g(x))$  está contida na curva

de nível  $F(x, y) = 0$ . Assim,  $\nabla F(x_0, y_0)$  é normal ao gráfico de  $g$  no ponto  $(x_0, y_0)$ . Podemos, também, ter chegado a este resultado, no caso  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$  e  $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ , observando que

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}$$

é o coeficiente angular da direção determinada pelo vetor  $\nabla F(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \vec{i} +$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \vec{j}$  e que

$$g'(x_0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

(fórmula de derivação implícita) é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $g$  no ponto  $(x_0, y_0)$ .

**EXEMPLO 3.**  $y = f(x)$  é uma função diferenciável definida implicitamente pela equação  $y^3 + xy + x^3 = 3x$ . Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de  $f$  no ponto  $(1, 1)$ .

*Solução*

$$y^3 + xy + x^3 = 3x \Leftrightarrow \underbrace{y^3 + xy + x^3 - 3x}_F(x, y) = 0$$

$\nabla F(1, 1)$  é perpendicular ao gráfico de  $f$  no ponto  $(1, 1)$ . Temos:

$$\nabla F(1, 1) = (1, 4), \text{ pois, } \nabla F(x, y) = (y + 3x^2 - 3, 3y^2 + x)$$

*Reta tangente:*

$$\nabla F(1, 1) \cdot [(x, y) - (1, 1)] = 0$$

ou seja,

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

*Reta normal:*

$$y - 1 = 4(x - 1) \text{ ou } y = 4x - 3.$$

Ou, em forma vetorial:

$$(x, y) = (1, 1) + \lambda (1, 4), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercícios 13.1

1. É dada uma curva  $\gamma$  que passa pelo ponto  $\gamma(t_0) = (1, 3)$  e cuja imagem está contida na curva de nível  $x^2 + y^2 = 10$ . Suponha  $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$ .

- a) Determine a equação da reta tangente a  $\gamma$  no ponto  $(1, 3)$ .
- b) Determine uma curva  $\gamma(t)$  satisfazendo as condições acima.

2. Determine a equação da reta tangente à curva  $\gamma$  no ponto  $\gamma(t_0) = (2, 5)$  sabendo-se que  $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$  e que a sua imagem está contida na curva de nível  $xy = 10$ . Qual a equação da reta normal a  $\gamma$ , neste ponto?

3. Determine a equação da reta tangente à curva de nível dada, no ponto dado.

- a)  $x^2 + xy + y^2 - 3y = 1$  em  $(1, 2)$ .
- b)  $e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$  em  $(\frac{1}{2}, 1)$ .

- 4. Determine uma reta que seja tangente à elipse  $2x^2 + y^2 = 3$  e paralela à reta  $2x + y = 5$ .
- 5. Determine uma reta que seja tangente à curva  $x^2 + xy + y^2 = 7$  e paralela à reta  $4x + 5y = 17$ .
- 6. Utilizando argumentos geométricos, determine soluções da equação a derivadas parciais dada.

a)  $3 \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\partial f}{\partial y}$                       b)  $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

c)  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$                       d)  $y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

7. Determine uma função  $z = f(x, y)$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$  e cujo gráfico passe pelos pontos  $(1, 1, 1)$ ,  $(0, 0, 1)$  e  $(0, 1, 2)$ .

8. Determine uma função  $z = f(x, y)$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \frac{\partial f}{\partial y}$  e cujo gráfico contenha a imagem da curva  $\gamma(t) = (t, t, t^2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

9. Determine uma curva  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  que passe pelo ponto  $\gamma(0) = (1, 2)$  e que intercepte ortogonalmente as curvas da família  $x^2 + 2y^2 = c$ .

10. Determine uma função  $y = y(x)$  cujo gráfico intercepte ortogonalmente as curvas da família  $xy = c$ , com  $x > 0$  e  $y > 0$ , e tal que

- a)  $y(1) = 1$                                       b)  $y(1) = 2$

11. Seja  $z = f(x, y)$  diferenciável em  $\mathbb{R}^2$  e tal que  $\nabla f(x, y) = g(x, y) (x, y)$ , para todo  $(x, y)$  em  $\mathbb{R}^2$ , onde  $g(x, y)$  é uma função de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}$  dada.

a) Com argumentos geométricos, verifique que é razoável esperar que  $f$  seja constante sobre cada circunferência de centro na origem.

b) Prove que  $f$  é constante sobre cada circunferência de centro na origem.

(Sugestão:  $g(t) = f(R \cos t, R \sin t)$  fornece os valores de  $f$  sobre a circunferência  $x^2 + y^2 = R^2$ .)

12. Seja  $y = g(x)$  definida e derivável no intervalo aberto  $I$ , dada implicitamente pela equação

$$f(x, y) = 0, \text{ onde } f(x, y) \text{ é suposta diferenciável no aberto } A \subset \mathbb{R}^2. \text{ Suponha } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \neq 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0 \text{ em } A.$$

a) Com argumentos geométricos, mostre que é razoável esperar que  $g$  seja estritamente decrescente em  $I$ .

b) Prove que  $g$  é estritamente decrescente em  $I$ .

### 13.2. GRADIENTE DE FUNÇÃO DE TRÊS VARIÁVEIS: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

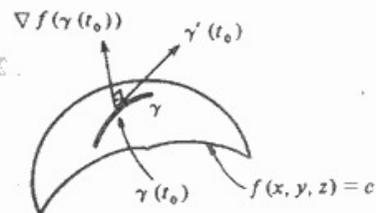
Seja  $f(x, y, z)$  de classe  $C^1$  num aberto  $A \subset \mathbb{R}^3$  e seja  $(x_0, y_0, z_0)$  um ponto da superfície de nível  $f(x, y, z) = c$ ; suponhamos  $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$ . Vamos mostrar que  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  é normal em  $(x_0, y_0, z_0)$  a toda curva  $\gamma$ , diferenciável, passando por este ponto e cuja imagem esteja contida na superfície de nível  $f(x, y, z) = c$ . Seja, então,  $\gamma(t)$ ,  $t \in I$ , uma tal curva, com  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ ; como estamos supondo que a imagem de  $\gamma$  está contida na superfície de nível  $f(x, y, z) = c$ , teremos

$$\textcircled{1} \quad f(\gamma(t)) = c$$

para todo  $t$  no domínio de  $\gamma$ . Derivando, em relação a  $t$ , ambos os membros da equação  $\textcircled{1}$  obtemos, para todo  $t \in I$ ,

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$$

e, portanto,  $\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0$ , o que mostra que  $\nabla f(\gamma(t_0))$  e  $\gamma'(t_0)$  são ortogonais.



Fica provado assim que  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  é normal em  $(x_0, y_0, z_0)$  a toda curva diferenciável  $\gamma$  passando por este ponto e com imagem contida na superfície  $f(x, y, z) = c$ . Diremos, então,

que  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  é normal à superfície de nível  $f(x, y, z) = c$ , no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$ . O plano passando pelo ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  e perpendicular a  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  denomina-se plano tangente em  $(x_0, y_0, z_0)$ , à superfície  $f(x, y, z) = c$ . A equação deste plano é:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0.$$

A reta

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \nabla f(x_0, y_0, z_0), \lambda \in \mathbb{R}$$

denomina-se *reta normal*, em  $(x_0, y_0, z_0)$ , à superfície  $f(x, y, z) = c$ .

Seja  $z = g(x, y)$  uma função diferenciável dada implicitamente pela equação  $F(x, y, z) = 0$  onde  $F(x, y, z)$  é suposta de classe  $C^1$  num aberto de  $\mathbb{R}^3$ ; seja  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $z_0 = g(x_0, y_0)$ , um ponto do gráfico de  $g$ , com  $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$ . Como o gráfico de  $g$  está contido na superfície  $F(x, y, z) = 0$ , resulta que toda curva  $\gamma$  com imagem contida no gráfico de  $g$  tem, também, sua imagem contida na superfície  $F(x, y, z) = 0$ ; assim,  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$  é normal ao gráfico de  $g$ , em  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Observe que se  $\gamma(t)$  é uma curva diferenciável com imagem contida na intersecção das superfícies  $F(x, y, z) = 0$  e  $G(x, y, z) = 0$ , onde  $F$  e  $G$  são supostos de classe  $C^1$  num aberto de  $\mathbb{R}^3$  e  $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \wedge \nabla G(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$ , então o vetor  $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$ , tangente a  $\gamma$  em  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ , é paralelo a  $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \wedge \nabla G(x_0, y_0, z_0)$  (verifique).

**EXEMPLO 1.** Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície  $xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 3z$  no ponto  $(1, -1, 2)$ .

*Solução*

$$xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 3z \Leftrightarrow \underbrace{xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 3z}_F(x, y, z) = 0.$$

$$\nabla F(x, y, z) = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = (yz + 3x^2, xz + 3y^2, xy + 3z^2 - 3).$$

$$\nabla F(1, -1, 2) = (1, 5, 8).$$

Plano tangente em  $(1, -1, 2)$ :

$$\nabla F(1, -1, 2) \cdot [(x, y, z) - (1, -1, 2)] = 0$$

ou

$$(1, 5, 8) \cdot [(x, y, z) - (1, -1, 2)] = 0$$

ou seja,

$$(x-1) + 5(y+1) + 8(z-2) = 0$$

$$x + 5y + 8z = 12.$$

ou ainda,

é normal em  $(1, -1, 2)$ :

$$(x, y, z) = (1, -1, 2) + \lambda(1, 5, 8), \lambda \in \mathbb{R}.$$

**EXEMPLO 2.** Considere a função  $z = f(x, y)$  dada por  $f(x, y) = \sqrt{8 - 3x^2 - y^2}$ . Determine a equação do plano tangente no ponto  $(1, 1, f(1, 1))$ .

*Solução*

1.º processo

$$z - f(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y-1)$$

$$f(1, 1) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-6x}{2\sqrt{8-3x^2-y^2}}; \text{ logo, } \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{-3}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{2\sqrt{8-3x^2-y^2}}; \text{ logo, } \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -\frac{1}{2}$$

$$z - 2 = -\frac{3}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1)$$

é a equação do plano tangente em  $(1, 1, f(1, 1))$ .

2.º processo

$$z = \sqrt{8 - 3x^2 - y^2} \Rightarrow z^2 = 8 - 3x^2 - y^2$$

A função é então definida implicitamente pela equação

$$\underbrace{3x^2 + y^2 + z^2 - 8}_F(x, y, z) = 0$$

$\nabla F(1, 1, 2)$  é, então, normal ao gráfico de  $f$  no ponto  $(1, 1, f(1, 1))$ .

$$\nabla F(x, y, z) = (6x, 2y, 2z) \Rightarrow \nabla F(1, 1, 2) = (6, 2, 4).$$

A equação do plano tangente em  $(1, 1, 2)$  é:

$$(6, 2, 4) \cdot [(x, y, z) - (1, 1, 2)] = 0$$

ou

$$6(x-1) + 2(y-1) + 4(z-2) = 0,$$

ou, ainda,

$$z-2 = -\frac{3}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1).$$

**EXEMPLO 3.** A imagem da curva  $\gamma(t)$  está contida na intersecção das superfícies  $x^2 + 2y^2 + z = 4$  e  $x^2 + y + z = 3$ . Suponha  $\gamma(t_0) = (1, 1, 1)$  e  $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$ .

- a) Determine a reta tangente a  $\gamma$  no ponto  $\gamma(t_0)$ .  
b) Determine uma curva  $\gamma(t)$  nas condições acima.

*Solução*

- a) Sejam  $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z$  e  $G(x, y, z) = x^2 + y + z$ .  
Para todo  $t$  no domínio de  $\gamma$  devemos ter

$$F(\gamma(t)) = 4 \quad \text{e} \quad G(\gamma(t)) = 3,$$

pois a imagem de  $\gamma$  está contida nas superfícies de nível  $F(x, y, z) = 4$  e  $G(x, y, z) = 3$ . Segue que

$$\nabla F(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla G(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0,$$

ou seja,  $\gamma'(t_0)$  é normal aos vetores  $\nabla F(1, 1, 1)$  e  $\nabla G(1, 1, 1)$ ; logo,  $\gamma'(t_0)$  é paralelo ao produto vetorial  $\nabla F(1, 1, 1) \wedge \nabla G(1, 1, 1)$ . Temos:

$$\nabla F(1, 1, 1) \wedge \nabla G(1, 1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 6\vec{k}.$$

A equação da reta tangente a  $\gamma$  no ponto  $\gamma(t_0) = (1, 1, 1)$  é:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(3, 0, -6), \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$b) \begin{cases} x^2 + 2y^2 + z = 4 \\ x^2 + y + z = 3 \end{cases}$$

$x^2 + y + z = 3 \Rightarrow z = 3 - x^2 - y$ . Substituindo na 1.ª equação vem:

$$x^2 + 2y^2 + 3 - x^2 - y = 4$$

e, portanto,  $2y^2 - y - 1 = 0$ , ou seja,  $y = 1$  ou  $y = -\frac{1}{2}$ ; isto é,  $y$  não depende de  $x$ . Como a curva deve passar pelo ponto  $(1, 1, 1)$ , vamos tornar  $y = 1$ . Segue que  $z = 3 - x^2 - 1$ , ou

$z = 2 - x^2$ . A imagem da curva  $\gamma(t) = (t, 1, 2 - t^2)$  está contida na intersecção das superfícies e passa pelo ponto  $(1, 1, 1)$ . Sugerimos ao leitor desenhar a imagem de  $\gamma$ .

### Exercícios 13.2

1. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície dada, no ponto dado.

a)  $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$  em  $(1, -1, 1)$

b)  $2xyz = 3$  em  $\left(\frac{1}{2}, 1, 3\right)$

c)  $ze^{x-y} + z^3 = 2$  em  $(2, 2, 1)$

2. A função diferenciável  $z = f(x, y)$  é dada implicitamente pela equação  $x^3 + y^3 + z^3 = 10$ . Determine a equação do plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(1, 1, f(1, 1))$ .

3. Determine um plano que seja tangente à superfície  $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = \frac{11}{6}$  e paralelo ao plano  $x + y + z = 10$ .

4. É dada uma função diferenciável  $z = f(x, y)$  cujo gráfico está contido na superfície  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Sabe-se que  $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Determine a equação do plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

5. A imagem da curva  $\gamma(t)$  está contida na intersecção das superfícies  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$  e  $x^2 + 3y^2 - z^2 = 3$ . Suponha  $\gamma(t_0) = (1, 1, 1)$  e  $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$ . Determine a reta tangente a  $\gamma$  em  $\gamma(t_0)$ .

6. A imagem da curva  $\gamma(t)$  está contida na intersecção da superfície cilíndrica  $x^2 + y^2 = 2$  com a superfície esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ . Suponha  $\gamma(t_0) = (1, 1, 1)$  e  $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$ .

a) Determine a reta tangente a  $\gamma$  em  $\gamma(t_0)$ .

b) Determine uma curva  $\gamma(t)$  satisfazendo as condições acima.

7. É dada uma curva  $\gamma(t)$  cuja imagem é a intersecção das superfícies  $4x^2 + y^2 = 1$  e  $x + y + z = 1$ . Suponha  $\gamma(t_0) = (0, 1, 0)$  e  $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$ .

a) Determine a reta tangente a  $\gamma$  em  $\gamma(t_0)$ .

b) Determine uma parametrização para a intersecção acima.

8. Considere a função  $z = \frac{\sqrt{8 + x^2 + y^2}}{y}$ .

a) Determine uma função  $F(x, y, z)$ , que não envolva radicais, tal que a função dada seja definida implicitamente pela equação  $F(x, y, z) = 0$ .

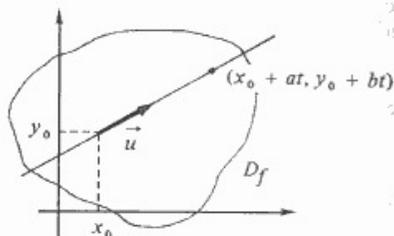
b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico da função dada no ponto  $(2, 2, 1)$ .

9. Determine a equação do plano normal, em  $(1, 2, 3)$ , à intersecção das superfícies  $x^2 + y^2 + z^2 = 14$  e  $xyz = 6$ .

10. Determine um plano que passe pelos pontos (5, 0, 1) e (1, 0, 3) e que seja tangente à superfície  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 7$ .

### 13.3. DERIVADA DIRECIONAL

Sejam  $z = f(x, y)$  uma função,  $(x_0, y_0)$  um ponto de  $D_f$  e  $\vec{u} = (a, b)$  um vetor unitário. Suponhamos que exista  $r > 0$  tal que para  $|t| < r$  os pontos da reta  $(x, y) = (x_0 + at, y_0 + bt)$  pertençam ao domínio de  $f$ . Como estamos supondo  $\vec{u} = (a, b)$  unitário, a distância de  $(x_0 + at, y_0 + bt)$  a  $(x_0, y_0)$  é  $|t|$  (verifique).



Pois bem, definimos a taxa média de variação de  $f$ , na direção  $\vec{u} = (a, b)$ , entre os pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0 + at, y_0 + bt)$  por

$$\textcircled{1} \quad \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Vamos destacar, a seguir, o limite de  $\textcircled{1}$  para  $t \rightarrow 0$ .

**Definição.** O limite

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}$$

quando existe e é finito, denomina-se *derivada direcional de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$  e na direção do vetor  $\vec{u} = (a, b)$ , com  $\vec{u}$  unitário.*

A derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$  denomina-se, também, *taxa de variação de  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$  e na direção do vetor  $\vec{u}$* . Observe:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) \equiv \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}$$

quanto a aproximação tanto melhor quanto menor for  $|t|$ . As derivadas parciais de  $f$ , em  $(x_0, y_0)$ , são particulares derivadas direcionais. De fato:

$$\frac{\partial f}{\partial i}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial j}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

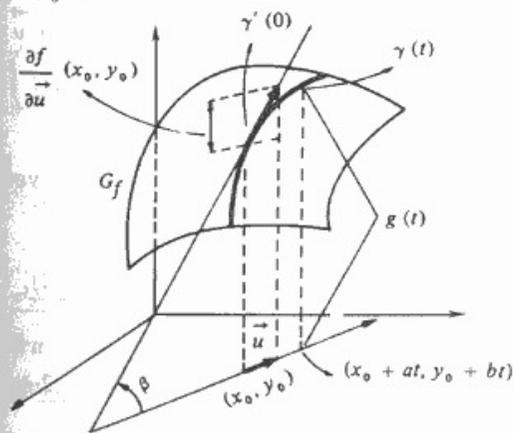
Deste modo,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  são, respectivamente, as derivadas direcionais de  $f$ ,

no ponto  $(x_0, y_0)$ , e nas direções dos vetores  $\vec{i} = (1, 0)$  e  $\vec{j} = (0, 1)$ .

A seguir, vamos interpretar geometricamente  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ . Para isto, consideremos a curva  $\gamma(t)$  dada por

$$\gamma: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = g(t) \end{cases}$$

onde  $g(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt)$ .



Observe que a imagem de  $\gamma$  está contida no gráfico de  $f$ . Temos:

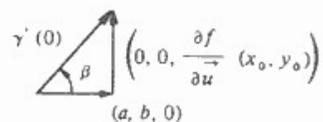
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0).$$

ou seja,

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0).$$

Segue que  $\gamma'(0) = (a, b, g'(0)) = \left( a, b, \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) \right)$ . Então,

$$\gamma'(0) = (a, b, 0) + \left( 0, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) \right).$$



Como  $(a, b)$  é unitário,  $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta$  (veja figura anterior).

**EXEMPLO 1.** Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Calcule  $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1)$  onde  $\vec{u}$  é o versor de

a)  $\vec{v} = (-1, 1)$

b)  $\vec{v} = (1, 2)$

c)  $\vec{v} = (1, 1)$

*Solução*

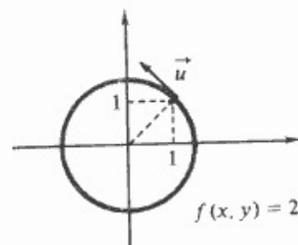
Inicialmente, vamos calcular  $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1)$  onde  $\vec{u} = (a, b)$  é um vetor unitário qualquer.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(1, 1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+at, 1+bt) - f(1, 1)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+at)^2 + (1+bt)^2 - 2}{t} = 2a + 2b. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1) = 2a + 2b.$$

a)  $\vec{u} = \frac{(-1, 1)}{\|(-1, 1)\|} = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ ;  $\vec{u}$  é tangente em  $(1, 1)$  à curva de nível  $f(x, y) = 2$  ou seja,  $x^2 + y^2 = 2$  (verifique).



Portanto, é razoável esperar que, nesta direção  $t$ , a taxa de variação de  $f$ , em  $(1, 1)$ , seja nula. (Por quê?) De fato

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1) = 2 \cdot \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0.$$

b)  $\vec{u} = \frac{(1, 2)}{\|(1, 2)\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = (a, b)$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1) = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

c)  $\vec{u} = \frac{(1, 1)}{\|(1, 1)\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ ; observe que  $\vec{u}$  é o versor do vetor gradiente  $\nabla f(1, 1) = (2, 2)$ . Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1) = 2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

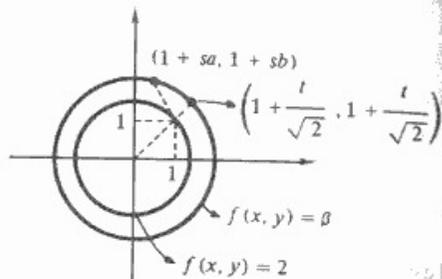
Note que o valor de  $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1)$  para  $\vec{u} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$  é maior que para  $\vec{u} = \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$ .

Provaremos, na próxima seção que, sendo  $f$  diferenciável,  $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$  assumirá valor máximo para  $\vec{u}$  igual ao versor do vetor gradiente  $\nabla f(x_0, y_0)$ .

**EXEMPLO 2.** São dados uma função  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , um vetor unitário  $(a, b)$  e um real  $\beta > 2$ . Suponha que  $(1 + sa, 1 + sb)$  e  $\left( 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$ , com  $s > 0$  e  $t > 0$ , pertençam

à curva de nível  $f(x, y) = \beta$ . Compare a taxa média de variação de  $f$  entre os pontos  $(1, 1)$  e  $(1 + sa, 1 + sb)$  e entre os pontos  $(1, 1)$  e  $(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}})$ .

Solução



Se  $(a, b)$  unitário, a distância de  $(1 + sa, 1 + sb)$  a  $(1, 1)$  é  $s$ ; a distância de  $(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}})$  a  $(1, 1)$  é  $t$ . Se  $(a, b) \neq (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ , teremos  $t < s$ . Como  $f(1 + sa, 1 + sb) = f(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}})$  resulta, para  $(a, b) \neq (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$\frac{f(1 + sa, 1 + sb) - f(1, 1)}{s} < \frac{f(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}) - f(1, 1)}{t}$$

É razoável, portanto, esperar que  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$  assumira valor máximo para  $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

**EXEMPLO 3.** Seja  $\vec{u} = (a, b)$  um vetor unitário dado. Calcule  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$  onde

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Solução

$$\frac{f(0 + at, 0 + bt) - f(0, 0)}{t} = \frac{a^3 t^3}{(at)^2 + (bt)^2} = \frac{a^3}{\frac{a^2 + b^2}{t}} = a^3, t \neq 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + at, 0 + bt) - f(0, 0)}{t} = a^3$$

ou seja, para todo vetor unitário  $(a, b)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = a^3.$$

Já vimos que  $f$  é contínua em  $(0, 0)$ , mas não diferenciável em  $(0, 0)$ . Este exemplo mostra-nos que uma função pode ser contínua num ponto, ter derivada direcional em todas as direções neste ponto, e mesmo assim não ser diferenciável neste ponto.

### 13.4. DERIVADA DIRECIONAL E GRADIENTE

O objetivo desta seção é destacar mais algumas propriedades do vetor gradiente. Inicialmente, vamos provar que se  $f$  for diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , então  $f$  admitirá derivada direcional em todas as direções, no ponto  $(x_0, y_0)$ , e cada derivada direcional se exprime de modo bastante simples em termos do gradiente de  $f$  em  $(x_0, y_0)$ .

**Teorema 1.** Sejam  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto,  $(x_0, y_0) \in A$  e  $\vec{u} = (a, b)$  um vetor unitário. Se  $f(x, y)$  for diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , então  $f$  admitirá derivada direcional em  $(x_0, y_0)$ , na direção  $\vec{u}$ , e

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}.$$

*Demonstração*

Seja  $g$  dada por  $g(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt)$ ; da diferenciabilidade de  $f$  em  $(x_0, y_0)$  segue a diferenciabilidade de  $g$  em  $t = 0$  e, pela regra da cadeia,

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) b = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (a, b)$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = g'(0)$$

resulta,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}. \quad \blacksquare$$

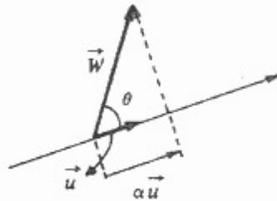
O teorema acima conta-nos que se  $f(x, y)$  for diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , então

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}.$$

Entretanto, se  $f$  não for diferenciável em  $(x_0, y_0)$  esta relação não tem nenhuma obrigação de se verificar. (Veja Exerc. 21.)

De agora em diante, quando nada for dito sobre uma função  $f(x, y)$  ficará implícito que se trata de uma função definida num aberto e diferenciável.

Vimos na Seç. 6.4 que se  $\vec{w}$  e  $\vec{u}$  são vetores não-nulos e  $\theta$  o ângulo entre eles, então  $\vec{w} \cdot \vec{u} = \|\vec{w}\| \|\vec{u}\| \cos \theta$ ; se  $\vec{u}$  for unitário,  $\vec{w} \cdot \vec{u} = \|\vec{w}\| \cos \theta$ . Na figura a seguir,  $\alpha \vec{u}$  é a projeção de  $\vec{w}$  na direção  $\vec{u}$ , onde  $\alpha = \|\vec{w}\| \cos \theta$ . Diremos que o número  $\alpha = \|\vec{w}\| \cos \theta$  é a componente escalar de  $\vec{w}$  na direção  $\vec{u}$ .

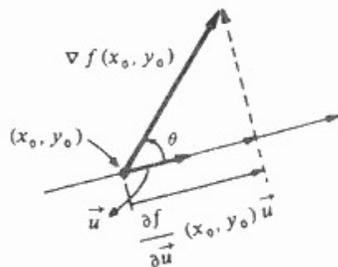


Veremos a seguir que  $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$  é a componente escalar de  $\nabla f(x_0, y_0)$  na direção  $\vec{u}$ .

Suponhamos  $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$  e  $\vec{u}$  unitário. Seja  $\theta$  o ângulo entre  $\nabla f(x_0, y_0)$  e  $\vec{u}$ . Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cdot \|\vec{u}\| \cos \theta.$$

Como  $\vec{u}$  é unitário



$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos \theta.$$

$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$  é a componente escalar de  $\nabla f(x_0, y_0)$  na direção  $\vec{u}$ .

ATENÇÃO:  $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$  é número.

**Teorema 2.** Seja  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto, diferenciável em  $(x_0, y_0)$  e tal que  $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$ . Então, o valor máximo de  $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$  ocorre quando  $\vec{u}$  for o versor de  $\nabla f(x_0, y_0)$ , isto é,  $\vec{u} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}$ , e o valor máximo de  $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$  é  $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ .

Demonstração

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos \theta$$

$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$  terá valor máximo para  $\theta = 0$ , ou seja, quando  $\vec{u}$  for o versor de  $\nabla f(x_0, y_0)$ .

O valor máximo de  $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$  é então  $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ . ■

O teorema acima nos diz, ainda, que, estando em  $(x_0, y_0)$ , a direção e sentido que se deve tomar para que  $f$  cresça mais rapidamente é a do vetor  $\nabla f(x_0, y_0)$ .

**EXEMPLO 1.** Calcule  $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 2)$ , onde  $f(x, y) = x^2 + xy$ , e  $\vec{u}$  o versor de

a)  $\vec{v} = (1, 1)$

b)  $\vec{w} = (3, 4)$

Solução

Como  $f$  é diferenciável

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot \vec{u}.$$

$\nabla f(x, y) = (2x + y, x)$ ; logo,  $\nabla f(1, 2) = (4, 1)$ .

$$a) \vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right); \text{ assim,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1, 2) = (4, 1) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

$$b) \vec{u} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \left( \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1, 2) = (4, 1) \cdot \left( \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) = \frac{16}{5}.$$

**EXEMPLO 2.** Seja  $f(x, y) = x^2y$ .

a) Determine  $\vec{u}$  de modo que  $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1)$  seja máximo.

b) Qual o valor máximo de  $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1)$ ?

c) Estando-se em  $(1, 1)$ , que direção e sentido deve-se tomar para que  $f$  cresça mais rapidamente?

*Solução*

$$\nabla f(1, 1) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \right) = (2, 1).$$

a) Como  $f$  é diferenciável em  $(1, 1)$  e  $\nabla f(1, 1) \neq (0, 0)$ , segue que  $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1)$  é máximo

para  $\vec{u} = \frac{\nabla f(1, 1)}{\|\nabla f(1, 1)\|}$ , ou seja,  $\vec{u} = \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ .

b) O valor máximo de  $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1)$  é  $\|\nabla f(1, 1)\| = \sqrt{5}$ .

c)  $\nabla f(1, 1) = (2, 1)$  aponta a direção e sentido em que  $f$  cresce mais rapidamente em  $(1, 1)$ .

**EXEMPLO 3.** Admita que  $T(x, y) = x^2 + 3y^2$  represente uma distribuição de temperatura no plano  $xy$ :  $T(x, y)$  é a temperatura no ponto  $(x, y)$  (supondo  $T$  em  $^{\circ}\text{C}$ ,  $x$  e  $y$  em  $\text{cm}$ ).

a) Estando-se em  $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ , qual a direção e sentido de maior crescimento da temperatura? Qual a taxa de crescimento nesta direção?

b) Estando-se em  $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ , qual a direção e sentido de maior decréscimo da temperatura? Qual a taxa de decréscimo nesta direção?

*Solução*

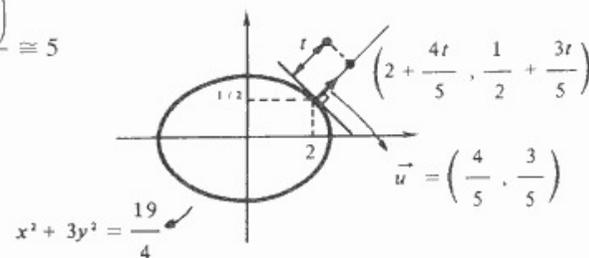
a)  $\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right) = (4, 3) = 4\vec{i} + 3\vec{j}$  aponta, em  $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ , a direção e sentido de maior

crescimento de temperatura. Nesta direção,  $\vec{u} = \frac{\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)}{\|\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)\|}$ , a taxa de variação da temperatura é máxima:

$$\frac{\partial T}{\partial u}\left(2, \frac{1}{2}\right) = \|\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)\| = 5 \text{ } (^{\circ}\text{C}/\text{cm}),$$

o que significa que, a partir do ponto  $\left(2, \frac{1}{2}\right)$  e na direção e sentido de  $\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)$ , a temperatura está aumentando a uma taxa aproximada de  $5^{\circ}\text{C}$  por  $\text{cm}$ :

$$\frac{T\left(2 + \frac{4t}{5}, \frac{1}{2} + \frac{3t}{5}\right) - T\left(2, \frac{1}{2}\right)}{t} \cong 5$$



sendo a aproximação tanto melhor quanto menor for o  $t$ .

b)  $-\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right) = -(4\vec{i} + 3\vec{j})$  aponta, em  $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ , a direção e sentido de maior

decréscimo da temperatura. Nesta direção,  $\vec{u} = -\frac{\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)}{\|\nabla T\left(2, \frac{1}{2}\right)\|}$ , a taxa de variação da temperatura é mínima:

$$\frac{\partial T}{\partial u} \left( 2, \frac{1}{2} \right) = \nabla T \left( 2, \frac{1}{2} \right) \cdot \left( \frac{\nabla T \left( 2, \frac{1}{2} \right)}{\|\nabla T \left( 2, \frac{1}{2} \right)\|} \right) = -\|\nabla T \left( 2, \frac{1}{2} \right)\|$$

ou seja,

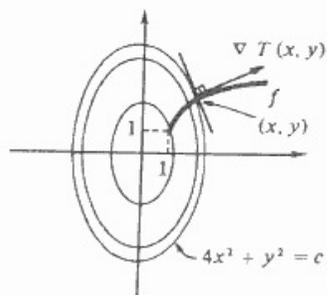
$$\frac{\partial T}{\partial u} \left( 2, \frac{1}{2} \right) = -5 \text{ (}^\circ\text{C/cm)}.$$

Nesta direção e sentido, a partir de  $\left( 2, \frac{1}{2} \right)$ , a temperatura está decrescendo a uma taxa aproximada de  $5^\circ\text{C}$  por cm.

**EXEMPLO 4.** Suponha que  $T(x, y) = 4x^2 + y^2$  represente uma distribuição de temperatura no plano  $xy$ . Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto  $P$  que se desloca, a partir de  $(1, 1)$ , sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

*Solução*

Por considerações geométricas, é razoável esperar que a trajetória descrita por  $P$  coincida com o gráfico de uma função  $y = f(x)$ , com  $f(1) = 1$ .



O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $(x, y)$  é  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ . Como  $\nabla T(x, y) = (8x, 2y)$  deve ser tangente ao gráfico de  $f$ , em  $(x, y)$ , devemos ter

$$\textcircled{1} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{8x}$$

(Observe que a direção do vetor  $\nabla T(x, y) = 8x\vec{i} + 2y\vec{j}$  tem coeficiente angular  $\frac{2y}{8x}$ ). Separando as variáveis em  $\textcircled{1}$  e integrando, obtemos,

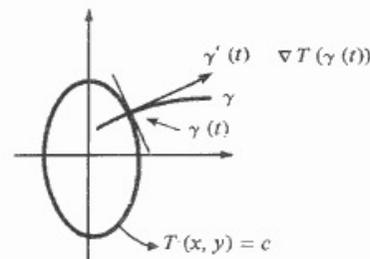
$$\ln y = \frac{1}{4} \ln x + k \left( \int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{4x} dx \right).$$

Para que a condição  $f(1) = 1$  seja satisfeita, devemos tomar  $k = 0$ ; assim,

$$\ln y = \frac{1}{4} \ln x \quad \text{ou} \quad y = \sqrt[4]{x}.$$

Segue que  $\gamma(t) = (t, \sqrt[4]{t})$ ,  $t \geq 1$ , é uma parametrização para a trajetória descrita por  $P$ . Um outro modo de resolver o problema é determinar funções  $x(t)$  e  $y(t)$  tais que a curva  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  satisfaça as condições

$$\begin{cases} \gamma'(t) = \nabla T(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = (1, 1). \end{cases}$$



Temos:

$$\gamma'(t) = \nabla T(\gamma(t)) \Leftrightarrow (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (8x(t), 2y(t)).$$

Deste modo,  $x(t)$  e  $y(t)$  devem satisfazer as condições

$$\begin{cases} \dot{x} = 8x \\ \dot{y} = 2y \\ x(0) = 1 \quad \text{e} \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

Deixamos a seu cargo verificar que  $x = e^{8t}$  e  $y = e^{2t}$  satisfazem as condições acima. Assim,

$$\gamma(t) = (e^{8t}, e^{2t}), \quad t \geq 0,$$

é, também, parametrização da trajetória descrita por  $P$ .

**EXEMPLO 5.** Calcule a derivada direcional de  $f(x, y) = x^2 + y^2$  no ponto  $(1, 2)$  e na direção do vetor  $2\vec{i} - \vec{j}$ .

Solução

O que queremos aqui é  $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 2)$  onde  $\vec{u}$  é o versor de  $2\vec{i} - \vec{j}$ .

$$\nabla f(1, 2) = (2, 4) \text{ e } \vec{u} = \frac{(2, -1)}{\|(2, -1)\|} = \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

assim,

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1, 2) = (2, 4) \cdot \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0.$$

**Observação.** Tudo o que dissemos nesta seção generaliza-se para funções reais de três ou mais variáveis.

**EXEMPLO 6.** Calcule a derivada direcional de  $f(x, y, z) = xyz$  no ponto  $(1, 1, 3)$  e na direção  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1, 3) = \nabla f(1, 1, 3) \cdot \vec{u}$$

onde  $\vec{u}$  é o versor de  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

$$\vec{u} = \frac{(1, 1, 1)}{\|(1, 1, 1)\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \text{ e } \nabla f(1, 1, 3) = (3, 3, 1)$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1, 3) = (3, 3, 1) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

## Exercícios 13.4

1. Calcule  $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0)$ , sendo dados:

a)  $f(x, y) = x^2 - 3y^2$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 2)$  e  $\vec{u}$  o versor de  $2\vec{i} + \vec{j}$ .

b)  $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  e  $\vec{u}$  o versor de  $(3, 4)$ .

c)  $f(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$ ,  $(x_0, y_0) = (3, 3)$  e  $\vec{u} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ .

d)  $f(x, y) = xy$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  e  $\vec{u}$  o versor de  $\vec{i} + \vec{j}$ .

2. Em que direção e sentido a função dada cresce mais rapidamente no ponto dado? E em que direção e sentido decresce mais rapidamente?

a)  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$  em  $(1, 1)$ .

b)  $f(x, y) = \ln \|(x, y)\|$  em  $(1, -1)$ .

c)  $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$  em  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ .

3. Seja  $f(x, y) = x \arctg \frac{x}{y}$ . Calcule  $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1)$ , onde  $\vec{u}$  aponta na direção e sentido de máximo crescimento de  $f$  no ponto  $(1, 1)$ .

4. Calcule a derivada direcional de  $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$  no ponto  $(2, 2)$  e na direção

a)  $\vec{v} = (1, 2)$

b)  $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

5. Calcule a derivada direcional de  $f(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2}$ , no ponto  $(-1, 1)$  e na direção  $2\vec{i} + 3\vec{j}$ .

6. Uma função diferenciável  $f(x, y)$  tem, no ponto  $(1, 1)$ , derivada direcional igual a 3 na direção  $3\vec{i} + 4\vec{j}$  e igual a  $-1$  na direção  $4\vec{i} - 3\vec{j}$ . Calcule

a)  $\nabla f(1, 1)$ .

b)  $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1)$  onde  $\vec{u}$  é o versor de  $\vec{i} + \vec{j}$ .

7. Admita que  $T(x, y) = 16 - 2x^2 - y^2$  represente uma distribuição de temperatura no plano  $xy$ . Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto  $P$  que se desloca, a partir do ponto  $(1, 2)$ , sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

8. Seja  $f(x, y) = xy$ . Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto  $P$  que se desloca, a partir do ponto  $(1, 2)$ , sempre na direção e sentido de máximo crescimento de  $f$ .

9. Seja  $f(x, y) = xy$ . Determine a reta tangente ao gráfico de  $f$ , no ponto  $(1, 2, f(1, 2))$ , que forma com o plano  $xy$  ângulo máximo.

10. Seja  $f(x, y) = x + 2y + 1$ . Determine a reta contida no gráfico de  $f$ , passando pelo ponto  $(1, 1, 4)$  e que forma com o plano  $xy$  ângulo máximo.

11. Um ponto  $P$  descreve uma trajetória sobre o gráfico de  $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ . Sabe-se que a reta tangente em cada ponto da trajetória forma com o plano  $xy$  ângulo máximo. Determine uma parametrização para a trajetória admitindo que ela passe pelo ponto  $(1, 1, 5)$ .

12. Admita que o gráfico de  $z = xy$  represente uma superfície própria para a prática do esqui. Admita, ainda, que um esquiador deslize pela superfície sempre na direção de maior declive. Se ele parte do ponto  $(1, 2, 2)$ , em que ponto ele tocará o plano  $xy$ ?

13. Seja  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 5 - x^2 - 4y^2 \geq 0\}$ . Suponha que o gráfico de  $z = 5 - x^2 - 4y^2$ ,  $(x, y) \in A$ , represente a superfície de um monte. (Adote o km como unidade de medida.) Um alpinista que se encontra na posição  $(1, 1, 0)$  pretende escalá-lo. Determine a trajetória a ser descrita pelo alpinista admitindo que ele busque sempre a direção de maior aclive. Sugere-se ao leitor desenhar o monte e a trajetória a ser descrita pelo alpinista.

14. Suponha que  $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$  represente uma distribuição de temperatura no plano  $xy$ . (Admita que  $x$  e  $y$  sejam dados em km e a temperatura em  $^{\circ}\text{C}$ .) Um indivíduo encontra-se na posição  $(3, 2)$  e pretende dar um passeio.

- Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se for seu desejo desfrutar sempre da mesma temperatura do ponto  $(3, 2)$ .
- Qual a direção e sentido que deverá tomar se for seu desejo caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?
- De quanto a temperatura se elevará aproximadamente, caso caminhe 0,01 km na direção encontrada no item b)?
- De quanto decrescerá, aproximadamente, a temperatura, caso caminhe 0,01 km na direção  $\vec{j}$ ?

15. Calcule a derivada direcional da função dada, no ponto e direção  $\vec{w}$  indicados.

a)  $f(x, y, z) = xyz$  em  $(1, 1, 1)$  e na direção  $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .

b)  $f(x, y, z) = x^2 + xy + z^2$  em  $(1, 2, -1)$  e na direção  $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ .

16. A função diferenciável  $f(x, y, z)$  tem, no ponto  $(1, 1, 1)$ , derivada direcional igual a 1 na direção  $4\vec{j} + 3\vec{k}$ , igual a 2 na direção  $-4\vec{i} + 3\vec{j}$  e igual a zero na direção  $\vec{j}$ . Calcule o

valor máximo de  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1, 1)$ .

17. Seja  $f(x, y)$  diferenciável e sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dois vetores de  $\mathbb{R}^2$ , unitários e ortogonais. Prove:

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}(x, y) \vec{u} + \frac{\partial f}{\partial v}(x, y) \vec{v}.$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial u}(x, y) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial v}(x, y) \text{ são os componentes de } \nabla f(x, y) \text{ em relação à base } (\vec{u}, \vec{v}) \right)$$

18. Seja  $g(r, \theta) = f(x, y)$ , com  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , onde  $f(x, y)$  é suposta diferenciável num aberto do  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$  e  $\vec{v} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$ . Mostre que

a)  $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial u}(x, y)$  e  $\frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial v}(x, y)$ .

b)  $\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}(x, y) \vec{u} + \frac{\partial f}{\partial v}(x, y) \vec{v}$ .

c)  $\|\nabla f(x, y)\|^2 = \left[ \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \right]^2$ , onde  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ .

19. Calcule  $\|\nabla f(1, 1)\|$  sendo  $f(x, y) = \left[ \arcsen \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]^4$ .

(Sugestão. Faça  $g(r, \theta) = f(x, y)$ , com  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$  e utilize o item c) do exercício anterior.)

20. Suponha  $f(x, y)$  diferenciável no aberto  $A$ . Sejam  $(s, t)$  as coordenadas do vetor  $(x, y)$  em relação à base  $(\vec{u}, \vec{v})$ , onde  $\vec{u} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  e  $\vec{v} = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$ . Considere a função  $g$  dada por  $g(s, t) = f(x, y)$ . Mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial f}{\partial u}(x, y) \text{ e } \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) = \frac{\partial f}{\partial v}(x, y).$$

Interprete.

21. Seja  $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$  se  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $f(0, 0) = 0$ . Mostre que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) \neq \nabla f(0, 0) \cdot \vec{u}, \text{ onde } \vec{u} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$
 Explique.

22. Seja  $f(x, y)$  diferenciável no aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  e sejam  $\gamma(t)$  e  $\delta(t)$  duas curvas definidas e diferenciáveis num intervalo aberto  $I$  e com imagens contidas em  $A$ . Suponha  $\gamma(t_0) = \delta(t_0)$ ,

$\|\gamma'(t_0)\| = 1$ ,  $\|\delta'(t_0)\| = 1$ ,  $\nabla f(\gamma(t_0)) \neq \vec{0}$  e  $\gamma'(t_0)$  o versor de  $\nabla f(\gamma(t_0))$ . Suponha, ainda, que  $\gamma'(t_0)$  não seja paralelo a  $\delta'(t_0)$ . Prove que existe  $r > 0$  tal que

$$f(\gamma(t)) > f(\delta(t)) \text{ para } t_0 < t < t_0 + r$$

e

$$f(\gamma(t)) < f(\delta(t)) \text{ para } t_0 - r < t < t_0.$$

Interprete.

23. Seja  $f(x, y, z)$  diferenciável num aberto do  $\mathbb{R}^3$  e sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores do  $\mathbb{R}^3$ , unitários e dois a dois ortogonais. Prove:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial u}(x, y, z) \vec{u} + \frac{\partial f}{\partial v}(x, y, z) \vec{v} + \frac{\partial f}{\partial w}(x, y, z) \vec{w}.$$

24. Seja  $F(r, \theta, z) = f(x, y, z)$ , com  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , onde  $f$  é suposta diferenciável num aberto do  $\mathbb{R}^3$ . Prove que

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta, z) \vec{u} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta, z) \vec{v} + \frac{\partial F}{\partial z}(r, \theta, z) \vec{k}$$

$$\text{onde } \vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \text{ e } \vec{v} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

25. Seja  $F(r, \theta, \varphi) = f(x, y, z)$ , com  $x = r \sin \varphi \cos \theta$ ,  $y = r \sin \varphi \sin \theta$  e  $z = r \cos \varphi$ , onde  $f$  é suposta diferenciável num aberto de  $\mathbb{R}^3$ . Prove que

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta, \varphi) \vec{u} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi) \vec{v} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \theta, \varphi) \vec{w}$$

$$\text{onde } \vec{u} = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi), \vec{v} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \text{ e } \vec{w} = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi).$$

## 14

## DERIVADAS PARCIAIS DE ORDENS SUPERIORES

### 14.1. DERIVADAS PARCIAIS DE ORDENS SUPERIORES

Seja a função  $z = f(x, y)$ ; na Seção 10.1 vimos como construir as funções  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . Da mesma forma, podemos, agora, construir as funções:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right), \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \text{ etc.}$$

**EXEMPLO 1.** Seja  $f(x, y) = 4x^5y^4 - 6x^2y + 3$ . Calcule todas as derivadas parciais de 2.º ordem.

*Solução*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 20x^4y^4 - 12xy \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 16x^5y^3 - 6x^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (20x^4y^4 - 12xy) = 80x^3y^4 - 12y.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} (20x^4y^4 - 12xy) = 80x^4y^3 - 12x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} (16x^5y^3 - 6x^2) = 48x^5y^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (16x^5y^3 - 6x^2) = 80x^4y^3 - 12x.$$

Note que, neste exemplo,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**EXEMPLO 2.** Seja  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Mostre que

a)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$       b)  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1$

*Solução*

a) Devemos, primeiro, determinar  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . Para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3xy^2(x^2 + y^2) - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{xy^4 + 3x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Em  $(0, 0)$  temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0. \text{ Assim,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^4 + 3x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Temos, agora:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0} = 0 \text{ ou seja, } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0.$$

b)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3(x^2 + y^2) - 2x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$  (verifique)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} = 1 \text{ ou seja, } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1.$$

O exemplo anterior mostra-nos que a igualdade  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$  nem sempre se verifica. O próximo teorema, cuja demonstração é deixada para exercício (veja exercício

15), fornece-nos uma condição suficiente para que tal igualdade ocorra. Antes de enunciar tal teorema, vamos definir função de classe  $C^n$ .

Uma função  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto, é dita de classe  $C^n$  em  $A$  se  $f$  admitir todas as derivadas parciais de ordem  $n$  contínuas em  $A$ .

O teorema que enunciaremos a seguir conta-nos que se  $f$  for de classe  $C^2$  em  $A$ ,  $A$  aberto, então as derivadas parciais mistas  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  serão iguais em  $A$ .

**Teorema (de Schwarz).** Seja  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto. Se  $f$  for de classe  $C^2$  em  $A$ ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

para todo  $(x, y) \in A$ .

**Exercícios 14.1**

1. Calcule todas as derivadas parciais de 2.<sup>a</sup> ordem.

a)  $f(x, y) = x^3y^2$   
 c)  $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$

b)  $z = e^{x^2 - y^2}$   
 d)  $g(x, y) = 4x^3y^4 + y^3$

2. Seja  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ . Verifique que

a)  $x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + y \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -3 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$

b)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{4}{(x^2 + y^2)^2}$

3. Verifique que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ , onde  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ .

4. Verifique que  $x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ , onde  $z = (x + y)e^y$ .

5. Sejam  $f, g: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aberto, duas funções de classe  $C^2$  e tais que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}.$$

Prove que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$$

6. Sejam  $f: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  no aberto  $A$ . Justifique as igualdades.

a)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

b)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$

c)  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$

7. Seja  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ . Verifique que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

8. Seja  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Calcule  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ .

9. Seja  $u(x, t) = A \sin(a\lambda t + \varphi) \sin \lambda x$ , com  $A, a, \lambda$  e  $\varphi$  constantes. Verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

10. Seja  $u = f(x - at) + g(x + at)$ , onde  $f$  e  $g$  são duas funções quaisquer de uma variável real e deriváveis até a 2.ª ordem. Verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

11. Sejam  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$  duas funções que admitem derivadas parciais num mesmo aberto  $A$ . Suponha que  $(1, 1) \in A$  e que  $x(1, 1) > 0$ . Suponha, ainda, que para todo  $(u, v) \in A$

$$x^3 + y^3 = u - v \text{ e } xy = u - 2v.$$

$$\text{Calcule } \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_{\substack{u=1 \\ v=1}}$$

12. Seja  $z = xye^y$ . Verifique que

$$x \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + y \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 0.$$

13. Seja  $z = f(x, y)$  de classe  $C^2$  no aberto  $A$  e seja  $(x_0, y_0) \in A$ . Suponha que  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$  para todo  $(x, y) \in A$ . Prove que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0.$$

Interprete graficamente.

14. Seja  $z = \int_1^{x^2 - y^2} \left[ \int_0^u \sin t^2 dt \right] du$ . Calcule

$$a) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$b) \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$$

15. Seja  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in A$ , com  $A$  aberto. Suponha que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  estão definidas em  $A$  e que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  são contínuas em  $A$ . Seja  $(x_0, y_0)$  um ponto qualquer de  $A$ ; seja  $B$  uma

bola aberta de centro  $(x_0, y_0)$  e contida em  $A$ . Sejam  $h$  e  $k$  tais que  $(x_0 + h, y_0 + k)$  pertença a  $B$ . Seja, ainda,

$$H(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0).$$

a) Considere as funções  $\varphi(t) = f(t, y_0 + k) - f(t, y_0)$  e  $\rho(s) = f(x_0 + h, s) - f(x_0, s)$ . Mostre que

$$H(h, k) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \rho(y_0 + k) - \rho(y_0).$$

b) Prove: existe  $t_1$  entre  $x_0$  e  $x_0 + h$  tal que

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \varphi'(t_1) h = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(t_1, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(t_1, y_0) \right] h.$$

c) Prove: existem  $t_1$  e  $s_1$ , com  $t_1$  entre  $x_0$  e  $x_0 + h$  e  $s_1$  entre  $y_0$  e  $y_0 + k$ , tais que

$$H(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(t_1, s_1) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0).$$

d) Prove: existem  $t_2$  e  $s_2$ , com  $t_2$  entre  $x_0$  e  $x_0 + h$  e  $s_2$  entre  $y_0$  e  $y_0 + k$ , tais que

$$H(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(t_2, s_2) = \rho(y_0 + k) - \rho(y_0).$$

e) Prove:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ .

**Observação:** A razão de considerarmos a expressão  $H(h, k)$  é a seguinte:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{k} =$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}}{k} =$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0)}{hk} \right].$$

## 14.2. APLICAÇÕES DA REGRA DA CADEIA ENVOLVENDO DERIVADAS PARCIAIS DE ORDENS SUPERIORES

Sejam  $f(x, y)$ ,  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  diferenciáveis. Pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{d}{dt} [f(x, y)] = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dt}$$

ou

$$\frac{d}{dt} [f(x, y)] = \nabla f(x, y) \cdot \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right).$$

Suponhamos, agora, que as funções  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , sejam também diferenciáveis. O gradiente de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  em  $(x, y)$  é:

$$\nabla \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right), \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \right)$$

ou seja,

$$\nabla \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \right).$$

Temos, então, pela regra da cadeia:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] = \nabla \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \frac{dy}{dt}.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \frac{dy}{dt}.$$

Da mesma forma,

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \frac{dy}{dt}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \frac{dy}{dt}.$$

**EXEMPLO 1.** Suponha  $f(x, y)$  de classe  $C^2$  num aberto do  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $g(t) = f(3t, 2t + 1)$ . Expresse  $g'(t)$  em termos de derivadas parciais de  $f$ .

Solução

$$g(t) = f(x, y), x = 3t \text{ e } y = 2t + 1.$$

$$g'(t) = \frac{d}{dt} [f(x, y)] = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dt}$$

ou seja,

$$g'(t) = 3 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Então,

$$g''(t) = 3 \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] + 2 \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right].$$

①

Temos:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \frac{dy}{dt}$$

e

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \frac{dy}{dt}.$$

Substituindo em ① (lembrando que  $\frac{dx}{dt} = 3$  e  $\frac{dy}{dt} = 2$ ) vem:

$$g''(t) = 9 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

Como  $f$  é de classe  $C^2$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ . Logo,

$$g''(t) = 9 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 12 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

onde  $x = 3t$  e  $y = 2t + 1$ .

**EXEMPLO 2.** Sejam  $f(x, y) = x^5 y^4$ ,  $x = 3t$  e  $y = 2t + 1$ . Calcule  $g''(t)$ , sendo  $g(t) = f(3t, 2t + 1)$ .

Solução

1.º processo (pela regra da cadeia)

$$g(t) = f(x, y), x = 3t \text{ e } y = 2t + 1.$$

Pelo exemplo anterior

$$g''(t) = 9 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 12 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

onde  $x = 3t$  e  $y = 2t + 1$ . Tendo em vista que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 20x^3y^4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 20x^4y^3 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12x^5y^2$$

resulta,

$$g''(t) = 180x^3y^4 + 240x^4y^3 + 48x^5y^2$$

e, portanto,

$$g''(t) = 180(3t)^3(2t+1)^4 + 240(3t)^4(2t+1)^3 + 48(3t)^5(2t+1)^2$$

2.º processo

$$g(t) = (3t)^5(2t+1)^4$$

$$g'(t) = 15(3t)^4(2t+1)^4 + 8(3t)^5(2t+1)^3$$

Portanto,

$$g''(t) = 180(3t)^3(2t+1)^4 + 120(3t)^4(2t+1)^3 + 120(3t)^4(2t+1)^3 + 48(3t)^5(2t+1)^2$$

ou seja,

$$g''(t) = 180(3t)^3(2t+1)^4 + 240(3t)^4(2t+1)^3 + 48(3t)^5(2t+1)^2$$

**EXEMPLO 3.** Suponha  $f(x, y)$  de classe  $C^2$  num aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $g$  dada por

$$g(t) = t^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y),$$

onde  $x = t^2$  e  $y = t^3$ . Expresse  $g'(t)$  em termos de derivadas parciais de  $f$ .

*Solução*

Pela regra de derivação de um produto, temos:

$$g'(t) = 2t \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + t^2 \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right]$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \frac{dy}{dt} \\ &= 2t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 3t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \end{aligned}$$

resulta,

$$g'(t) = 2t \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2t^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 3t^4 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

**EXEMPLO 4.** Seja  $z = f(x, x^2)$  onde  $f(x, y)$  é de classe  $C^2$  num aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Expresse  $\frac{d^2 z}{dx^2}$  em termos de derivadas parciais de  $f$ .

*Solução*

$$z = f(x, y), \text{ onde } y = x^2.$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx} [f(x, y)] = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dx}$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Segue que,

①

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] + \frac{d}{dx} \left[ 2x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right].$$

Temos:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \frac{dx}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \frac{dy}{dx}$$

ou seja,

②

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Temos, também:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ 2x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] &= 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + 2x \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \\ &= 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + 2x \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \right] \end{aligned}$$

ou seja,

③

$$\frac{d}{dx} \left[ 2x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] = 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

Substituindo ② e ③ em ① e lembrando que  $f$  é de classe  $C^2$ , resulta:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 4x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

**EXEMPLO 5.** Seja  $z = f(u - 2v, v + 2u)$  onde  $f(x, y)$  é de classe  $C^2$  num aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Expresse  $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$  em termos de derivadas parciais de  $f$ .

*Solução*

$$z = f(x, y), \quad x = u - 2v \quad \text{e} \quad y = v + 2u.$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} [f(x, y)] = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial u}$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Segue que,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right].$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{aligned}$$

resulta

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

**EXEMPLO 6.** Mostre que a mudança de variáveis  $x = e^u$  e  $y = e^v$  transforma a equação

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 1.$$

*Solução*

$$z = z(x, y), \quad x = e^u \quad \text{e} \quad y = e^v.$$

Temos

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = e^u \frac{\partial z}{\partial x}.$$

①

**ABUSOS DE NOTAÇÃO.** Aqui  $\frac{\partial z}{\partial x}$  deve ser olhado como função de  $x$  e  $y$ , enquanto  $\frac{\partial z}{\partial u}$  deve ser olhado como função de  $u$  e  $v$ .

Segue de ① que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = e^u \frac{\partial z}{\partial x} + e^u \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{\partial z}{\partial x} \right].$$

Tendo em vista que

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{\partial z}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial u} = e^u \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

resulta

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = e^u \frac{\partial z}{\partial x} + e^{2u} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Procedendo de forma análoga obtém-se

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = e^v \frac{\partial z}{\partial y} + e^{2v} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Somando-se ② e ③ resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} &= e^{2u} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + e^{2v} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + e^u \frac{\partial z}{\partial x} + e^v \frac{\partial z}{\partial y} \\ &= x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 1. \end{aligned}$$

## Exercícios 14.2

(Quando nada for dito sobre uma função, ficará subentendido que se trata de uma função de classe  $C^2$  num aberto.)

1. Expresse  $g'(t)$  em termos de derivadas parciais de  $f$ , sendo  $g$  dada por

$$a) g(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad x = t^2 \text{ e } y = \sin t.$$

$$b) g(t) = t^3 \frac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t).$$

$$c) g(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 2t) + 5 \frac{\partial f}{\partial y}(\sin 3t, t).$$

2. Expresse  $g''(t)$  em termos de derivadas parciais de  $f$ , sendo  $g(t) = f(5t, 4t)$ .

3. Considere a função  $g(t) = f(a + ht, b + kt)$ , com  $a, b, h$  e  $k$  constantes.

a) Supondo  $f(x, y)$  de classe  $C^2$  num aberto de  $\mathbb{R}^2$ , verifique que

$$g''(t) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

$$\text{onde } x = a + ht \text{ e } y = b + kt.$$

b) Supondo  $f(x, y)$  de classe  $C^3$  num aberto de  $\mathbb{R}^2$ , verifique que

$$g'''(t) = h^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) + 3h^2k \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) + 3hk^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) + k^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y)$$

$$\text{onde } x = a + ht \text{ e } y = b + kt.$$

4. Considere a função  $h(x, y) = f(x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ , onde  $f(u, v)$  é suposta de classe  $C^2$ . Verifique que

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) = 2 \left[ \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right] + 4x^2 \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, v) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u, v) \right]$$

$$\text{onde } u = x^2 + y^2 \text{ e } v = x^2 - y^2.$$

5. Considere a função  $z = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \sin 3x)$ . Verifique que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \sin 3x) + 3 \cos 3x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, \sin 3x).$$

6. Considere a função  $z = x \frac{\partial f}{\partial y}(2x, x^3)$ . Verifique que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}(2x, x^3) + x \left[ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2x, x^3) + 3x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2x, x^3) \right].$$

7. Seja  $g(u, v) = f(2u + v, u - 2v)$ , onde  $f(x, y)$  é suposta de classe  $C^2$ . Verifique que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 5 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

8. Seja  $v(r, \theta) = u(x, y)$ , onde  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ . Verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}.$$

9. Sejam  $f(x, y)$  de classe  $C^2$  num aberto de  $\mathbb{R}^2$ ,  $g(x)$  derivável até a 2.ª ordem num intervalo aberto  $I$  e tais que, para todo  $x \in I$ ,  $f(x, g(x)) = 0$  (isto é,  $y = g(x)$  é dada implicitamente pela equação  $f(x, y) = 0$ ). Expresse  $g''(x)$  em termos de derivadas parciais de  $f$ .

10. Suponha que  $f(x, t)$  satisfaça a equação

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

a) Verifique que  $g(u, v) = f(x, t)$ , onde  $x = u + v$  e  $t = u - v$  satisfaz a equação  $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = 0$ .

b) Determine uma coleção de funções  $f(x, t)$  que satisfaçam  $\textcircled{1}$ .

11. Suponha que  $f(x, t)$  satisfaça a equação

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (c \neq 0 \text{ constante}).$$

a) Determine constantes  $m, n, p$  e  $q$  para que  $g(u, v) = f(x, t)$ , onde  $x = mu + nv$  e  $t = pu + qv$  satisfaça a equação  $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$ .

b) Determine uma família de soluções de  $\textcircled{2}$ .

12. Seja  $F(r, \theta, t) = f(x, y, t)$  onde  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ . Suponha que ( $c \neq 0$  constante)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right].$$

Mostre que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right].$$

13. Sejam  $z = z(x, y)$ ,  $x = e^u \cos v$  e  $y = e^u \sin v$ . Suponha que  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ . Calcule

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

14. Sejam  $G(u, v) = \frac{F(x, y)}{x}$ ,  $u = x + y$  e  $v = \frac{y}{x}$ . Suponha que  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$ .

Calcule  $\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}$ .

15. a) Ache uma função  $u(x, y)$  da forma  $u(x, y) = F(x^2 + y^2)$  que satisfaça a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

b) Faça a mesma coisa para funções de três ou mais variáveis:

16. Verifique que a mudança de variáveis  $x = s \cos \theta - t \sin \theta$  e  $y = s \sin \theta + t \cos \theta$  com  $\theta$  constante, transforma a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (u = u(x, y))$$

em

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (u = u(s, t)).$$

17. Verifique que a mudança de variáveis  $u = x + y$  e  $v = y + 2x$  transforma a equação

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

em

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

Determine, então, uma coleção de soluções de ③.

18. Suponha que  $z = z(x, y)$  satisfaça a equação

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - x \frac{\partial z}{\partial x} = x^3 y^2.$$

Fazendo a mudança de variáveis  $x = e^u$  e  $y = e^v$ , calcule  $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - 2 \frac{\partial z}{\partial u}$ .

# 15

## TEOREMA DO VALOR MÉDIO. FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO DE LAGRANGE

### 15.1. TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Um dos teoremas centrais do cálculo de funções reais de uma variável real é o teorema do valor médio (TVM). Nesta seção, vamos estendê-lo para o caso de funções reais de duas variáveis reais e deixaremos a cargo do leitor a tarefa de generalizá-lo para funções reais de três ou mais variáveis reais.

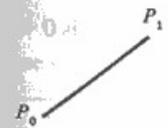
Antes de enunciar e demonstrar tal teorema, vamos introduzir os conceitos de *segmento* e *poligonal*. Sejam  $P_0$  e  $P_1$  dois pontos do  $\mathbb{R}^2$ ; o conjunto

$$P_0 P_1 = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid P = P_0 + \lambda (P_1 - P_0), 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

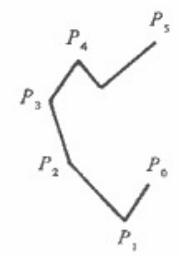
denomina-se *segmento* de extremidades  $P_0$  e  $P_1$ . Sejam, agora,  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ ,  $n + 1$  pontos distintos do  $\mathbb{R}^2$ ; o conjunto

$$P_0 P_1 \cup P_1 P_2 \cup \dots \cup P_{n-1} P_n$$

denomina-se *poligonal* de vértices  $P_0, P_1, \dots, P_n$ .



segmento de extremidades  $P_0$  e  $P_1$



poligonal de vértices  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$

**Teorema (do valor médio).** Sejam  $A$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^2$ ,  $P_0$  e  $P_1$  dois pontos de  $A$  tais que o segmento  $P_0P_1$  esteja contido em  $A$ . Nestas condições, se  $f(x, y)$  for diferenciável em  $A$ , então existirá pelo menos um ponto  $\bar{P}$  interno ao segmento  $P_0P_1$  (isto é,  $\bar{P}$  pertence a  $P_0P_1$  mas não é extremidade) tal que

$$f(P_1) - f(P_0) = \nabla f(\bar{P}) \cdot (P_1 - P_0).$$

### Demonstração

Consideremos a função  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(t) = f(P_0 + t(P_1 - P_0)), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Esta função  $g$  fornece os valores que  $f$  assume nos pontos do segmento  $P_0P_1$ . Da diferenciabilidade de  $f$  em  $A$ , segue que  $g$  é contínua em  $[0, 1]$  e derivável em  $]0, 1[$ . Pelo TVM existe  $\bar{t}$  em  $]0, 1[$  tal que

$$g(1) - g(0) = g'(\bar{t}) \cdot (1 - 0),$$

ou seja,

$$g(1) - g(0) = g'(\bar{t}).$$

Como  $g(1) = f(P_1)$  e  $g(0) = f(P_0)$ , resulta

$$f(P_1) - f(P_0) = g'(\bar{t}).$$

Pela regra da cadeia

$$g'(t) = \nabla f(P_0 + t(P_1 - P_0)) \cdot \gamma'(t)$$

onde  $\gamma(t) = P_0 + t(P_1 - P_0)$ . Temos

$$\gamma(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) \Rightarrow \gamma'(t) = P_1 - P_0.$$

Assim,

$$g'(\bar{t}) = \nabla f(P_0 + \bar{t}(P_1 - P_0)) \cdot (P_1 - P_0)$$

onde  $\bar{P} = P_0 + \bar{t}(P_1 - P_0)$  é um ponto interno ao segmento  $P_0P_1$  pois  $0 < \bar{t} < 1$ . Portanto,

$$f(P_1) - f(P_0) = \nabla f(\bar{P}) \cdot (P_1 - P_0). \quad \blacksquare$$

Pelo TVM existe  $\bar{P}$  interno ao segmento  $P_0P_1$  tal que

$$f(P_1) - f(P_0) = \nabla f(\bar{P}) \cdot (P_1 - P_0) = \nabla f(\bar{P}) \cdot \frac{P_1 - P_0}{\|P_1 - P_0\|} \|P_1 - P_0\|.$$

Fazendo  $u = \frac{P_1 - P_0}{\|P_1 - P_0\|}$  resulta,

$$f(P_1) - f(P_0) = (\nabla f(\bar{P}) \cdot \vec{u}) \|P_1 - P_0\|$$

ou seja,

$$f(P_1) - f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{P}) \|P_1 - P_0\|$$

ou ainda,

$$\frac{f(P_1) - f(P_0)}{\|P_1 - P_0\|} = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{P}), \quad (P_1 \neq P_0)$$

Assim, se  $f(x, y)$  for diferenciável no aberto  $A$  e se  $P_0P_1 \subset A$ , então existirá  $\bar{P}$  interno a  $P_0P_1$  tal que a derivada direcional de  $f$ , em  $\bar{P}$ , e na direção  $\vec{u} = \frac{P_1 - P_0}{\|P_1 - P_0\|}$ , é a taxa média de variação de  $f$  entre os pontos  $P_0$  e  $P_1$ ,  $P_0 \neq P_1$ .

**Observação.** O enunciado do TVM para função real de  $n$  variáveis ( $n > 2$ ) é o acima, substituindo  $\mathbb{R}^2$  por  $\mathbb{R}^n$ .

### Exercícios 15.1

1. Determine  $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$  como no teorema do valor médio, sendo dados:

- $f(x, y) = 2x^2 + 3y$ ,  $P_0 = (1, 1)$  e  $P_1 = (2, 3)$ .
- $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + xy$ ,  $P_0 = (1, 2)$  e  $P_1 = (4, 3)$ .
- $f(x, y) = x^3 + xy^2$ ,  $P_0 = (1, 1)$  e  $P_1 = (2, 2)$ .

2. Seja  $f(x, y)$  diferenciável em  $\mathbb{R}^2$  e suponha que existe  $M > 0$  tal que  $\|\nabla f(x, y)\| \leq M$ , para todo  $(x, y)$ . Prove que

$$|f(x, y) - f(s, t)| \leq M \| (x, y) - (s, t) \|$$

quaisquer que sejam  $(x, y)$  e  $(s, t)$  em  $\mathbb{R}^2$ .

3. Seja  $f(x, y) = \ln(x + y)$ . Prove que

$$|f(x, y) - f(s, t)| \leq \| (x, y) - (s, t) \|$$

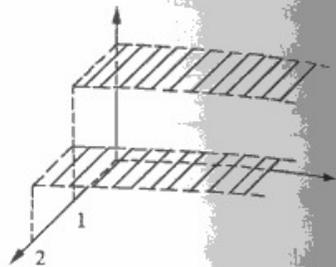
quaisquer que sejam  $(x, y)$  e  $(s, t)$ , com  $x > 1, y > 1, s > 1$  e  $t > 1$ .

## 15.2. FUNÇÕES COM GRADIENTE NULO

Estamos interessados, agora, em estudar as funções que têm gradiente nulo num aberto. Se  $f(x, y)$  for constante num aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ , então  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$  para todo  $(x, y) \in A$ .

Entretanto, pode acontecer de uma função ter gradiente nulo em todos os pontos de um aberto sem ser constante neste aberto: a função

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{se } y > 0 \text{ e } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } y > 0 \text{ e } 1 < x < 2 \end{cases}$$



tem gradiente nulo no aberto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, 0 < x < 1 \text{ ou } 1 < x < 2\}$ , mas não é constante em  $A$ .

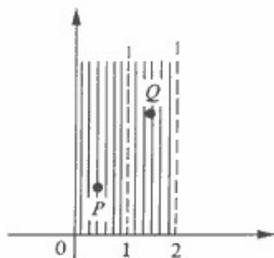
Provaremos a seguir que se uma função admitir gradiente nulo em todos os pontos de um conjunto  $A$  conexo por caminhos, então a função será necessariamente constante em  $A$ . Dizemos que um conjunto aberto  $A$  é conexo por caminhos se, quaisquer que forem os pontos  $P$  e  $Q$  pertencentes a  $A$ , existir uma poligonal, de extremidades  $P$  e  $Q$ , contida em  $A$ .

**EXEMPLOS**

- a)  $A = \mathbb{R}^2$  é conexo por caminhos.
- b) Toda bola aberta é conexo por caminhos.
- c)



- d)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, 0 < x < 1 \text{ ou } 1 < x < 2\}$  não é conexo por caminhos.

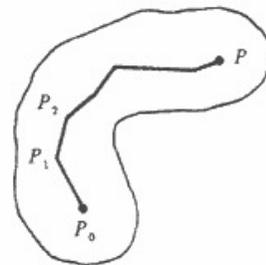


Qualquer poligonal ligando  $P$  a  $Q$  tem pontos que não pertencem a  $A$ . (Observe que os pontos  $(1, y), y > 0$ , não pertencem a  $A$ .)

**Teorema.** Seja  $A \subset \mathbb{R}^2$  aberto e conexo por caminhos. Nestas condições, se  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$  para todo  $(x, y)$  em  $A$ , então  $f$  será constante em  $A$ .

**Demonstração**

Seja  $P_0 = (x_0, y_0)$  um ponto de  $A$ ; vamos provar que para todo  $P = (x, y) \in A, f(x, y) = f(x_0, y_0)$ . Como  $A$  é conexo por caminhos, existem pontos  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  e  $P_n = P$  pertencentes a  $A$  tais que a poligonal  $P_0P_1 \cup P_1P_2 \cup \dots \cup P_{n-1}P_n$  está contida em  $A$ .



Pelo teorema do valor médio, para todo  $i$  existe  $\bar{P}_i$  interno a  $P_{i-1}P_i (i = 1, 2, \dots, n)$  tal que

$$f(P_i) - f(P_{i-1}) = \nabla f(\bar{P}_i) \cdot (P_i - P_{i-1})$$

e como  $\nabla f(\bar{P}_i) = 0$  (hipótese) resulta

$$f(P_i) = f(P_{i-1})$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ ; assim,

$$f(P_0) = f(P_1) = f(P_2) = \dots = f(P_n) = f(P)$$

e, portanto,  $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ . Fica provado assim que, para todo  $(x, y) \in A, f(x, y) = f(x_0, y_0)$ , ou seja,  $f$  é constante em  $A$ . ■

**15.3. RELAÇÃO ENTRE FUNÇÕES COM MESMO GRADIENTE**

**Teorema 1.** Seja  $A \subset \mathbb{R}^2$  aberto e conexo por caminhos e sejam  $f, g$  duas funções que admitem derivadas parciais em  $A$ . Nestas condições, se  $\nabla f(x, y) = \nabla g(x, y)$  para todo  $(x, y) \in A$ , então existirá uma constante  $k$  tal que

$$g(x, y) = f(x, y) + k$$

para todo  $(x, y)$  em  $A$ .

**Demonstração**

Seja  $h(x, y) = g(x, y) - f(x, y)$ ,  $(x, y) \in A$ ; como

$$\nabla h(x, y) = \nabla g(x, y) - \nabla f(x, y), \quad (x, y) \in A,$$

segue da hipótese que  $\nabla h(x, y) = (0, 0)$  para todo  $(x, y) \in A$ . Como  $A$  é conexo por caminhos, resulta que  $h$  é constante em  $A$ ; logo, existe uma constante  $k$  tal que  $h(x, y) = k$  em  $A$ , ou seja,

$$g(x, y) = f(x, y) + k$$

para todo  $(x, y) \in A$ . ■

O teorema acima nos diz que *duas funções com gradientes iguais num conjunto conexo por caminhos diferem, neste conjunto, por uma constante.*

**EXEMPLO 1.** Determine todas as funções  $f(x, y)$ , definidas em  $\mathbb{R}^2$ , tais que

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + y^2 \end{cases}$$

**Solução**

Observe que duas funções que satisfazem  $\textcircled{1}$  terão gradientes iguais; logo, deverão diferir por constante, pois  $\mathbb{R}^2$  é conexo por caminhos. Basta, então, determinar uma solução de  $\textcircled{1}$  e qualquer outra será esta mais uma constante. A função

$$x^3y^2 + 4x$$

satisfaz a 1.ª equação (obtem-se tal função integrando-se a 1.ª equação de  $\textcircled{1}$  em relação a  $x$ , mantendo-se  $y$  constante). Por outro lado,

$$x^3y^2 + \frac{y^3}{3}$$

satisfaz a 2.ª equação de  $\textcircled{1}$ . Segue que

$$x^3y^2 + 4x + \frac{y^3}{3}$$

satisfaz  $\textcircled{1}$ . (Por quê?) Logo,

$$f(x, y) = x^3y^2 + 4x + \frac{y^3}{3} + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

é a família das soluções de  $\textcircled{1}$ .

Sejam  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  duas funções dadas, definidas num aberto  $A$  do  $\mathbb{R}^2$ . O problema que se coloca é o seguinte: o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = P(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y) \end{cases}$$

admite sempre solução? A resposta em geral é não. A seguir apresentaremos uma *condição necessária* para que o sistema admita solução.

**Teorema 2.** Sejam  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  duas funções definidas e de classe  $C^1$  num aberto  $A$  do  $\mathbb{R}^2$ . Uma *condição necessária* para que exista uma função  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que, para todo  $(x, y) \in A$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \end{cases}$$

é que:  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  em  $A$ .

**Demonstração**

Suponhamos que tal  $f$  exista; assim

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \end{cases} \quad \text{em } A.$$

Derivando os dois membros da primeira equação em relação a  $y$  e os da segunda em relação a  $x$ , obtemos, para todo  $(x, y) \in A$ ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Como  $P$  e  $Q$  são supostas de classe  $C^1$ , resulta que  $f$  será de classe  $C^2$ ; pelo teorema de

Schwarz  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ . Logo,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{em } A. \quad \blacksquare$$

**EXEMPLO 2.** Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} = y \end{cases}$$

Como  $\frac{\partial}{\partial y}(xy) \neq \frac{\partial}{\partial x}(y)$  em  $\mathbb{R}^2$ , segue que não existe função definida em  $\mathbb{R}^2$  que satisfaça o sistema.

**EXEMPLO 3.** Determine, caso existam, todas as funções  $z = f(x, y)$  tais que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} - e^{-y} \end{cases} \quad \text{em } \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

*Solução*

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} - e^{-y} \right) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Assim,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{em } \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

$$\text{onde } P(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ e } Q(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} - e^{-y}.$$

A condição necessária está verificada; o sistema pode admitir soluções. Deixamos a seu cargo verificar que

$$z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + e^{-y} + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

é a família das soluções do sistema.

Uma pergunta que surge naturalmente é a seguinte: a condição necessária do teorema 2 é também suficiente? A resposta é não. (Veja Exercícios 9 e 10.) Entretanto, se algumas restrições forem impostas ao conjunto  $A$  a condição será, também, suficiente. Este problema será discutido no volume 3.

### Exercícios 15.3

1. Determine todas as funções  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$a) \frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2y^2 - 10x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y + 1$$

$$b) \frac{\partial f}{\partial x} = y \cos xy + 3x^2 - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos xy - x + 3y^2$$

$$c) \frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{x^2 + y^2} + \frac{1}{1 + y^2}$$

2. Determine a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  cujo gráfico passa pelo ponto  $(1, 2, 1)$  e tal que

$$\nabla f(x, y) = (2xy^3 - 2x, 3x^2y^2 + 2y - 1).$$

3. Determine a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  cujo gráfico passa pelo ponto  $(0, 0, 2)$  e tal que

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{y}{1 + x^2 + y^2} + ye^{y^2} \right).$$

4. Existe função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla f(x, y) = (x^2 + y^2 + 1, x^2 - y^2 + 1),$$

para todo  $(x, y)$  em  $\mathbb{R}^2$ ? Justifique.

5. Determine  $z = \varphi_1(x, y)$ ,  $y > 0$ , tal que  $\varphi_1(1, 1) = \frac{\pi}{4}$  e, para todo  $y > 0$ ,

$$\nabla \varphi_1(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

6. Determine  $z = \varphi_2(x, y)$ ,  $x < 0$ , tal que  $\varphi_2(-1, 1) = \frac{3\pi}{4}$  e, para todo  $x < 0$ ,

$$\nabla \varphi_2(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

7. Seja  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ . Determine  $z = \varphi(x, y)$ ,  $(x, y) \in A$ , tal que  $\varphi(-1, 1) = \frac{3\pi}{4}$  e, para todo  $(x, y) \in A$ ,

$$\nabla \varphi(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

(Sugestão. Utilize os Exercícios 5 e 6.)

8. Um campo de forças  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ , onde  $P$  e  $Q$  são funções definidas num aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$ , denomina-se *conservativo* se existe um campo escalar  $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla \varphi(x, y) = \vec{F}(x, y) \text{ em } A.$$

Uma tal função  $\varphi$ , quando existe, denomina-se *função potencial* associada ao campo  $\vec{F}$ . O campo de forças dado é conservativo? Justifique.

$$a) \vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$b) \vec{F}(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$$

c)  $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + (x + 2y)\vec{j}$       d)  $\vec{F}(x, y) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$   
 e)  $\vec{F}(x, y) = 4\vec{i} + x^2\vec{j}$       f)  $\vec{F}(x, y) = e^{x-y}(2x\vec{i} - 2y\vec{j})$

9. Seja  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  um campo de forças com  $P$  e  $Q$  contínuas no aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , uma curva de classe  $C^1$ , com  $\gamma(a) = \gamma(b)$  ( $\gamma$  é uma curva fechada). Suponha que, para todo  $t \in [a, b]$ ,  $\gamma(t) \in A$ . Prove que se  $\vec{F}$  for conservativo, então,

$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = 0$$

10. Seja  $\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{j}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ .  
 a) Verifique que, para todo  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

onde  $P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$  e  $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ .

b) Calcule  $\int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$ , onde  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

c)  $\vec{F}$  é conservativo? Por quê?

11. Seja  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  um campo de forças com  $P$  e  $Q$  definidas e contínuas no aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ . Se  $\vec{F}$  for conservativo então existirá uma função escalar  $U(x, y)$  definida em  $A$  tal que  $\vec{F} = -\nabla U$  em  $A$ . Uma tal função denomina-se *função energia potencial* associada ao campo  $\vec{F}$ . Determine, caso exista, a função energia potencial associada ao campo  $\vec{F}$  dado e satisfazendo a condição dada.

a)  $\vec{F}(x, y) = -6x\vec{i} - 2y\vec{j}$  e  $U(0, 0) = 0$ .

b)  $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  e  $U(0, 0) = 0$ .

c)  $\vec{F}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  e  $U(3, 4) = \frac{1}{5}$ .

d)  $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} - xy\vec{j}$  e  $U(0, 0) = 1.000$ .

12. Seja  $U(x, y) = 2x^2 + \frac{1}{2}y^2$  a função energia potencial associada ao campo  $\vec{F}$ .

a) Determine  $\vec{F}$ .

b) Uma partícula de massa 1 é abandonada na posição (1, 1) com velocidade nula. Admita que  $\vec{F}$  é a única força atuando sobre a partícula. Determine a posição  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  da partícula no instante  $t$ . Desenhe a trajetória descrita pela partícula.

(Sugestão. Pela lei de Newton  $\ddot{\gamma}(t) = \vec{F}(\gamma(t))$ .)

13. Seja  $U(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$  a energia potencial associada do campo  $\vec{F}$ .

a) Determine  $\vec{F}$ .

b) Uma partícula de massa  $m = 1$  é abandonada na posição (1, 1) com velocidade inicial  $\vec{v}_0 = (-1, 1)$ . Sendo  $\vec{F}$  a única força atuando sobre a partícula, determine a posição  $\gamma(t)$  da partícula no instante  $t$ . Desenhe a trajetória descrita pela partícula.

14. Seja  $\vec{F}$  a força do exercício anterior. Uma partícula de massa  $m = 1$  é abandonada na posição (1, 0) com velocidade inicial  $\vec{v}_0 = (0, 2)$ . Sendo  $\vec{F}$  a única força atuando sobre a partícula, determine a posição  $\gamma(t)$  da partícula no instante  $t$ . Desenhe a trajetória descrita pela partícula.

### 15.4. POLINÔMIO DE TAYLOR DE ORDEM 1

Seja  $f(x, y)$  de classe  $C^2$  no aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Sejam  $(x_0, y_0) \in A$  e  $(h, k) \neq (0, 0)$  tais que o segmento de extremidades  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0 + h, y_0 + k)$  esteja contido em  $A$ . Consideremos a função  $g$  dada por

$$g(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt), t \in [0, 1].$$

A  $g$  fornece os valores que  $f$  assume nos pontos do segmento de extremidades  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0 + h, y_0 + k)$ . Esta função  $g$  desempenhará o papel de ligação na extensão da fórmula de Taylor para funções de duas variáveis reais.

Pela fórmula de Taylor, com resto de Lagrange, para funções de uma variável, temos:

$$\textcircled{1} \quad g(1) = g(0) + g'(0)(1 - 0) + \frac{g''(\bar{t})}{2}(1 - 0)^2$$

para algum  $\bar{t}$  em  $]0, 1[$ .

Calculemos, agora,  $g'(t)$  e  $g''(t)$ :

$$g'(t) = \frac{d}{dt} [f(x, y)] = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dt}$$

ou seja,

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k$$

onde  $x = x_0 + ht$  e  $y = y_0 + kt$ ;

$$g''(t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] h + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] k = \\ = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)h + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)k \right] h + \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)h + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)k \right] k,$$

ou seja,

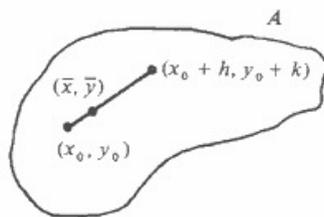
$$g''(\bar{t}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)k^2$$

onde  $x = x_0 + ht$  e  $y = y_0 + kt$ .

Temos, então:

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} g(1) = f(x_0 + h, y_0 + k), & g(0) = f(x_0, y_0), \\ g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k & \text{e} \\ g''(\bar{t}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})k^2 \\ \text{onde } \bar{x} = x_0 + h\bar{t} \text{ e } \bar{y} = y_0 + k\bar{t}. \end{cases}$$

Observe que  $(\bar{x}, \bar{y})$  é um ponto interno ao segmento de extremidades  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0 + h, y_0 + k)$ , pois  $\bar{t} \in ]0, 1[$ .



Substituindo  $\textcircled{2}$  em  $\textcircled{1}$  resulta:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + E(h, k)$$

onde

$$E(h, k) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})k^2 \right]$$

para algum  $(\bar{x}, \bar{y})$  interno ao segmento de extremidades  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0 + h, y_0 + k)$ .

Demonstramos, assim, o seguinte teorema.

**Teorema.** Seja  $f(x, y)$  de classe  $C^2$  no aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$  e sejam  $(x_0, y_0) \in A$  e  $(h, k) \neq (0, 0)$  tais que o segmento de extremidades  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0 + h, y_0 + k)$  esteja contido em  $A$ . Nestas condições,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + E(h, k)$$

onde

$$E(h, k) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})k^2 \right]$$

para algum  $(\bar{x}, \bar{y})$  interno ao segmento de extremidades  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0 + h, y_0 + k)$ .

**Observação.** Fazendo  $x = x_0 + h$  e  $y = y_0 + k$ , obtemos

$$f(x, y) = \underbrace{f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}_{P_1(x, y)} + E_1(x, y)$$

onde

$$\textcircled{3} \quad E_1(x, y) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})(y - y_0)^2 \right]$$

para algum  $(\bar{x}, \bar{y})$  interno ao segmento de extremidades  $(x_0, y_0)$  e  $(x, y)$ .

O polinômio

$$P_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

denomina-se *polinômio de Taylor de ordem 1 de  $f(x, y)$  em volta de  $(x_0, y_0)$* .

Observe que o gráfico de  $P_1(x, y)$  é o plano tangente ao gráfico de  $f$  em  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .  $E_1(x, y)$  é o erro que se comete na aproximação de  $f(x, y)$  por  $P_1(x, y)$ ;  $\textcircled{3}$  é a expressão do erro na *forma de Lagrange*. (Às vezes, usa-se a expressão *resto* em lugar de erro.)

**EXEMPLO.** Seja  $f(x, y) = \ln(x + y)$ .

a) Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 de  $f$  em volta de  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

b) Mostre que para todo  $(x, y)$ , com  $x + y > 1$ ,  $|\ln(x + y) - (x + y - 1)| < \frac{1}{2}(x + y - 1)^2$ .

**Solução**

$$a) P_1(x, y) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right).$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x + y} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x + y}$$

resulta:

$$P_1(x, y) = 0 + \left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right).$$

ou seja,

$$P_1(x, y) = x + y - 1.$$

b)  $\ln(x + y) = P_1(x, y) + E(x, y)$ , onde

$$E(x, y) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \right]$$

para algum  $(\bar{x}, \bar{y})$  interno ao segmento de extremidades  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  e  $(x, y)$ . Temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-1}{(x+y)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

Como estamos supondo  $x + y > 1$ , teremos, também,  $\bar{x} + \bar{y} > 1$ . Assim, para todo  $(x, y)$ ,

com  $x + y > 1$ ,  $\left| \frac{-1}{(\bar{x} + \bar{y})^2} \right| < 1$ . Segue que

$$|E(x, y)| < \frac{1}{2} \left[ \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \left( x - \frac{1}{2} \right) \left( y - \frac{1}{2} \right) + \left( y - \frac{1}{2} \right)^2 \right]$$

ou

$$|E(x, y)| < \frac{1}{2} (x + y - 1)^2$$

para todo  $(x, y)$ , com  $x + y > 1$ . Assim,

$$|\ln(x + y) - P_1(x, y)| < \frac{1}{2} (x + y - 1)^2$$

ou

$$|\ln(x + y) - (x + y - 1)| < \frac{1}{2} (x + y - 1)^2$$

para todo  $(x, y)$ , com  $x + y > 1$ .

#### Exercícios 15.4

1. Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada, em volta do ponto  $(x_0, y_0)$  dado.

a)  $f(x, y) = e^{x+5y}$  e  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

b)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$  e  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ .

c)  $f(x, y) = \sin(3x + 4y)$  e  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

2. Sejam  $f(x, y) = e^{x+5y}$  e  $P_1(x, y)$  o polinômio de Taylor de ordem 1 de  $f$  em volta de  $(0, 0)$ .

a) Mostre que para todo  $(x, y)$ , com  $x + 5y < 1$ ,

$$|e^{x+5y} - P_1(x, y)| < \frac{3}{2} (x + 5y)^2$$

b) Avalie o erro que se comete na aproximação

$$e^{x+5y} \approx P_1(x, y)$$

para  $x = 0,01$  e  $y = 0,01$ .

3. Sejam  $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$  e  $P_1(x, y)$  o polinômio de Taylor de ordem 1 de  $f$  em volta de  $(1, 1)$ . Mostre que para todo  $(x, y)$ , com  $|x - 1| < 1$  e  $|y - 1| < 1$ ,

$$|f(x, y) - P_1(x, y)| < 7(x - 1)^2 + 6(y - 1)^2$$

4. Sejam  $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$  e  $P_1(x, y)$  o polinômio de Taylor de ordem 1 de  $f$  em volta de  $(1, 1)$ .

a) Utilizando  $P_1(x, y)$ , calcule um valor aproximado para  $f(x, y)$ , sendo  $x = 1,001$  e  $y = 0,99$ .

b) Avalie o erro que se comete na aproximação do item a).

(Sugestão. Utilize o Exercício 3.)

5. Seja  $(x_0, y_0)$  um ponto crítico de  $f(x, y)$  e suponha que  $f$  seja de classe  $C^2$  na bola aberta  $B$  de centro  $(x_0, y_0)$ . Prove que para todo  $(x, y)$  em  $B$ , existe  $(\bar{x}, \bar{y})$  interno ao segmento de extremidades  $(x_0, y_0)$  e  $(x, y)$  tal que

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})(y - y_0)^2 \right]$$

6. Seja  $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + m$  ( $a, b, c, d, e, m$  constantes) e seja  $(x_0, y_0)$  um ponto crítico de  $f$ . Prove que, para todo  $(h, k)$ ,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah^2 + bhk + ck^2.$$

7. Sejam  $f(x, y)$  e  $(x_0, y_0)$  como no exercício anterior. Prove que se  $a > 0$  e  $b^2 - 4ac < 0$ , então

$$f(x_0 + h, y_0 + k) > f(x_0, y_0)$$

para todo  $(h, k) \neq (0, 0)$ . Como é o gráfico de  $f$ ?

8. Suponha  $f(x, y)$  da classe  $C^2$  na bola aberta  $B$  de centro  $(x_0, y_0)$  e que as derivadas parciais de 2.ª ordem sejam limitadas em  $B$ . Prove que existe  $M > 0$  tal que, para todo  $(x, y) \in B$ ,

$$|f(x, y) - P_1(x, y)| \leq M \|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2$$

onde  $P_1(x, y)$  é o polinômio de Taylor de ordem 1 de  $f$  em volta de  $(x_0, y_0)$ .

9. Considere o polinômio  $P(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c$ , com  $a, b, c, x_0$  e  $y_0$  constantes. Suponha que exista  $M > 0$  tal que, para todo  $(x, y)$ ,

$$|P(x, y)| \leq M \|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2.$$

Prove que  $P(x, y) = 0$  em  $\mathbb{R}^2$ .

10. Seja  $f(x, y)$  de classe  $C^2$  no aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$  e seja  $(x_0, y_0)$  um ponto de  $A$ . Seja o polinômio  $P(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c$ , com  $a, b$  e  $c$  constantes. Suponha que existam  $M > 0$  e uma bola aberta  $B$  de centro  $(x_0, y_0)$ , com  $B \subset A$ , tal que, para todo  $(x, y)$  em  $B$ ,

$$|f(x, y) - P(x, y)| \leq M \|(x, y) - (x_0, y_0)\|^2.$$

Prove que  $P$  é o polinômio de Taylor de ordem 1 de  $f$  em volta de  $(x_0, y_0)$ .

## 15.5. POLINÔMIO DE TAYLOR DE ORDEM 2

Suponhamos  $f(x, y)$  de classe  $C^3$  no aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Sejam  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_0 + h, y_0 + k)$  e  $g(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$  como na seção anterior. Pela fórmula de Taylor, com resto de Lagrange, para funções de uma variável segue que

$$\textcircled{1} \quad g(1) = g(0) + g'(0)(1 - 0) + \frac{g''(0)}{2!}(1 - 0)^2 + \frac{g'''(\bar{t})}{3!}(1 - 0)^3$$

para algum  $\bar{t}$  em  $]0, 1[$ .

Vimos no parágrafo anterior que

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k$$

e

$$g''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)k^2$$

onde  $x = x_0 + ht$  e  $y = y_0 + kt$ . Deixamos a seu cargo verificar que

$$g'''(t) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y)h^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y)h^2k + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y)hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y)k^3$$

onde  $x = x_0 + ht$  e  $y = y_0 + kt$ . Temos:

$$\textcircled{2} \begin{cases} g(1) = f(x_0 + h, y_0 + k), g(0) = f(x_0, y_0), \\ g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k, \\ g''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2, \\ g'''(\bar{t}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\bar{x}, \bar{y})h^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\bar{x}, \bar{y})h^2k + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\bar{x}, \bar{y})k^3 \end{cases}$$

onde  $\bar{x} = x_0 + h\bar{t}$  e  $\bar{y} = y_0 + k\bar{t}$ .

Substituindo  $\textcircled{2}$  em  $\textcircled{1}$  resulta:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2 \right] + E(h, k)$$

onde

$$E(h, k) = \frac{1}{3!} \left[ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\bar{x}, \bar{y})h^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\bar{x}, \bar{y})h^2k + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\bar{x}, \bar{y})k^3 \right]$$

para algum  $(\bar{x}, \bar{y})$  interno ao segmento de extremidades  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0 + h, y_0 + k)$ .

Demonstramos assim o seguinte

**Teorema.** Seja  $(\bar{x}, \bar{y})$  de classe  $C^3$  no aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$  e sejam  $(x_0, y_0) \in A$  e  $(h, k) \neq (0, 0)$  tais que o segmento de extremidades  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0 + h, y_0 + k)$  esteja contido em  $A$ .

Nestas condições,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2 \right] + E(h, k)$$

onde

$$E(h, k) = \frac{1}{3!} \left[ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\bar{x}, \bar{y})h^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\bar{x}, \bar{y})h^2k + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\bar{x}, \bar{y})k^3 \right]$$

para algum  $(\bar{x}, \bar{y})$  interno ao segmento de extremidades  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0 + h, y_0 + k)$ .

O polinômio

$$P_2(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right]$$

denomina-se *polinômio de Taylor de ordem 2 de  $f$  em volta de  $(x_0, y_0)$* .

Fazendo  $x = x_0 + h$  e  $y = y_0 + k$  no teorema acima, resulta:

$$f(x, y) = P_2(x, y) + E_1(x, y)$$

onde

$$E_1(x, y) = \frac{1}{3!} \left[ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)^2(y - y_0) + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)(y - y_0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\bar{x}, \bar{y})(y - y_0)^3 \right]$$

para algum  $(\bar{x}, \bar{y})$  interno ao segmento de extremidades  $(x_0, y_0)$  e  $(x, y)$ .

**Exercícios 15.5**

- Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 da função dada, em volta do ponto  $(x_0, y_0)$  dado.
  - $f(x, y) = x \sin y$  e  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .
  - $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3y^3 + x - y$  e  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ .
- Expresse o polinômio  $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3y^3 + x - y$  como soma de termos do tipo  $a(x-1)^p(y-1)^q$ .
- Seja  $P_2(x, y)$  o polinômio de Taylor de ordem 2 de  $f(x, y) = x \sin y$  em volta de  $(0, 0)$ . Mostre que

$$|f(x, y) - P_2(x, y)| < \frac{|y|^2}{2} \left[ |x| + \frac{1}{3} |y| \right]$$

para todo  $(x, y)$ , com  $|x| < 1$ .

4. Seja  $f(x, y)$  de classe  $C^3$  no aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$  e seja  $(x_0, y_0)$  um ponto de  $A$  (lembre-se de que  $f$  de classe  $C^2$  em  $A$  significa que todas as derivadas parciais de ordem 3 são contínuas em  $A$ ). Prove que existem uma bola aberta  $B$  de centro  $(x_0, y_0)$ , com  $B \in A$ , e um número  $M > 0$  tais que, para todo  $(x, y) \in B$ ,

$$|f(x, y) - P_2(x, y)| \leq M \| (x, y) - (x_0, y_0) \|^3$$

onde  $P_2(x, y)$  é o polinômio de Taylor de ordem 2 de  $f$  em volta de  $(x_0, y_0)$ . Conclua que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{E(x, y)}{\| (x, y) - (x_0, y_0) \|^2} = 0$$

onde  $E(x, y) = f(x, y) - P_2(x, y)$ ; isto é, o erro  $E(x, y)$  tende a zero mais rapidamente que  $\| (x, y) - (x_0, y_0) \|^2$ , quando  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ .

5. Sejam  $f(x, y)$ ,  $P_2(x, y)$  e  $(x_0, y_0)$  como no exercício 4. Prove que existe uma função  $\varphi(x, y)$  definida em  $A$  tal que, para todo  $(x, y)$  em  $A$ ,

$$f(x, y) = P_2(x, y) + \varphi(x, y) \| (x, y) - (x_0, y_0) \|^2$$

com

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) = 0.$$

6. Seja  $f(x, y)$  de classe  $C^3$  no aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$  e seja  $(x_0, y_0)$  um ponto de  $A$ . Seja  $\bar{P}_2(x, y)$  um polinômio de grau no máximo 2. Prove que se

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - \bar{P}_2(x, y)}{\| (x, y) - (x_0, y_0) \|^2} = 0$$

então  $\bar{P}_2(x, y)$  é o polinômio de Taylor de ordem 2 de  $f$  em volta de  $(x_0, y_0)$ .

### 15.6. FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO DE LAGRANGE

Suponhamos  $f(x, y)$  de classe  $C^{n+1}$  no aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$ . Sejam  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_0 + h, y_0 + k)$  e  $g(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$  como na seção anterior. Vimos que

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k,$$

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{p=0}^2 \binom{2}{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{2-p} \partial y^p}(x, y) h^{2-p} k^p = \\ &= \binom{2}{0} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) h^2 + \binom{2}{1} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) hk + \binom{2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) k^2 = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) k^2 \end{aligned}$$

e que

$$g'''(t) = \sum_{p=0}^3 \binom{3}{p} \frac{\partial^3 f}{\partial x^{3-p} \partial y^p}(x, y) h^{3-p} k^p$$

onde  $x = x_0 + ht$  e  $y = y_0 + kt$ . Deixamos a seu cargo provar por indução que

$$g^{(r)}(t) = \sum_{p=0}^r \binom{r}{p} \frac{\partial^r f}{\partial x^{r-p} \partial y^p}(x, y) h^{r-p} k^p$$

onde  $x = x_0 + ht$  e  $y = y_0 + kt$ .

Pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange para funções de uma variável, temos:

$$g(1) = g(0) + \sum_{r=1}^n \frac{1}{r!} g^{(r)}(0) + \frac{g^{(n+1)}(\bar{t})}{(n+1)!}$$

para algum  $\bar{t}$  em  $]0, 1[$ . Segue que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \sum_{r=1}^n \frac{1}{r!} \left[ \sum_{p=0}^r \binom{r}{p} \frac{\partial^r f}{\partial x^{r-p} \partial y^p}(x_0, y_0) h^{r-p} k^p \right] + E(h, k)$$

onde

$$E(h, k) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-p} \partial y^p}(\bar{x}, \bar{y}) h^{n+1-p} k^p$$

para algum  $(\bar{x}, \bar{y})$  interno ao segmento de extremidades  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0 + h, y_0 + k)$ .

Fica provado assim o seguinte

**Teorema (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange).** Seja  $f(x, y)$  de classe  $C^{n+1}$  no aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$  e sejam  $(x_0, y_0) \in A$  e  $(h, k) \neq (0, 0)$  tais que o segmento de extremidades  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0 + h, y_0 + k)$  esteja contido em  $A$ . Nestas condições

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \sum_{r=1}^n \frac{1}{r!} \left[ \sum_{p=0}^r \binom{r}{p} \frac{\partial^r f}{\partial x^{r-p} \partial y^p}(x_0, y_0) h^{r-p} k^p \right] + E(h, k)$$

onde

$$E(h, k) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-p} \partial y^p}(\bar{x}, \bar{y}) h^{n+1-p} k^p$$

para algum  $(\bar{x}, \bar{y})$  interno ao segmento de extremidades  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0 + h, y_0 + k)$ .

# 16

## MÁXIMOS E MÍNIMOS

### 16.1. PONTOS DE MÁXIMO E PONTOS DE MÍNIMO

Seja  $f(x, y)$  uma função a valores reais e seja  $(x_0, y_0) \in A$ , com  $A \subset D_f$ . Dizemos que  $(x_0, y_0)$  é ponto de máximo de  $f$  em  $A$  se, para todo  $(x, y)$  em  $A$ ,

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Sendo  $(x_0, y_0)$  ponto de máximo de  $f$  em  $A$ , o número  $f(x_0, y_0)$  será denominado valor máximo de  $f$  em  $A$ .

Dizemos que  $(x_0, y_0) \in D_f$  é ponto de máximo global ou absoluto de  $f$  se, para todo  $(x, y) \in D_f$ ,

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Diremos, neste caso, que  $f(x_0, y_0)$  é o valor máximo de  $f$ .

Finalmente, diremos que  $(x_0, y_0) \in D_f$  é ponto de máximo local de  $f$  se existir uma bola aberta  $B$  de centro  $(x_0, y_0)$  tal que

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

para todo  $(x, y) \in B \cap D_f$ .

Deixamos a seu cargo definir ponto de mínimo de  $f$  em  $A \subset D_f$ , ponto de mínimo global e ponto de mínimo local.

Os pontos de máximo e de mínimo de uma função  $f$  denominam-se *extremantes* de  $f$ .

**EXEMPLO 1.**  $(0, 0)$  é ponto de mínimo global de  $f(x, y) = x^2 + y^2$  e  $f(0, 0) = 0$  é o valor mínimo de  $f$ , pois,  $f(x, y) \geq f(0, 0)$ , para todo  $(x, y)$  em  $\mathbb{R}^2$ .

**EXEMPLO 2.** Seja  $f(x, y) = 2x - y$  e seja  $A$  o conjunto determinado pelas condições  $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3$  e  $y \geq x$ . Estude  $f$  com relação a máximo e mínimo em  $A$ .

*Solução*

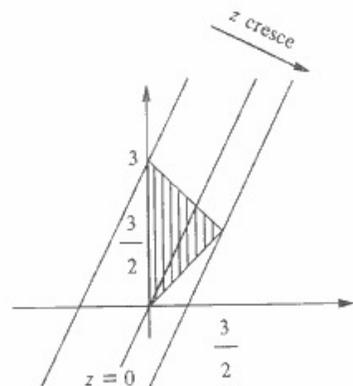
Tal estudo será feito com auxílio das curvas de nível de  $f$ .

$$z = 2x - y$$

$$z = 0 \Leftrightarrow y = 2x$$

$$z = -3 \Leftrightarrow y = 2x + 3 \quad [f(0, 3) = -3]$$

$$z = \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = 2x - \frac{3}{2} \quad \left[ f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \right]$$



Vemos, geometricamente, que  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$  e  $(0, 3)$  são, respectivamente, pontos de máximo

e de mínimo de  $f$  em  $A$ ;  $f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$  é o valor máximo e  $f(0, 3) = -3$  é o valor mínimo de  $f$  em  $A$ . Para comprovar analiticamente que o que dissemos acima está correto, podemos proceder do seguinte modo: para todo  $(x, y)$  em  $A$

$$f(x, y) - f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 2x - y - \frac{3}{2} = -\left(\frac{3}{2} - x\right) - (y - x) \leq 0$$

ou seja,  $f(x, y) \leq f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ .

$$f(x, y) - f(0, 3) = 2x - y + 3 = 3x + (3 - x - y) \geq 0$$

ou seja,

$$f(x, y) \geq f(0, 3).$$

**EXEMPLO 3.** Seja  $(x, y)$  definida em  $\mathbb{R}^2$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 4 \\ 1 - (x - 3)^2 - y^2 & \text{se } x^2 + y^2 > 4. \end{cases}$$

$(0, 0)$  é ponto de mínimo local;  $(3, 0)$  é ponto de máximo local e todo  $(x_0, y_0)$  pertencente à circunferência  $x^2 + y^2 = 4$  é ponto de máximo global de  $f$ . Deixamos a seu cargo fazer um esboço do gráfico de  $f$  e verificar as afirmações acima.

### 16.2. CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA QUE UM PONTO INTERIOR AO DOMÍNIO DE $f$ SEJA UM EXTREMANTE LOCAL DE $f$

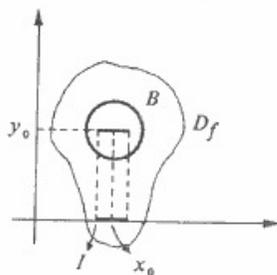
O teorema que enunciaremos e demonstraremos a seguir fornece-nos um critério para seleccionar, entre os pontos interiores de  $D_f$ , candidatas a extremantes locais de  $f$ .

**Teorema 1.** Seja  $(x_0, y_0)$  um ponto interior de  $D_f$  e suponhamos que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  existam. Nestas condições, uma condição necessária para que  $(x_0, y_0)$  seja um extremante local de  $f$  é que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ .

*Demonstração*

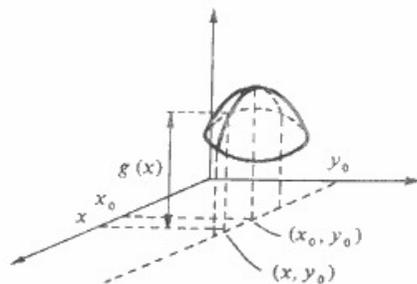
Suponhamos que  $(x_0, y_0)$  seja um ponto de máximo local de  $f$ . Como  $(x_0, y_0)$  é ponto interior de  $D_f$ , existe uma bola aberta  $B \subset D_f$ ,  $B$  de centro  $(x_0, y_0)$ , tal que, para todo  $(x, y)$  em  $B$

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$



Por outro lado, existe um intervalo aberto  $I$ , com  $x_0 \in I$ , tal que para todo  $x \in I, (x, y_0) \in B$ . Consideremos a função  $g$  dada por

$$g(x) = f(x, y_0), x \in I.$$



Temos:

$$\begin{cases} g \text{ é derivável em } x_0 \left( g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \\ x_0 \text{ é ponto interior de } I \\ x_0 \text{ é ponto de máximo local de } g \end{cases}$$

daí

$$g'(x_0) = 0$$

e, portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

De modo análogo, demonstra-se que  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ . ■

Segue deste teorema que se  $(x_0, y_0)$  for interior a  $D_f$ ,  $f$  diferenciável em  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0, y_0)$  extremante local de  $f$ , então o plano tangente ao gráfico de  $f$  em  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  será paralelo ao plano  $xy$ .

Dizemos que  $(x_0, y_0)$  é um *ponto crítico* ou *estacionário* de  $f$  se  $(x_0, y_0)$  for interior a  $D_f$  e se  $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ . O teorema anterior nos diz que se  $f$  admite derivadas parciais em todos os pontos interiores de  $D_f$ , então os pontos críticos de  $f$  são, entre os pontos interiores de  $D_f$ , os únicos candidatos a extremantes locais de  $f$ .

Um ponto  $(x_0, y_0) \in A$  que não é ponto interior de  $A$  denomina-se *ponto de fronteira* de  $A$ . O teorema anterior não se aplica a pontos de fronteira de  $D_f$ ; um ponto de fronteira de  $D_f$  pode ser um extremante local sem que as derivadas parciais se anulem nele. Os pontos de fronteira devem ser analisados separadamente.

**EXEMPLO 1.** Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Como  $D_f$  é um conjunto aberto ( $D_f = \mathbb{R}^2$ ), de

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \end{cases}$$

segue que  $(0, 0)$  é o único candidato a extremante local. Como  $f(x, y) \geq f(0, 0) = 0$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , resulta que  $(0, 0)$  é um ponto de mínimo global de  $f$ .

**EXEMPLO 2.** O único ponto crítico de  $f(x, y) = x^2 - y^2$  é  $(0, 0)$ . Verifica-se sem dificuldade que  $(0, 0)$  não é extremante local (para uma visualização geométrica, desenhe as intersecções do gráfico de  $f$  com os planos  $yz$  e  $xz$ ). O ponto  $(0, 0)$  denomina-se *ponto de sela*. O gráfico desta função tem o aspecto de uma "sela de cavalo": tente desenhá-lo.

**EXEMPLO 3.** Seja  $z = f(x, y)$ , com domínio  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$ , onde  $f(x, y) = x^2y + 3x$ . O ponto  $(0, 0)$  é um ponto de mínimo de  $f$  em  $A$  pois  $f(x, y) \geq f(0, 0)$  em  $A$ . Como  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3$ , segue que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 3 \neq 0$ . Este fato não contradiz o teorema 1, pois ele só se aplica a pontos interiores de  $D_f$  e  $(0, 0)$  não é ponto interior de  $D_f$  ( $D_f = A$ ).

Suponhamos, agora, que o domínio de  $f$  seja aberto e que  $f$  seja de classe  $C^2$ . Suponhamos, ainda, que  $(x_0, y_0) \in D_f$  seja um ponto de máximo local de  $f$ . Consideremos a função  $g(x)$  dada por

$$g(x) = f(x, y_0).$$

Tendo em vista as hipóteses sobre  $f$ , segue que  $x_0$  é ponto interior do domínio de  $g$  e, além disso, é ponto de máximo local de  $g$ ; como  $g$  é, também, de classe  $C^2$  teremos que ter necessariamente

$$g'(x_0) = 0 \text{ e } g''(x_0) \leq 0$$

(observe que se tivéssemos  $g''(x_0) > 0$ ,  $x_0$  teria que ser ponto de mínimo local de  $g$ ). Da mesma forma, considerando a função  $h(y) = f(x_0, y)$ , teremos que ter necessariamente

$$h'(y_0) = 0 \text{ e } h''(y_0) \leq 0.$$

Fica provado assim o seguinte teorema.

**Teorema 2.** Seja  $f$  de classe  $C^2$  e seja  $(x_0, y_0)$  um ponto interior do domínio de  $f$ . Uma condição necessária para que  $(x_0, y_0)$  seja ponto de máximo local de  $f$  é que  $(x_0, y_0)$  seja ponto crítico de  $f$ , além disso,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0$ . (Interprete geometricamente.)

Se no teorema acima as condições  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0$  forem trocadas por  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \geq 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \geq 0$  teremos uma condição necessária para  $(x_0, y_0)$  ser ponto de mínimo local de  $f$ .

**EXEMPLO 4.** Determine os candidatos a extremantes locais de  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$ .

*Solução*

Os únicos candidatos a extremantes locais são os pontos críticos, pois o domínio de  $f$  ( $D_f = \mathbb{R}^2$ ) é aberto. De

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3$$

resulta que os candidatos a extremantes locais são as soluções do sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0. \end{cases}$$

As soluções do sistema são:  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, -1)$  e  $(-1, -1)$ . Temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y.$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 6$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = 6$ ; logo,  $(1, 1)$  é candidato a ponto de mínimo local.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 1) = -6$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 1) = 6$ ; logo,  $(-1, 1)$  não é extremante local. O mesmo acontece com o ponto  $(1, -1)$ . (Interprete geometricamente.)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -6$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -1) = -6$ ; logo,  $(-1, -1)$  é candidato a ponto de máximo local.

Seja  $(x_0, y_0)$  um ponto crítico de  $f(x, y)$ . Sejam  $g(x) = f(x, y_0)$  e  $h(y) = f(x_0, y)$ . Observemos que se  $x_0$  não for extremante local de  $g$ , então  $(x_0, y_0)$  não será extremante local de  $f$ . Da mesma forma, se  $y_0$  não for extremante local de  $h$ , então  $(x_0, y_0)$  não será extremante local de  $f$ . (Verifique.)

### Exercícios 16.2

Selecione os candidatos a extremantes locais, sendo  $f(x, y) =$

1.  $2x^2 + y^2 - 2xy + x - y.$

2.  $x^2 - y^2 + 3xy - x + y.$

3.  $x^3 - y^2 + xy + 5.$

4.  $x^3 + y^3 - xy.$

5.  $x^4 + y^4 + 4x + 4y.$

6.  $x^5 + y^5 - 5x - 5y.$

## 16.3. UMA CONDIÇÃO SUFICIENTE PARA UM PONTO CRÍTICO SER EXTREMANTE LOCAL

Seja  $f(x, y)$  de classe  $C^2$ . A função  $H$  dada por

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix}$$

denomina-se *hessiano* de  $f$ . Observe que

$$H(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right]^2.$$

O próximo teorema fornece-nos uma condição suficiente para um ponto crítico de  $f$  ser extremante local de  $f$ .

**Teorema.** Sejam  $f(x, y)$  de classe  $C^2$  e  $(x_0, y_0)$  um ponto interior de  $D_f$ . Suponhamos que  $(x_0, y_0)$  seja ponto crítico de  $f$ . Então

- a) Se  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$  e  $H(x_0, y_0) > 0$ , então  $(x_0, y_0)$  será ponto de mínimo local de  $f$ .  
 b) Se  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$  e  $H(x_0, y_0) > 0$ , então  $(x_0, y_0)$  será ponto de máximo local de  $f$ .  
 c) Se  $H(x_0, y_0) < 0$ , então  $(x_0, y_0)$  não será extremante local. Neste caso,  $(x_0, y_0)$  será ponto de sela.  
 d) Se  $H(x_0, y_0) = 0$ , nada se pode afirmar.

#### Demonstração

Veja Exemplos 3, 4 e 5 da Sec. 16.6. ■

**EXEMPLO 1.** Seja  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$ . Os pontos críticos de  $f$  são:  $(1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  e  $(1, -1)$ . Temos:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x.$$

Então:

$H(1, 1) = 36 > 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 6 > 0$ ; logo,  $(1, 1)$  é ponto de mínimo local. Note que  $(1, 1)$  não é ponto de mínimo global, pois  $f(-3, 0) < f(1, 1)$ .

$H(-1, -1) = 36 > 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -6 < 0$ ; logo  $(-1, -1)$  é ponto de máximo local; entretanto,  $(-1, -1)$  não é ponto de máximo global, pois  $f(4, 0) > f(-1, -1)$ . Como  $H(-1, 1) < 0$  e  $H(1, -1) < 0$ , segue que  $(-1, 1)$  e  $(1, -1)$  não são extremantes, são pontos de sela.

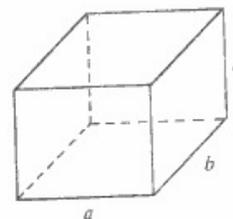
**EXEMPLO 2.** Seja  $f(x, y) = 3x^4 + 2y^4$ . O único ponto crítico de  $f$  é  $(0, 0)$  e temos  $H(0, 0) = 0$ ; logo, o teorema não nos fornece informação sobre este ponto crítico. Trabalhando diretamente com a função verifica-se sem dificuldade que  $(0, 0)$  é ponto de mínimo global.

**EXEMPLO 3.** Seja  $f(x, y) = x^5 + 2y^5$ . O único ponto crítico é  $(0, 0)$  e  $H(0, 0) = 0$ . Como  $x = 0$  não é extremante local de  $f(x, 0) = x^5$ , resulta que  $(0, 0)$  não é extremante local de  $f$ .

**EXEMPLO 4.** Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, com a forma de um paralelepípedo retângulo e com  $1 \text{ m}^3$  de volume. O material a ser utilizado nas laterais custa o triplo do que será utilizado no fundo. Determine as dimensões da caixa que minimiza o custo do material.

Solução

$$abc = 1 \text{ ou } c = \frac{1}{ab}$$



O problema consiste em minimizar

$$f(a, b) = 3(2ac + 2bc) + ab, \text{ onde } c = \frac{1}{ab},$$

ou

$$f(a, b) = \frac{6}{b} + \frac{6}{a} + ab, \text{ } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -\frac{6}{a^2} + b \text{ e } \frac{\partial f}{\partial b} = -\frac{6}{b^2} + a.$$

$$\begin{cases} -\frac{6}{a^2} + b = 0 \\ -\frac{6}{b^2} + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2b = 6 \\ ab^2 = 6 \end{cases}$$

$$a^2b = ab^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Assim,  $(a, b) = (\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6})$  é o único ponto crítico de  $f$ . Como  $H(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6}) > 0$  e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6}) > 0$$

(verifique) resulta que  $(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6})$  é ponto de mínimo local. Pela natureza do problema, é razoável esperar que este ponto seja de mínimo global. As dimensões que minimizam o custo são:  $a = \sqrt[3]{6}$ ,  $b = \sqrt[3]{6}$  e  $c = \frac{\sqrt[3]{6}}{6}$ . (Uma forma elegante de justificar que  $(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6})$  é ponto de mínimo global é a seguinte: para cada  $a > 0$ , seja  $h(a)$  o valor mínimo de  $g(b) = \frac{6}{a} + \frac{6}{b} +$

$ab, b > 0$ ; verifique, então, que o valor mínimo de  $h(a)$  é  $f(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6})$ . Descreva geometricamente este processo.)

Exercícios 16.3

1. Estude com relação a máximos e mínimos locais a função  $f(x, y) =$

- a)  $x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$
- b)  $x^2 + y^3 + xy - 3x - 4y + 5$
- c)  $x^3 + 2xy + y^2 - 5x$
- d)  $-x^2 + y^2 + 2xy + 4x - 2y$
- e)  $x^3 - 3x^2y + 27y$
- f)  $x^2 - 4xy + 4y^2 - x + 3y + 1$
- g)  $\sqrt[3]{x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y}$
- h)  $x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$
- i)  $x^4 + xy + y^2 - 6x - 5y$
- j)  $x^4 + y^4 + 4x + 4y$
- l)  $x^5 + y^5 - 5x - 5y$
- m)  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} + xy, x > 0 \text{ e } y > 0$

2. Seja  $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + l$ , onde  $a, b, c, d, e$  e  $l$  são constantes. Prove que se  $(x_0, y_0)$  for extremante local de  $f$ , então será extremante global.

(Sugestão. Observe que o gráfico de  $g(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$  ( $h$  e  $k$  constantes) é uma parábola.)

3. Estude com relação a extremantes globais a função  $f(x, y) =$

- a)  $x^2 + 2xy + 2y^2 - x + 2y$
- b)  $x^2 - y^2 - 3xy + x + 4y$
- c)  $x + 2y - 2xy - x^2 - 3y^2$
- d)  $3x^2 + y^2 + xy - 2x - 2y$
- e)  $x^2 + 2y^2 + 3xy + 2x + 2y$
- f)  $x^2 + y^2 - 2x - 4y$

(Sugestão. Utilize o Exercício 2.)

4. Determine o ponto do plano  $x + 2y - z = 4$  que se encontra mais próximo da origem.

5. Método dos mínimos quadrados. Dados  $n$  pares de números  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ , com  $n \geq 3$ , em geral não existirá uma função afim  $f(x) = \alpha x + \beta$  cujo gráfico passe por todos os  $n$  pontos. Entretanto, podemos determinar  $f$  de modo que a soma dos quadrados dos erros  $f(a_i) - b_i$  seja mínima. Pois bem, determine  $\alpha$  e  $\beta$  para que a soma

$$E(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n [f(a_i) - b_i]^2$$

seja mínima.

6. Determine, pelo método dos mínimos quadrados, a reta que melhor se ajusta aos dados:

- a) (1, 3), (2, 7) e (3, 8)
- b) (0, 1), (1, 3), (2, 3) e (3, 4)

7. Determinado produto apresenta uma demanda  $y$  (em milhares) quando o preço, por unidade, é  $x$  (em R\$). Foram observados os seguintes dados:

$x$	$y$
5	100
6	98
7	95
8	94

A tabela nos diz que ao preço unitário de 5 reais a demanda foi de 100.000 unidades; ao preço unitário de 6 reais a demanda foi de 98.000 unidades etc.

a) Determine, pelo método dos mínimos quadrados, a reta que melhor se ajusta aos dados observados.

b) Utilizando a reta encontrada no item a), faça uma previsão para a demanda quando o preço, por unidade, for 10 reais.

8. Considere as retas reversas  $r$  e  $s$  de equações

$$(x, y, z) = (0, 0, 2) + \lambda(1, 2, 0), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) = (0, 0, 4) + \mu(1, 1, 1), \mu \in \mathbb{R}$$

respectivamente. Determine  $P$  e  $Q$ , com  $P \in r$  e  $Q \in s$ , de modo que a distância de  $P$  a  $Q$  seja a menor possível.

9. Duas partículas  $P_1$  e  $P_2$  deslocam-se no espaço com velocidades constantes  $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$  e  $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$ , respectivamente. No instante  $t = 0$  a  $P_1$  encontra-se na posição  $(1, 1, 3)$ . Sabe-se que a trajetória descrita por  $P_2$  passa pelo ponto  $(1, 1, 0)$ . Qual deverá ser a posição de  $P_2$  no instante  $t = 0$  para que a distância mínima entre elas seja a menor possível?

10. Determinada empresa produz dois produtos cujas quantidades são indicadas por  $x$  e  $y$ . Tais produtos são oferecidos ao mercado consumidor a preços unitários  $p_1$  e  $p_2$ , respectivamente, que dependem de  $x$  e  $y$  conforme equações:  $p_1 = 120 - 2x$  e  $p_2 = 200 - y$ . O custo total da empresa para produzir e vender quantidades  $x$  e  $y$  dos produtos é dado por  $C = x^2 + 2y^2 + 2xy$ . Admitindo que toda produção da empresa seja absorvida pelo mercado, determine a produção que maximiza o lucro.

11. Para produzir determinado produto cuja quantidade é representada por  $z$ , uma empresa utiliza dois fatores de produção (insumos) cujas quantidades serão indicadas por  $x$  e  $y$ . Os preços unitários dos fatores de produção são, respectivamente, 2 e 1. O produto será oferecido ao mercado consumidor a um preço unitário igual a 5. A função de produção da empresa é dada por  $z = 900 - x^2 - y^2 + 32x + 41y$ . Determine a produção que maximiza o lucro.

12. Considere o sistema de partículas  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , localizadas nos pontos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  e de massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Seja  $N = (x, y)$ . Determine  $N$  para que o momento de inércia do sistema, em relação a  $N$ , seja mínimo. Conclua que o  $N$  encontrado é o centro de massa do sistema.

(Observação. O momento de inércia de  $P_i$  em relação a  $N$  é o produto de  $m_i$  pelo quadrado da distância de  $P_i$  a  $N$ ; o momento de inércia do sistema em relação a  $N$  é a soma dos momentos de inércia, em relação a  $N$ , das partículas que compõem o sistema.)

13. Determine o ponto do plano  $3x + 2y + z = 12$  cuja soma dos quadrados das distâncias a  $(0, 0, 0)$  e  $(1, 1, 1)$  seja mínima.

14. Considere a função  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2, x \geq 0$  e  $y \geq 0$ . Determine o plano tangente ao gráfico de  $f$  que forma com os planos coordenados tetraedro de volume mínimo.

15. Seja  $f(x, y, z)$  de classe  $C^2$  e seja  $(x_0, y_0, z_0)$  um ponto interior de  $D_f$ . Suponham os que  $(x_0, y_0, z_0)$  seja ponto crítico de  $f$ . Sejam  $H(x, y, z)$  e  $H_1(x, y, z)$  dadas por

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad H_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Pode ser provado (veja 16.6) que:

(i) se  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) > 0, H_1(x_0, y_0, z_0) > 0$  e  $H(x_0, y_0, z_0) > 0$ , então  $(x_0, y_0, z_0)$  será ponto de mínimo local.

(ii) se  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) < 0$ ,  $H_1(x_0, y_0, z_0) > 0$  e  $H(x_0, y_0, z_0) < 0$ , então  $(x_0, y_0, z_0)$  será ponto de máximo local.

Estude com relação a máximos e mínimos locais a função  $f(x, y, z) =$

a)  $x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 4xy - 2x - 4y - 8z + 2$ .

b)  $x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2$ .

c)  $x^3 + 2xy + y^2 + z^2 - 5x - 4z$ .

d)  $x^2 - y^2 + 4z^2 + 2xz - 4yz - 2x - 6z$ .

16. Seja  $f(x, y, z)$  de classe  $C^2$  e seja  $(x_0, y_0, z_0)$  ponto interior de  $D_f$ . Suponha que  $(x_0, y_0, z_0)$  seja ponto crítico de  $f$ . Prove:

a)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) \geq 0$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) \geq 0$ , e  $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) \geq 0$  é uma condição necessária para o ponto crítico  $(x_0, y_0, z_0)$  ser ponto de mínimo local de  $f$ .

b)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) \leq 0$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0) \leq 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) \leq 0$  é uma condição necessária para o ponto crítico  $(x_0, y_0, z_0)$  ser ponto de máximo local de  $f$ .

17. A função  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 5x + 2y - z + 8$  admite extremante local? Por quê?

18. Seja  $f(x, y)$  definida e de classe  $C^2$  no aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ . Suponha que, para todo  $(x, y) \in A$ ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) + 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0.$$

Prove que  $f$  não admite ponto de máximo local.

19. Seja  $f(x, y) = x^2(y^4 - x^2)$  e considere, para cada  $\vec{v} = (h, k)$ , a função  $g_{\vec{v}}(t) = f(ht, kt)$  (observe que  $g_{\vec{v}}$  fornece os valores de  $f$  sobre a reta  $(x, y) = t(h, k)$ ). Verifique que  $t=0$  é ponto de máximo local de cada  $g_{\vec{v}}$  mas que  $(0, 0)$  não é ponto de máximo local de  $f$ .

20. Seja  $f(x, y)$  uma função que admita derivadas parciais em todo  $\mathbb{R}^2$ . Suponha que  $f$  admita um único ponto crítico  $(x_0, y_0)$  e que este ponto crítico seja ponto de máximo local. Pode-se concluir que  $(x_0, y_0)$  é ponto de máximo global?

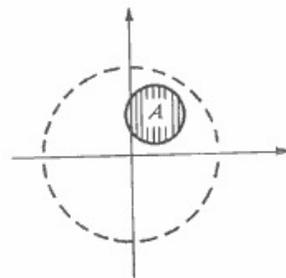
## 16.4. MÁXIMOS E MÍNIMOS SOBRE CONJUNTO COMPACTO

Nas seções anteriores determinamos condições necessárias e condições suficientes para que um ponto de  $D_f$  seja um extremante local de  $f$ . Entretanto, para muitos problemas que ocorrem na prática é importante determinar os extremantes em um subconjunto  $A$  de  $D_f$ . O teorema de Weierstrass, que é o próximo teorema a ser enunciado, fornece-nos condições suficientes para a existência de tais extremantes.

Para enunciar o teorema de Weierstrass precisaremos antes definir *conjunto compacto*.

Seja  $A$  um subconjunto do  $\mathbb{R}^2$ ; dizemos que  $A$  é um *conjunto limitado* se  $A$  estiver contido em alguma bola aberta de centro na origem. Dizemos, por outro lado, que  $A$  é um *conjunto fechado* se o seu complementar  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \notin A\}$  for um conjunto aberto. Pois bem, dizemos que  $A$  é um *conjunto compacto* se  $A$  for fechado e limitado.

**EXEMPLO 1.** Toda bola fechada  $A$  de centro  $(x_0, y_0)$  e raio  $r > 0$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq r\}$  é um conjunto compacto, pois é limitado e fechado.



$A$  é um conjunto limitado e seu complementar é um conjunto aberto.

**EXEMPLO 2.**  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$  é um conjunto fechado, mas não limitado, logo,  $A$  não é compacto.

**EXEMPLO 3.**  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 1\}$  é um conjunto limitado e fechado, logo compacto.

O teorema de Weierstrass, que enunciaremos a seguir (para demonstração veja Exercícios 9 a 12), conta-nos que se  $f$  for contínua no compacto  $A$ , então  $f$  assumirá em  $A$  valor máximo e valor mínimo.

**Teorema (de Weierstrass).** Se  $f(x, y)$  for contínua no compacto  $A$ , então existirão pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  em  $A$  tais que, para todo  $(x, y)$  em  $A$ ,

$$f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2).$$

O teorema de Weierstrass garante-nos que se  $f$  for contínua em  $A$  e  $A$  compacto, então existirão pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  em  $A$  tais que  $f(x_1, y_1)$  é o valor mínimo e  $f(x_2, y_2)$  é o valor máximo de  $f$  em  $A$ . Resta-nos, agora, o problema de determinar tais pontos. Suponha-mos que  $f$  admita derivadas parciais nos pontos interiores de  $A$ . Sabemos, então, que entre os pontos interiores de  $A$  os únicos com possibilidades de serem extremantes são os pontos críticos: a nossa primeira tarefa consiste, então, em determinar os pontos críticos de  $f$  que estão no interior de  $A$ . Em seguida, procuramos determinar os valores máximo e mínimo de  $f$  na fronteira de  $A$ . Comparamos, então, os valores que  $f$  assume nos pontos críticos com o valor máximo de  $f$  na fronteira de  $A$ : o maior destes valores será o valor máximo de  $f$  em  $A$ . De modo análogo, determina-se o valor mínimo.

**EXEMPLO 1.** Determine os extremantes de

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y \text{ em } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ e } |y| \leq 2\}.$$

*Solução*

Como  $f$  é contínua e  $A$  compacto, vamos proceder como dissemos anteriormente.

Pontos críticos de  $f$  no interior de  $A$ 

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3.$$

As soluções do sistema

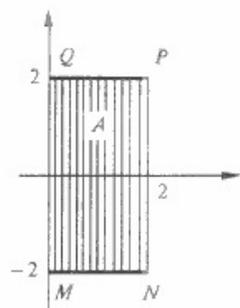
$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

são:  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  e  $(-1, -1)$ . Segue que  $(1, 1)$  e  $(1, -1)$  são os únicos pontos críticos no interior de  $A$ . Temos

$$f(1, 1) = -4 \text{ e } f(1, -1) = 0.$$

Análise dos pontos de fronteira

$$g(y) = f(2, y) = y^3 - 3y + 2, \quad -2 \leq y \leq 2,$$

fornece-nos os valores que  $f$  assume no segmento  $NP$ .

$$g'(y) = 3y^2 - 3$$



$$g(-2) = 0, g(-1) = 4, g(1) = 0 \text{ e } g(2) = 4.$$

Assim, o valor máximo de  $f$  no segmento  $NP$  é 4 e o valor mínimo é 0. O valor máximo é atingido nos pontos  $(2, -1)$  e  $(2, 2)$ :

$$f(2, -1) = 4 \text{ e } f(2, 2) = 4.$$

O valor mínimo é atingido nos pontos  $(2, -2)$  e  $(2, 1)$ :

$$f(2, -2) = 0 \text{ e } f(2, 1) = 0.$$

Raciocinando de forma análoga sobre os segmentos  $PQ$ ,  $MQ$  e  $MN$ , concluímos que o valor máximo de  $f$  sobre a fronteira é 4 e este valor é atingido nos pontos  $(2, -1)$  e  $(2, 2)$ ; o valor mínimo de  $f$  sobre a fronteira de  $A$  é  $-4$  e este valor é atingido no ponto  $(1, -2)$ .**Conclusão.** Comparando os valores que  $f$  assume nos pontos críticos com os valores máximo e mínimo de  $f$  na fronteira resulta: o valor máximo de  $f$  em  $A$  é 4 e é atingido nos pontos  $(2, -1)$  e  $(2, 2)$ ; o valor mínimo de  $f$  em  $A$  é  $-4$  e é atingido nos pontos  $(1, 1)$  e  $(1, -2)$ .**EXEMPLO 2.** Determine os extremantes de  $f(x, y) = xy$  em  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

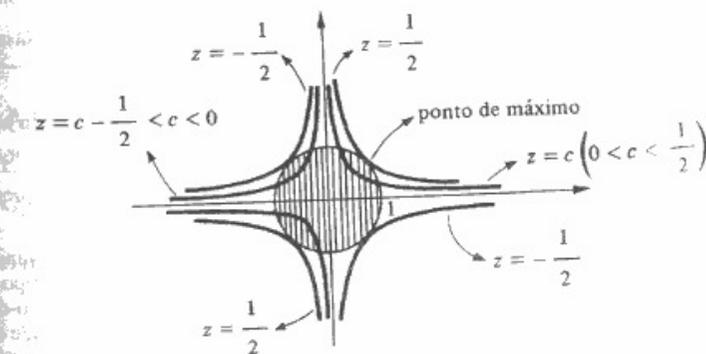
Solução

 $f$  é contínua e  $A$  compacto; logo,  $f$  assume em  $A$  valor máximo e valor mínimo. O único ponto crítico no interior de  $A$  é  $(0, 0)$ , e este ponto crítico não é extremante (verifique). Segue que os valores máximo e mínimo de  $f$ , em  $A$ , são atingidos na fronteira de  $A$ . Os valores de  $f$  na fronteira de  $A$  são fornecidos pela função

$$F(t) = f(\cos t, \sin t) = \frac{1}{2} \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

 $F$  atinge o valor máximo em  $t = \frac{\pi}{4}$  e  $t = \frac{5\pi}{4}$ ; atinge o valor mínimo em  $t = \frac{3\pi}{4}$  e  $t =$  $\frac{7\pi}{4}$ . Segue que  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  e  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$  são os pontos de máximo de  $f$  em  $A$ ; $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  e  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$  são os pontos de mínimo de  $f$  em  $A$ . O valor máximo de  $f$  em $A$  é  $\frac{1}{2}$ , e o valor mínimo,  $-\frac{1}{2}$ . A figura seguinte, na qual estão desenhadas algumas curvas de nível de  $f$ , fornece-nos uma visão geométrica do problema:

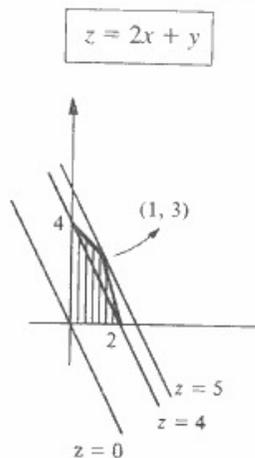
$$z = xy.$$



**EXEMPLO 3.** Determine os extremantes de  $f(x, y) = 2x + y$  em  $A$  dado por  $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 4$  e  $3x + y \leq 6$ .

*Solução*

$f$  assume em  $A$  valor máximo e valor mínimo, pois  $f$  é contínua e  $A$ , compacto. Como  $f$  não admite ponto crítico, os valores máximo e mínimo são atingidos na fronteira de  $A$ .



Como  $f$  é uma função afim e a fronteira de  $A$  é formada por segmentos de retas ( $A$  é um polígono), resulta que entre os vértices de  $A$  existe pelo menos um ponto de máximo e pelo menos um ponto de mínimo. Calculando os valores de  $f$  nos vértices encontramos:

$$f(1, 3) = 5 \text{ valor máximo e } f(0, 0) = 0 \text{ valor mínimo.}$$

**Exercícios 16.4**

- Estude a função dada com relação a máximo e mínimo no conjunto dado.
  - $f(x, y) = 3x - y$  no conjunto  $A$  de todos  $(x, y)$  tais que  $x \geq 0, y \geq 0, y - x \leq 3, x + y \leq 4$  e  $3x + y \leq 6$ .
  - $f(x, y) = 3x - y$  em  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .
  - $f(x, y) = x^2 + 3xy - 3x$  em  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x + y \leq 1\}$ .
  - $f(x, y) = xy$  em  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } 2x + y \leq 5\}$ .
  - $f(x, y) = y^2 - x^2$  em  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ .
  - $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$  em  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$ .
- Determine  $(x, y)$ , com  $x^2 + 4y^2 \leq 1$ , que maximiza a soma  $2x + y$ .
- Suponha que  $T(x, y) = 4 - x^2 - y^2$  represente uma distribuição de temperatura no plano. Seja  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } 2y + x \leq 4\}$ . Determine o ponto de  $A$  de menor temperatura.
- Determine o valor máximo de  $f(x, y) = x + 5y$  onde  $x$  e  $y$  estão sujeitos às restrições:  $5x + 6y \leq 30, 3x + 2y \leq 12, x \geq 0$  e  $y \geq 0$ .
- Uma determinada empresa está interessada em maximizar o lucro mensal proveniente de dois de seus produtos, designados I e II. Para fabricar estes produtos ela utiliza um tipo de máquina que tem uma disponibilidade de 200 máquinas-hora por mês e um tipo de mão-de-obra com uma disponibilidade de 240 homens-hora por mês. Para se produzir uma unidade do produto I utilizam-se 5 horas de máquina e 10 horas de mão-de-obra, enquanto para o produto II uti-

zam-se 4 horas de máquina e 4 horas de mão-de-obra. Espera-se uma demanda de 20 unidades por mês do produto I e 45 do produto II. Calcula-se um lucro, por unidade, de R\$ 10,00 para o produto I e R\$ 6,00 para o II. Determine as quantidades de cada produto que deverão ser fabricadas por mês, para o lucro mensal ser máximo.

6. Determine  $(x, y)$  que maximiza (minimiza) a função  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ , com  $x$  e  $y$  sujeitos às restrições:  $y = 1 - 2x, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ .

7. Dê exemplo de uma função contínua num conjunto limitado  $A \subset \mathbb{R}^2$ , mas que não assuma em  $A$  valor máximo.

8. Considere a forma quadrática  $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ . Sejam  $Q(x_1, y_1)$  e  $Q(x_2, y_2)$  os valores mínimo e máximo de  $Q$  em  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ . Prove:

- se  $Q(x_1, y_1) > 0$ , então  $Q(x, y) > 0$  para todo  $(x, y) \neq (0, 0)$ .
- se  $Q(x_2, y_2) < 0$ , então  $Q(x, y) < 0$  para todo  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

9. Suponha  $A$  um subconjunto fechado do  $\mathbb{R}^2$  e  $(x_0, y_0)$  um ponto de acumulação de  $A$ . Prove que  $(x_0, y_0) \in A$ .

10. Prove que se  $f(x, y)$  for contínua em  $(x_0, y_0) \in D_f$ , então  $f$  será localmente limitada em  $(x_0, y_0)$  ( $f$  localmente limitada em  $(x_0, y_0)$  significa que existem  $\alpha$  e  $\beta$  e uma bola aberta  $B$  de centro  $(x_0, y_0)$  tais que  $\alpha < f(x, y) < \beta$  para todo  $(x, y) \in B \cap D_f$ ).

11. Seja  $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$  uma seqüência de retângulos em  $\mathbb{R}^2$ , onde  $R_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_n \leq x \leq c_n, \bar{a}_n \leq y \leq b_n\}$ , tais que  $R_1 \supset R_2 \supset \dots \supset R_n \supset \dots$ ; suponha que  $d_n = \|(a_n, \bar{a}_n) - (c_n, b_n)\|$  tenda a zero quando  $n \rightarrow +\infty$ . Nestas condições, prove que

$$R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n \cap \dots = (\bar{x}, \bar{y})$$

onde  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são os únicos reais tais que

$$a_n \leq \bar{x} \leq c_n \text{ e } \bar{a}_n \leq \bar{y} \leq b_n$$

para todo  $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ .

12. Seja  $A$  um subconjunto fechado e limitado do  $\mathbb{R}^2$  e seja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Prove que  $f$  é limitada em  $A$ .

(Sugestão. Suponha que  $f$  não seja limitada e construa uma seqüência de retângulos como a do Exercício 11, tal que  $f$  não seja limitada em  $A \cap R_n$  para  $n = 1, 2, \dots$ ; conclua que  $f$  não será localmente limitada em  $(\bar{x}, \bar{y}) = R_1 \cap R_2 \cap \dots$ , o que contradiz a hipótese de  $f$  ser contínua em  $(\bar{x}, \bar{y})$ .)

13. (Teorema de Weierstrass). Seja  $A \subset \mathbb{R}^2$ ,  $A$  compacto, e seja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Prove que  $f$  assume em  $A$  valor máximo e valor mínimo.

(Sugestão. Veja Apêndice A1.4, volume 1.)

## 16.5. O MÉTODO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE PARA DETERMINAÇÃO DE CANDIDATOS A EXTREMANTES LOCAIS CONDICIONADOS

O objetivo desta seção é o estudo de máximos e mínimos de uma função sobre conjuntos do tipo:

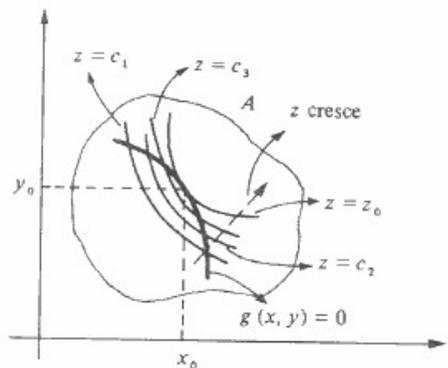
$$\{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}, \{(x, y, z) \mid g(x, y, z) = 0\}$$

e

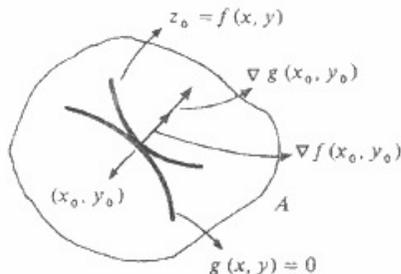
$$\{(x, y, z) \mid g(x, y, z) = 0 \text{ e } h(x, y, z) = 0\}$$

**PROBLEMA 1.** Seja  $f(x, y)$  diferenciável no aberto  $A$  e seja  $B = \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}$ , onde  $g$  é suposta de classe  $C^1$  em  $A$ ; suporemos, também,  $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$  em  $B$ . Estamos interessados em determinar uma *condição necessária* para que  $(x_0, y_0) \in B$  seja um *extremante local* da  $f$  em  $B$ . A figura que apresentamos a seguir, onde estão desenhadas algumas curvas de nível de  $f$ , ajudar-nos-á a chegar, geometricamente, a tal condição:

$$z = f(x, y)$$



Para efeito de raciocínio, suponhamos  $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$  e que  $z$  cresce no sentido indicado na figura ( $c_1 < c_2 < c_3 < z_0$ ). Vamos então pensar geometricamente: se  $(x_0, y_0)$  é um extremante local, é razoável esperar que a curva de nível de  $f$  que passa por este ponto seja "tangente", neste ponto, à restrição  $g(x, y) = 0$ , isto é, os vetores  $\nabla f(x_0, y_0)$  e  $\nabla g(x_0, y_0)$  devem ser paralelos e como  $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  deverá existir um  $\lambda_0$  tal que



$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0).$$

Geometricamente, chegamos à seguinte condição necessária: *uma condição necessária para que  $(x_0, y_0) \in B$  seja um extremante local de  $f$  em  $B$  é que  $(x_0, y_0)$  torne compatível o sistema*

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

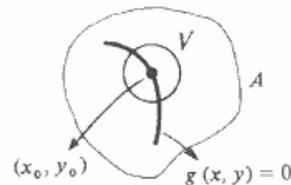
Este processo de se determinar candidatos a extremantes locais é conhecido como *método dos multiplicadores de Lagrange*; os  $\lambda$  que tornem tal sistema compatível denominam-se *multiplicadores de Lagrange* para o problema em questão.

**Teorema 1.** Seja  $f(x, y)$  diferenciável no aberto  $A$  e seja  $B = \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}$ , onde  $g$  é suposta de classe  $C^1$  em  $A$ , e  $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ , para todo  $(x, y) \in B$ . Uma condição necessária para que  $(x_0, y_0) \in B$  seja extremante local de  $f$  em  $B$  é que exista um real  $\lambda_0$  tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0).$$

**Demonstração**

Suponhamos que  $(x_0, y_0) \in B$  seja um ponto de máximo local de  $f$  em  $B$ ; isto significa que existe uma bola aberta  $V$  de centro  $(x_0, y_0)$  tal que



$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

para todo  $(x, y) \in B \cap V$ . ( $(x, y) \in B \cap V \Leftrightarrow g(x, y) = 0$  e  $(x, y) \in V$ ).

Consideremos, agora, uma curva  $\gamma$  diferenciável num intervalo aberto  $I$  tal que  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ ,  $t_0 \in I$ ,  $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$ ,  $g(\gamma(t)) = 0$ , para todo  $t \in I$  (a existência de uma tal curva é garantida pelo teorema das funções implícitas). Da continuidade de  $\gamma$  segue que existe  $\delta > 0$  tal que

$$t \in ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[ \Rightarrow \gamma(t) \in B \cap V.$$

Dai,

$$f(\gamma(t)) \leq f(\gamma(t_0))$$

para todo  $t \in ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ ; assim,  $t_0$  é ponto de máximo local de  $F(t) = f(\gamma(t))$  e como  $t_0$  é ponto interior a  $I$ , resulta  $F'(t_0) = 0$ , ou seja,

$$\textcircled{1} \quad \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$$

Por outro lado, de  $g(\gamma(t)) = 0$  em  $I$  resulta

$$\textcircled{2} \quad \nabla g(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$$

Tendo em vista que  $\nabla g(\gamma(t_0)) \neq \vec{0}$ , segue de  $\textcircled{1}$  e  $\textcircled{2}$  que existe  $\lambda_0$  tal que

$$\nabla f(\gamma(t_0)) = \lambda_0 \nabla g(\gamma(t_0)). \quad \blacksquare$$

Então, sendo  $f(x, y)$  diferenciável no aberto  $A$  e  $B = \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}$ , onde  $g$  é suposta de classe  $C^1$  em  $A$  e  $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$  em  $B$ , os candidatos a extremantes locais de  $f$  em  $B$  são os  $(x, y) \in A$  que tornam compatível o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Estabelecemos assim uma condição necessária para um ponto  $(x_0, y_0)$  ser um extremante local de  $f$  em  $B$ . Trabalhando diretamente com a função o aluno deverá decidir quais dos candidatos encontrados são realmente extremantes locais.

**Observação.** Se no teorema 1 acrescentarmos as hipóteses  $f$  de classe  $C^1$  e  $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ , então poderemos afirmar que a curva de nível de  $f$  que passa pelo ponto  $(x_0, y_0)$  tangencia, neste ponto, a restrição  $g(x, y) = 0$ . Entretanto, nada podemos afirmar com relação a tangência se  $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$  (veja Exercícios 1 (f) e 1 (g)).

**EXEMPLO 1.** Determine os extremantes de  $f(x, y) = 3x + 2y$  com a restrição  $x^2 + y^2 = 1$ .

*Solução*

Seja  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ; o que queremos são os extremantes de  $f$  em  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$ . Como  $g$  é de classe  $C^1$  e  $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$  em  $B$ , resulta que os candidatos a extremantes locais são os  $(x, y)$  que tornam compatível o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} (3, 2) = \lambda (2x, 2y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} 3 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Como  $\lambda \neq 0$ , das duas primeiras equações resultam

$$x = \frac{3}{2\lambda} \text{ e } y = \frac{1}{\lambda}.$$

Substituindo estes valores em  $x^2 + y^2 = 1$ , vem

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \text{ ou } \lambda = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Segue que  $\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$  e  $\left(-\frac{3\sqrt{13}}{13}, -\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$  são os candidatos a extremantes locais.

Como  $B$  é compacto e  $f\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right) > f\left(-\frac{3\sqrt{13}}{13}, -\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$ , resulta que

$\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$  é ponto de máximo e  $\left(-\frac{3\sqrt{13}}{13}, -\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$  é ponto de mínimo de  $f$  em  $B$ .

(Interprete geometricamente.)

**EXEMPLO 2.** Estude, com relação a máximo e mínimo, a função  $f(x, y) = y + x^3$  com a restrição  $y - x^3 = 0$ .

*Solução*

$$g(x, y) = y - x^3 \text{ e } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}.$$

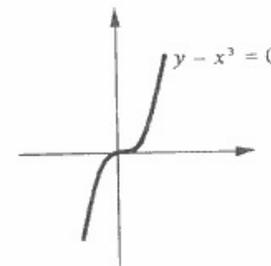
Como  $g$  é de classe  $C^1$  e  $\nabla g(x, y) = (-3x^2, 1) \neq (0, 0)$  em  $B$ , resulta que os candidatos a extremantes locais são os  $(x, y)$  que tornam compatível o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} (3x^2, 1) = \lambda (-3x^2, 1) \\ y - x^3 = 0. \end{cases}$$

O único candidato é  $(0, 0)$  que não é extremante de  $f$  em  $B$ , pois  $f(x, y) > 0$  para  $x > 0$  e  $y > 0$  e  $f(x, y) < 0$  para  $x < 0$  e  $y < 0$ .



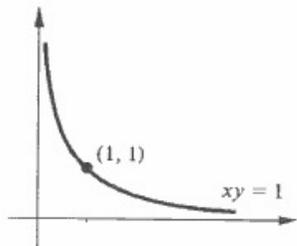
**EXEMPLO 3.** Encontre o ponto da curva  $xy = 1$ ,  $x > 0$  e  $y > 0$  que se encontra mais próximo da origem.

*Solução*

Trata-se aqui de se determinar o mínimo de  $f(x, y) = x^2 + y^2$  com a restrição  $xy = 1$  ( $f(x, y)$  é o quadrado da distância de  $(x, y)$  a  $(0, 0)$ ).

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x, 2y) = \lambda (y, x) \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$$

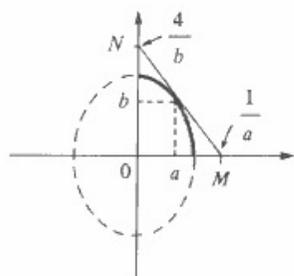
O único candidato é (1, 1) e, por inspeção, verifica-se que (1, 1) é ponto de mínimo. Assim, (1, 1) é o ponto da curva  $xy = 1$ ,  $x > 0$  e  $y > 0$  que se encontra mais próximo da origem.



**EXEMPLO 4.** Determine a reta tangente à curva  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ,  $x > 0$  e  $y > 0$  que forma com os eixos um triângulo de área mínima.

*Solução*

Seja  $(a, b)$  ( $a > 0$  e  $b > 0$ ) um ponto da elipse  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ . A equação da reta tangente em  $(a, b)$  é:



$$\left(2a, \frac{b}{2}\right) \cdot [(x, y) - (a, b)] = 0$$

ou

$$ax + \frac{by}{4} = 1.$$

A área do triângulo  $OMN$  é:  $A = \frac{2}{ab}$ . O problema consiste em minimizar  $A = \frac{2}{ab}$  com a restrição  $a^2 + \frac{b^2}{4} = 1$ .

$$\begin{cases} \left(-\frac{2}{a^2b}, -\frac{2}{ab^2}\right) = \lambda \left(2a, \frac{b}{2}\right) \\ a^2 + \frac{b^2}{4} = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} -\frac{1}{a^3b} = \lambda \\ -\frac{4}{ab^3} = \lambda \\ a^2 + \frac{b^2}{4} = 1. \end{cases}$$

Das duas primeiras equações segue  $b = 2a$ . Substituindo na última equação obtemos  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

A equação da reta que resolve o problema é:

$$2x + y = 2\sqrt{2}.$$

**PROBLEMA 2.** Seja  $f(x, y, z)$  diferenciável no aberto  $A \subset \mathbb{R}^3$  e seja  $B = \{(x, y, z) \in A \mid g(x, y, z) = 0\}$ , onde  $g$  é suposta de classe  $C^1$  em  $A$  e  $\nabla g(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  em  $B$ . Qual uma condição necessária para que  $(x_0, y_0, z_0) \in B$  seja extremante local de  $f$  em  $B$ ? Raciocinando geometricamente, como no Problema 1, chega-se à condição: a condição necessária para  $(x_0, y_0, z_0) \in B$  ser extremante local de  $f$  em  $B$  é que exista  $\lambda_0$  tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0, z_0).$$

Deixamos para o leitor a prova desta afirmação. Deste modo, os candidatos a extremantes locais de  $f$  em  $B$  são os  $(x, y, z) \in A$  que tornam compatível o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

**EXEMPLO 5.** Determine o ponto do elipsóide  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$  cuja soma das coordenadas seja máxima.

*Solução*

Queremos maximizar  $f(x, y, z) = x + y + z$  com a restrição  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ .

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1, 1, 1) = \lambda (2x, 4y, 6z) \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

$g(x, y, z)$

Como  $\lambda$  deve ser diferente de zero, da 1.ª equação tiramos:  $x = \frac{1}{2\lambda}$ ,  $y = \frac{1}{4\lambda}$  e  $z = \frac{1}{6\lambda}$ . Substituindo na última equação obtemos:

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{2}{16\lambda^2} + \frac{3}{36\lambda^2} = 1 \text{ ou } \lambda = \pm \sqrt{\frac{11}{24}}.$$

Os candidatos a extremantes são:

$$X_1 = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{4} \sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{6} \sqrt{\frac{11}{24}} \right) \text{ e } X_2 = \left( -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{24}}, -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{11}{24}}, -\frac{1}{6} \sqrt{\frac{11}{24}} \right)$$

Da compacidade de  $B$ , da continuidade de  $f$  e de  $f(X_1) > f(X_2)$  segue que o ponto procurado é

$$\left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{4} \sqrt{\frac{11}{24}}, \frac{1}{6} \sqrt{\frac{11}{24}} \right)$$

O próximo teorema fornece-nos uma condição necessária para  $(x_0, y_0, z_0)$  ser um extremante local de  $f(x, y, z)$  com as restrições  $g(x, y, z) = 0$  e  $h(x, y, z) = 0$ . Para a demonstração de tal teorema vamos precisar do seguinte resultado (cuja prova fica para o leitor): sejam  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  e  $\vec{c}$  vetores do  $\mathbb{R}^3$  tais que  $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}, \vec{u} \cdot \vec{c} = 0, \vec{v} \cdot \vec{c} = 0$  e  $\vec{w} \cdot \vec{c} = 0$ ; então existem reais  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tais que  $\vec{w} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$ .

**Teorema 2.** Seja  $f(x, y, z)$  diferenciável no aberto  $A \subset \mathbb{R}^3$  e seja  $B = \{(x, y, z) \in A \mid g(x, y, z) = 0 \text{ e } h(x, y, z) = 0\}$ , onde  $g$  e  $h$  são supostas de classe  $C^1$  em  $A$  e  $\nabla g(x, y, z) \wedge \nabla h(x, y, z) \neq \vec{0}$  em  $B$ . Nestas condições, uma condição necessária para que  $(x_0, y_0, z_0) \in B$  seja extremante local de  $f$  em  $B$  é que existam reais  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tais que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \nabla h(x_0, y_0, z_0).$$

**Demonstração**

Suponhamos que  $(x_0, y_0, z_0)$  seja ponto de máximo local de  $f$  em  $B$ , o que significa que existe uma bola aberta  $V$  de centro  $(x_0, y_0, z_0)$  tal que, para todo  $(x, y, z) \in B \cap V$ ,

$$f(x, y, z) \leq f(x_0, y_0, z_0)$$

(como  $A$  é aberto, podemos supor  $V \subset A$ ). Consideremos uma curva diferenciável  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $I$  intervalo aberto, tal que  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$  e  $\gamma(t) \in B$  para todo  $t$  em  $I$  (a existência de uma tal curva é garantida pelo teorema das funções implícitas). Da continuidade de  $\gamma$ , segue que existe  $\delta > 0$  tal que

$$t \in ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[ \Rightarrow \gamma(t) \in B \cap V.$$

Assim, para todo  $t \in ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$  tem-se

$$f(\gamma(t)) \leq f(\gamma(t_0)).$$

Logo,  $t_0$  é ponto de máximo local de  $F(t) = f(\gamma(t))$  e daí  $F'(t_0) = 0$ , ou seja,

① 
$$\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$$

Por outro lado, de  $\gamma(t) \in B$  para todo  $t \in I$  segue que

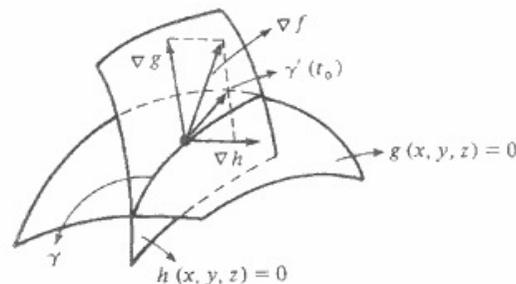
$$g(\gamma(t)) = 0 \text{ e } h(\gamma(t)) = 0,$$

para todo  $t$  em  $I$ ; daí

② 
$$\nabla g(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0 \text{ e } \nabla h(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0.$$

De ① e ②, tendo em vista que  $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$  e  $\nabla g(\gamma(t_0)) \wedge \nabla h(\gamma(t_0)) \neq \vec{0}$ , resulta que existem reais  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tais que

$$\nabla f(\gamma(t_0)) = \lambda_1 \nabla g(\gamma(t_0)) + \lambda_2 \nabla h(\gamma(t_0)).$$



**EXEMPLO 6.** Determine os pontos mais afastados da origem e cujas coordenadas estão sujeitas às restrições  $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$  e  $x + y + z = 1$ .

**Solução**

Trata-se de determinar os pontos que maximizam a função  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  ( $f(x, y, z)$  é o quadrado da distância de  $(x, y, z)$  a  $(0, 0, 0)$ ) com as restrições  $g(x, y, z) = 0$  e  $h(x, y, z) = 0$ , onde  $g(x, y, z) = x + y + z - 1$  e  $h(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4$ . Temos:

$$\nabla g(x, y, z) \wedge \nabla h(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 8y & 2z \end{vmatrix} \neq \vec{0} \text{ em } B$$

(verifique). Estamos indicando por  $B$  o conjunto  $\{(x, y, z) \mid x + y + z = 1 \text{ e } x^2 + 4y^2 + z^2 = 4\}$ . Observe que  $B$  é compacto. Os candidatos a extremantes locais são os  $(x, y, z)$  que tornam compatível o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda + 2\mu x \\ 2y = \lambda + 8\mu y \\ 2z = \lambda + 2\mu z \\ x + y + z = 1 \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1 - \mu) = \lambda & \text{①} \\ 2y(1 - 8\mu) = \lambda & \text{②} \\ 2z(1 - \mu) = \lambda & \text{③} \\ x + y + z = 1 & \text{④} \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 & \text{⑤} \end{cases}$$

De ① e ③ segue

$$2x(1 - \mu) = 2z(1 - \mu).$$

Para  $\mu \neq 1$ ,  $x = z$ . Substituindo em ④ e ⑤

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x^2 + 2y^2 = 2. \end{cases}$$

$$x^2 + 2(1 - 2x)^2 = 2 \Leftrightarrow 9x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{8}{9}$$

Temos, então os candidatos:  $(0, 1, 0)$  e  $(\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ . Para  $\mu = 1$ , teremos  $\lambda = 0$ . Segue de ② que  $y = 0$ ; substituindo em ④ e ⑤

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + (1 - x)^2 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$$

Segue que  $(\frac{1 + \sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1 - \sqrt{7}}{2})$  e  $(\frac{1 - \sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1 + \sqrt{7}}{2})$  são outros candidatos a extremantes. Como  $f$  é contínua e  $B$  compacto, basta comparar os valores de  $f$  nos pontos encontrados:

$$f(0, 1, 0) = 1, f\left(\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) = \frac{171}{81}$$

$$f\left(\frac{1 - \sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1 + \sqrt{7}}{2}\right) = 4 = f\left(\frac{1 + \sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1 - \sqrt{7}}{2}\right)$$

Conclusão.  $(\frac{1 - \sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1 + \sqrt{7}}{2})$  e  $(\frac{1 + \sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1 - \sqrt{7}}{2})$  são os pontos mais afastados da origem. Por outro lado,  $(0, 1, 0)$  é o mais próximo da origem.

### Exercícios 16.5

1. Estude com relação a máximos e mínimos a função dada com as restrições dadas.

a)  $f(x, y) = 3x + y$  e  $x^2 + 2y^2 = 1$

b)  $f(x, y) = 3x + y$  e  $x^2 + 2y^2 \leq 1$

c)  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$  e  $3x + y = 1$

d)  $f(x, y) = x^2 + 4y^2$  e  $xy = 1, x > 0, y > 0$

e)  $f(x, y) = xy$  e  $x^2 + 4y^2 = 8$

f)  $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$  e  $x + 2y - 1 = 0$

g)  $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$  e  $x^2 + y^2 = 1$

h)  $f(x, y) = x^2 - 2y^2$  e  $x^2 + y^2 - 2x = 0$

i)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$  e  $x + 2y = 3$

j)  $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$  e  $x^2 + 2y^2 = 1$

2. Determine a curva de nível de  $f(x, y) = x^2 + 16y^2$  que seja tangente à curva  $xy = 1, x > 0, y > 0$ . Qual o ponto de tangência?

3. Determine o ponto da reta  $x + 2y = 1$  cujo produto das coordenadas seja máximo.

4. Determine o ponto da parábola  $y = x^2$  mais próximo de  $(14, 1)$ .

5. Determine o ponto do elipsóide  $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$  que maximiza a soma  $x + 2y + z$ .

6. Determine a superfície de nível da função  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$  que seja tangente ao plano  $x + 2y + 3z = 4$ . Qual o ponto de tangência?

7. Ache o valor máximo e o valor mínimo da função  $f(x, y, z) = x + 2y + z$  com a restrição  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ .

8. Determine o ponto do plano  $x + 2y - 3z = 4$  mais próximo da origem.

9. Determine o ponto da reta

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$$

que se encontra mais próximo da origem.

10. Maximize  $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$  sujeita às restrições  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  e  $x + y + z = 1$ .

11. Encontre os pontos da elipse  $x^2 + xy + y^2 = 3$  (de centro na origem) mais próximos e os mais afastados da origem. Desenhe a elipse.

12. Encontre o ponto da curva  $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$  mais próximo da origem.

13. Encontre os pontos da curva  $x^2 - 6xy - 7y^2 + 80 = 0$  mais próximos da origem. Desenhe a curva.

14. Determine o ponto da superfície  $xyz = 1, x > 0$  e  $y > 0$  que se encontra mais próximo da origem.

15. Pede-se determinar três números positivos cuja soma seja 36 e cujo produto seja máximo.

16. Determine, entre os triângulos de mesmo perímetro, o de área máxima.

(Sugestão. Utilize a fórmula  $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  que fornece a área do triângulo em função dos lados  $a, b$  e  $c$ , onde  $p$  é o semiperímetro.)

17. Verifique que  $(\frac{c}{3})^3$  é o valor máximo de  $xyz, x \geq 0, y \geq 0$  e  $z \geq 0$ , com a restrição  $x + y + z = c$  ( $c > 0$ ). Conclua que a média geométrica de três números positivos é sempre menor ou igual à média aritmética destes números.

18. Determine, entre os paralelepípedos-retângulos de mesmo volume, o de área máxima.

19. Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, com  $1 \text{ m}^3$  de volume e com a forma de um paralelepípedo-retângulo. O material a ser utilizado na confecção do fundo custa o dobro do que será utilizado nas laterais. Determinar as dimensões da caixa que minimiza o custo do material.

20. Deseja-se construir um paralelepípedo-retângulo com área total  $100 \text{ cm}^2$ . Determine as dimensões para o volume ser máximo.

21. Determine o paralelepípedo-retângulo de volume máximo, com arestas paralelas aos eixos, inscrito no elipsóide

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

22. Determine o paralelepípedo retângulo de volume máximo, com três de suas faces nos planos coordenados, contido no tetraedro  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z \leq 12, x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } z \geq 0\}$ .

23. A temperatura  $T$  em qualquer ponto  $(x, y, z)$  do espaço é dada por  $T = 100x^2yz$ . Determine a temperatura máxima sobre a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ . Qual a temperatura mínima?

24. Determine o plano tangente à superfície  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, x > 0, y > 0$  e  $z > 0$ , que forma com os planos coordenados tetraedro de volume mínimo.

25. Determine  $P$  na elipse  $x^2 + 2y^2 = 6$  e  $Q$  na reta  $x + y = 4$  de modo que a distância de  $P$  a  $Q$  seja a menor possível.

26. Considere a forma quadrática  $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$  onde  $a, b, c$  são constantes não simultaneamente nulas. Seja  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Suponha que  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  seja solução do sistema
- $$\begin{cases} \nabla Q(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Prove que  $Q(x_0, y_0) = \lambda_0$ .

(Sugestão. Como  $Q$  é homogênea de grau 2, utilize a relação de Euler. Veja Exercício 26 da Seq. 12.1.)

27. Sejam  $Q(x, y)$  e  $g(x, y)$  como no exercício anterior. Suponha que os multiplicadores de Lagrange associados ao problema

$$\begin{cases} \nabla Q(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

sejam estritamente positivos. Prove que  $Q(x, y) > 0$ , para todo  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

(Sugestão. Utilize o Exercício 26.)

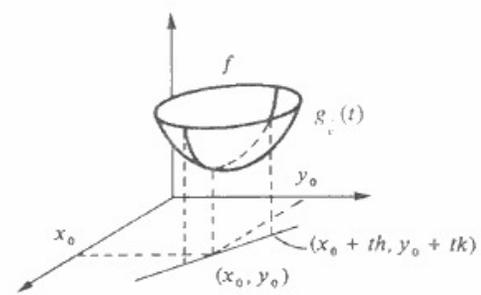
28. Prove que os multiplicadores de Lagrange associados ao problema do exercício anterior são as raízes da equação

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

29. Sejam  $Q(x, y)$  e  $g(x, y)$  como no Exercício 26. Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ , as raízes da equação

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Prove que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são, respectivamente, os valores mínimo e máximo de  $Q$  sobre a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ .



(verifique) resulta que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) k^2 \geq 0$$

para todo  $(h, k)$ , é uma condição necessária para  $(x_0, y_0)$  ser ponto de mínimo local de  $f$ .

**Observação.** Note que  $g_v$  fornece os valores que  $f$  assume sobre o trecho da reta  $(x, y) = (x_0, y_0) + t(h, k)$  contido em  $D_f$ .

**EXEMPLO 2.** Considere a forma quadrática

$$Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$$

onde  $a, b$  e  $c$  são constantes. Suponha  $a \neq 0$ . Verifique que

$$Q(h, k) = a \left( h + \frac{b}{a} k \right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a} k^2.$$

*Solução*

$$\begin{aligned} ah^2 + 2bhk + ck^2 &= a \left[ h^2 + 2 \frac{b}{a} hk + \frac{c}{a} k^2 \right] = \\ &= a \left[ h^2 + \frac{2b}{a} hk + \frac{b^2}{a^2} k^2 - \frac{b^2}{a^2} k^2 + \frac{c}{a} k^2 \right] = \\ &= a \left[ \left( h + \frac{b}{a} k \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2} k^2 \right]. \end{aligned}$$

ou seja,

$$Q(h, k) = a \left( h + \frac{b}{a} k \right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a} k^2.$$

### 16.6. EXEMPLOS COMPLEMENTARES

**EXEMPLO 1.** Seja  $f(x, y)$  de classe  $C^2$  num aberto  $A$  do  $\mathbb{R}^2$ . Suponha que  $(x_0, y_0) \in A$  seja um ponto crítico de  $f$ . Prove que uma condição necessária para  $(x_0, y_0)$  ser um ponto de mínimo local de  $f$  é que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) k^2 \geq 0$$

para todo  $(h, k)$ .

*Solução*

Seja  $\vec{v} = (h, k) \neq (0, 0)$  e consideremos a função

$$g_v(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk).$$

Suponhamos que  $(x_0, y_0)$  seja ponto de mínimo local de  $f$ ; então  $t = 0$  será ponto de mínimo local de  $g_v$  e, portanto, deveremos ter necessariamente  $g_v''(0) \geq 0$ . Como

$$g_v''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) k^2$$

**EXEMPLO 3.** Considere a forma quadrática

$$Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2.$$

Prove:

- (i) se  $a > 0$  e  $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$ , então  $Q(h, k) > 0$ , para todo  $(h, k) \neq (0, 0)$ .
- (ii) se  $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} < 0$ , então existem  $(h_1, k_1)$  e  $(h_2, k_2)$  tais que  $Q(h_1, k_1) < 0$  e  $Q(h_2, k_2) > 0$ .

*Solução*

Pelo Exemplo 2, sendo  $a \neq 0$ ,

$$Q(h, k) = a \left( h + \frac{b}{a} k \right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a} k^2.$$

- (i) imediata.
- (ii) se  $a = 0$ , teremos necessariamente  $b \neq 0$ ; neste caso, existe  $\alpha$  tal que  $Q(\alpha, 1)$  e  $Q(\alpha, -1)$  terão sinais contrários. (Verifique.) Se  $a \neq 0$ ,  $Q(1, 0)$  e  $Q\left(\frac{b}{a}, -1\right)$  terão sinais contrários

$$\left[ Q(1, 0) = a \text{ e } Q\left(\frac{b}{a}, -1\right) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a} \right].$$

**EXEMPLO 4.** Seja  $f(x, y)$  de classe  $C^2$  num aberto  $A$  do  $\mathbb{R}^2$  e seja  $(x_0, y_0) \in A$  um ponto crítico de  $f$ . Prove que se

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} < 0$$

então  $(x_0, y_0)$  não é extremante local de  $f$ .

*Solução*

Seja

$$g_{\vec{v}}''(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt) \quad (\vec{v} = (h, k)).$$

Pela regra da cadeia,

$$g_{\vec{v}}''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2.$$

Pelo Exemplo 3 (ii)

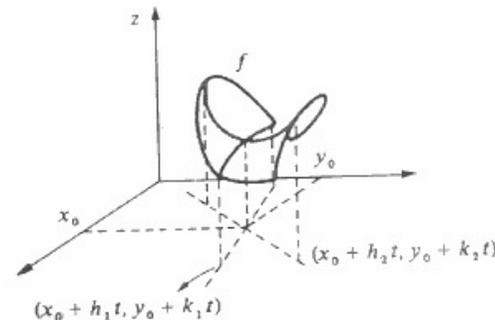
$$\left( a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \text{ e } c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right) \text{ existem}$$

$$\vec{v}_1 = (h_1, k_1) \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = (h_2, k_2)$$

tais que

$$g_{\vec{v}_1}''(0) < 0 \quad \text{e} \quad g_{\vec{v}_2}''(0) > 0.$$

Assim,  $t = 0$  é ponto de máximo local de  $g_{\vec{v}_1}(t)$  e ponto de mínimo local de  $g_{\vec{v}_2}(t)$ . Logo,  $(x_0, y_0)$  não é extremante local de  $f$ .



Seja  $(x_0, y_0) \in D_f$  um ponto crítico de  $f$ . Dizemos que  $(x_0, y_0)$  é *ponto de sela* de  $f$  se em toda bola aberta de centro  $(x_0, y_0)$  existirem pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  com  $f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0)$  e  $f(x_2, y_2) > f(x_0, y_0)$ .

Seja  $f(x, y)$  de classe  $C^2$  num aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  e seja  $(x_0, y_0) \in A$  um ponto crítico de  $f$ . Segue do Exemplo 4 que se  $H(x_0, y_0) < 0$ , então  $(x_0, y_0)$  será ponto de sela de  $f$  (verifique).

**EXEMPLO 5.** Sejam  $f(x, y)$  de classe  $C^2$  e  $(x_0, y_0)$  um ponto interior de  $D_f$ . Suponha que  $(x_0, y_0)$  seja ponto crítico de  $f$ . Prove:

- a) Se  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$  e  $H(x_0, y_0) > 0$ , então  $(x_0, y_0)$  será ponto de mínimo local de  $f$ .
- b) Se  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$  e  $H(x_0, y_0) > 0$ , então  $(x_0, y_0)$  será ponto de máximo local de  $f$ .

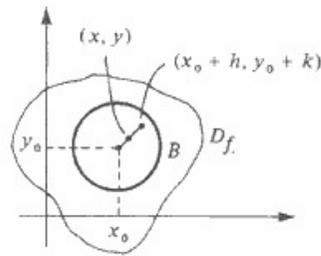
*Solução*

a) Da hipótese e da continuidade das funções

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \text{ e } H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix}$$

segue, pelo teorema da conservação do sinal, que existe uma bola aberta  $B$  de centro  $(x_0, y_0)$  (podemos supor  $B \subset D_f$ , pois  $(x_0, y_0)$  é ponto interior de  $D_f$ ) tal que, para todo  $(x, y)$  em  $B$ ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) > 0 \text{ e } H(x, y) > 0.$$



Pela fórmula de Taylor, com resto de Lagrange (veja teorema de 15.4), para todo  $(h, k)$ , com  $(x_0 + h, y_0 + k) \in B$ , existe  $(\bar{x}, \bar{y})$  interno ao segmento de extremidades  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0 + h, y_0 + k)$  tal que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) k^2 \right]$$

[lembre-se de que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ , pois  $(x_0, y_0)$  é ponto crítico de  $f$ ].

Como  $(\bar{x}, \bar{y}) \in B$ ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) > 0 \text{ e } H(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) \end{vmatrix} > 0;$$

tendo em vista o Exemplo 3, para todo  $(h, k) \neq (0, 0)$ , com  $(x_0 + h, y_0 + k) \in B$ ,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) > 0,$$

ou seja,

$$f(x, y) > f(x_0, y_0)$$

para todo  $(x, y)$  em  $B$ , com  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ . Portanto  $(x_0, y_0)$  é ponto de mínimo local de  $f$ .  
b) Fica a seu cargo. [Basta verificar que  $(x_0, y_0)$  é ponto de mínimo local de  $g(x, y) = -f(x, y)$ ].

**EXEMPLO 6.** Sejam  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$  e  $\varphi$  números reais dados. Considere a forma quadrática

$$Q(r, s, t) = \alpha r^2 + \beta s^2 + \gamma t^2 + 2\delta rs + 2\epsilon rt + 2\varphi st.$$

Supondo  $\alpha \neq 0$ , verifique que

$$Q(r, s, t) = \alpha \left[ r + \frac{\delta}{\alpha} s + \frac{\epsilon}{\alpha} t \right]^2 + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{\alpha} \left[ s + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta & \beta \end{vmatrix}} t \right]^2 + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta & \epsilon \\ \delta & \beta & \varphi \\ \epsilon & \varphi & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}} t^2.$$

**Solução**

$$\begin{aligned} Q(r, s, t) &= \alpha \left[ r^2 + \frac{\beta}{\alpha} s^2 + \frac{\gamma}{\alpha} t^2 + \frac{2\delta}{\alpha} rs + \frac{2\epsilon}{\alpha} rt + \frac{2\varphi}{\alpha} st \right] = \\ &= \alpha \left[ r^2 + \frac{\delta^2}{\alpha^2} s^2 + \frac{\epsilon^2}{\alpha^2} t^2 + \frac{2\delta}{\alpha} rs + \frac{2\epsilon}{\alpha} rt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\epsilon\delta}{\alpha^2} st - \frac{\delta^2}{\alpha^2} s^2 - \frac{\epsilon^2}{\alpha^2} t^2 - \frac{2\epsilon\delta}{\alpha^2} st + \frac{2\varphi}{\alpha} st + \frac{\beta}{\alpha} s^2 + \frac{\gamma}{\alpha} t^2 \right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Q(r, s, t) &= \alpha \left[ \left( r + \frac{\delta}{\alpha} s + \frac{\epsilon}{\alpha} t \right)^2 + \frac{\alpha\beta - \delta^2}{\alpha^2} s^2 + \frac{\alpha\gamma - \epsilon^2}{\alpha^2} t^2 + \frac{2(\alpha\varphi - \epsilon\delta)}{\alpha^2} st \right] \\ &= \alpha \left( r + \frac{\delta}{\alpha} s + \frac{\epsilon}{\alpha} t \right)^2 + \underbrace{\frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{\alpha} s^2 + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{\alpha} t^2 + \frac{2 \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}}{\alpha} st}_{\bar{Q}(s, t)}. \end{aligned}$$

Supondo  $\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix} \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \bar{Q}(s, t) &= \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{\alpha} \left[ s^2 + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta & \beta \end{vmatrix}} t^2 + \frac{2 \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta & \beta \end{vmatrix}} st \right] = \\ &= \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{\alpha} \left[ s^2 + 2 \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta & \beta \end{vmatrix}} st + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \delta & \beta \end{vmatrix}^2} t^2 - \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \delta & \beta \end{vmatrix}^2} t^2 + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta & \beta \end{vmatrix}} t^2 \right] = \\ &= \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{\alpha} \left[ \left( s + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta & \beta \end{vmatrix}} t \right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \delta & \beta \end{vmatrix}^2} t^2 \right]. \end{aligned}$$

Como,

$$\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \epsilon & \gamma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}^2 = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & \delta & \epsilon \\ \delta & \beta & \varphi \\ \epsilon & \varphi & \gamma \end{vmatrix} \text{ (verifique)}$$

resulta

$$Q(r, s, t) = \alpha \left( r + \frac{\delta}{\alpha} s + \frac{\epsilon}{\alpha} t \right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{\alpha} \left( s + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \epsilon \\ \delta & \varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}} t \right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta & \epsilon \\ \epsilon & \varphi & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}} t^2.$$

**EXEMPLO 7.** Considere a forma quadrática

$$Q(r, s, t) = \alpha r^2 + \beta s^2 + \gamma t^2 + 2\delta rs + 2\epsilon rt + 2\varphi st.$$

Verifique:

a) Se  $\begin{vmatrix} \alpha & \delta & \epsilon \\ \delta & \beta & \varphi \\ \epsilon & \varphi & \gamma \end{vmatrix} > 0$ ,  $\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix} > 0$  e  $\alpha > 0$ , então

$$Q(r, s, t) > 0, \text{ para todo } (r, s, t) \neq (0, 0, 0).$$

b) Se  $\begin{vmatrix} \alpha & \delta & \epsilon \\ \delta & \beta & \varphi \\ \epsilon & \varphi & \gamma \end{vmatrix} < 0$ ,  $\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix} > 0$  e  $\alpha < 0$ , então

$$Q(r, s, t) < 0, \text{ para todo } (r, s, t) \neq (0, 0, 0).$$

c) Se  $\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix} < 0$  e  $\alpha > 0$ , então existem  $(r_1, s_1, t_1)$  e  $(r_2, s_2, t_2)$  tais que  $Q(r_1, s_1, t_1) < 0$  e  $Q(r_2, s_2, t_2) > 0$ .

*Solução*

a) e b) são conseqüências imediatas do Exemplo 6.

c)  $Q(1, 0, 0) = \alpha$  e  $Q\left(\frac{\delta}{\alpha}, -1, 0\right) = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{vmatrix}}{\alpha}$ ; assim,  $Q(1, 0, 0)$  e  $Q\left(\frac{\delta}{\alpha}, -1, 0\right)$  têm sinais

contrários. [Sugerimos ao leitor determinar outras situações que levam à existência de  $(r_1, s_1, t_1)$  e  $(r_2, s_2, t_2)$  com  $Q(r_1, s_1, t_1) < 0$  e  $Q(r_2, s_2, t_2) > 0$ .]

Deixamos a cargo do leitor a demonstração do resultado que aparece no Exercício 15 da Seç. 16.3.

(Sugestão. Proceda como no Exemplo 5.)

## Apêndice

### FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL A VALORES COMPLEXOS

#### A.1. FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL A VALORES COMPLEXOS

Uma função de *uma variável real a valores complexos* é uma função cujo domínio é um subconjunto de  $\mathbb{R}$  e cujo contradomínio é  $\mathbb{C}$ .

**EXEMPLO 1.** Considere a função  $f$  dada por  $f(t) = t^2 + i \cos t$ .

a) Que é o domínio?

b) Calcule  $f(0)$  e  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

*Solução*

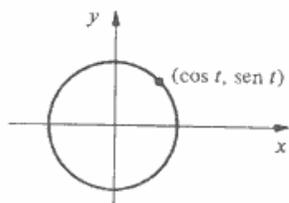
a) O domínio de  $f$  é  $\mathbb{R}$ .

b)  $f(0) = i$  e  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ .

**EXEMPLO 2.** Seja  $f$  dada por  $f(t) = \cos t + i \sin t$ . Desenhe a imagem de  $f$ .

*Solução*

Para cada  $t$ ,  $f(t)$  identifica-se com o ponto  $(\cos t, \sin t)$ . A imagem de  $f$  é a circunferência de centro na origem e raio 1:



Seja  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ , uma função de uma variável real a valores complexos; então existem, e são únicas, duas funções  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$ , definidas em  $A$  e a valores reais, tais que  $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ , para todo  $t \in A$ . Pois bem, diremos que  $f$  é *contínua* em  $t_0 \in A$  se e somente se  $f_1$  e  $f_2$  forem contínuas em  $t_0$ . Diremos, ainda, que  $f$  é *derivável* em  $t_0$  se e somente se  $f_1$  e  $f_2$  forem deriváveis em  $t_0$ . Sendo  $f$  derivável em  $t_0$ , definimos a *derivada* de  $f$  em  $t_0$  por

$$f'(t_0) = f_1'(t_0) + if_2'(t_0).$$

Seja  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ ; dizemos que  $F: A \rightarrow \mathbb{C}$  é uma *primitiva* de  $f$  se  $F'(t) = f(t)$ , para todo  $t \in A$ . A notação  $\int f(t) dt$  será usada para indicar a família das primitivas de  $f$ .

**Teorema.** Seja  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $I$  é um intervalo em  $\mathbb{R}$ . Se  $f'(t) = 0$ , para todo  $t \in I$ , então existe uma constante complexa  $k$  tal que  $f(t) = k$ , para todo  $t$  em  $I$ .

*Demonstração*

Seja  $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ . Segue da hipótese que  $f_1'(t) = 0$  e  $f_2'(t) = 0$  em  $I$ ; assim, existem constantes reais  $k_1$  e  $k_2$  tais que, para todo  $t \in I$ ,

$$f_1(t) = k_1 \quad \text{e} \quad f_2(t) = k_2.$$

Portanto, para todo  $t \in I$ ,

$$f(t) = k_1 + ik_2. \quad \blacksquare$$

Como consequência deste teorema resulta que se  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g: I \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $I$  intervalo, forem tais que  $f'(t) = g'(t)$  em  $I$ , então existirá uma constante complexa  $k$  tal que, para todo  $t$  em  $I$ ,

$$g(t) = f(t) + k.$$

De fato, pela hipótese, para todo  $t$  em  $I$ ,

$$[g(t) - f(t)]' = 0$$

e, pelo teorema acima, existe uma constante  $k$  tal que, para todo  $t$  em  $I$ ,

$$g(t) - f(t) = k.$$

**EXEMPLO 3.** Seja  $f(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$ .

- Calcule  $f'(t)$ .
- Verifique que  $f'(t) = if(t)$ .

*Solução*

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(t) &= [\cos t + i \operatorname{sen} t]' = -\operatorname{sen} t + i \cos t. \\ \text{b) } f'(t) &= i^2 \operatorname{sen} t + i \cos t = i(\cos t + i \operatorname{sen} t) = if(t). \end{aligned}$$

**EXEMPLO 4.** Seja  $u(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)$  onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes reais. Seja  $\lambda = \alpha + i\beta$ . Verifique que

$$\frac{du}{dt} = \lambda u.$$

*Solução*

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \alpha e^{\alpha t} [\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t] + e^{\alpha t} [-\beta \operatorname{sen} \beta t + i\beta \cos \beta t] \\ &= \alpha e^{\alpha t} [\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t] + \beta i e^{\alpha t} [\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t] \\ &= (\alpha + i\beta) e^{\alpha t} [\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t]. \end{aligned}$$

Portanto,  $\frac{du}{dt} = \lambda u$ .

*Exercício*

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções a valores complexos, definidas e deriváveis num intervalo  $I$ . Prove que, para todo  $t$  em  $I$ , tem-se:

- $[f(t) + g(t)]' = f'(t) + g'(t)$ .
- $[kf(t)]' = kf'(t)$ , onde  $k$  é uma constante complexa.
- $[f(t)g(t)]' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$ .
- $\left[ \frac{f(t)}{g(t)} \right]' = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{[g(t)]^2}$  em todo  $t \in I$ , com  $g(t) \neq 0$ .

## A.2. DEFINIÇÃO DE $e^{\lambda t}$ , COM $\lambda$ COMPLEXO

Seja  $\lambda$  um número real; já vimos que  $u(t) = e^{\lambda t}$  é a *única* função definida em  $\mathbb{R}$  e que é solução do problema.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \lambda u \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Suponhamos, agora,  $\lambda = \alpha + i\beta$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes reais. Vamos mostrar a seguir que

$$u(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)$$

é a única função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{C}$  que é a solução do problema

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = \lambda u \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

De fato,  $u(0) = 1$ . Pelo Exemplo 4 da seção anterior,  $\frac{du}{dt} = \lambda u$ . Deste modo a função  $u(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)$  é a solução de  $\textcircled{1}$ . Como  $|u(t)| = e^{\alpha t}$ , segue que  $u'(t) \neq 0$  em  $\mathbb{R}$ . Suponhamos, agora, que  $v = v(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , seja, também, solução de  $\textcircled{1}$ , isto é:

$$\begin{cases} v'(t) = \lambda v(t), & \text{para todo } t, \text{ e} \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

Vamos mostrar que  $v(t) = u(t)$  em  $\mathbb{R}$ . Temos:

$$\left[ \frac{v(t)}{u(t)} \right]' = \frac{v'(t)u(t) - v(t)u'(t)}{[u(t)]^2} = \frac{\lambda v(t)u(t) - \lambda v(t)u(t)}{[u(t)]^2} = 0.$$

Assim, existe uma constante complexa  $k$  tal que, para todo  $t$  em  $\mathbb{R}$ ,

$$\frac{v(t)}{u(t)} = k.$$

Como  $v(0) = u(0) = 1$ , resulta  $k = 1$ . Portanto,

$$v(t) = u(t) \text{ em } \mathbb{R}.$$

Fica provado que  $u(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)$  é a única função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{C}$  satisfazendo  $\textcircled{1}$ . Nada mais natural do que a seguinte definição.

**Definição.** Seja  $\lambda = \alpha + i\beta$ , com  $\alpha$  e  $\beta$  reais. Definimos

$$e^{\lambda t} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t) \quad (\text{relação de Euler})$$

para todo  $t$  real.

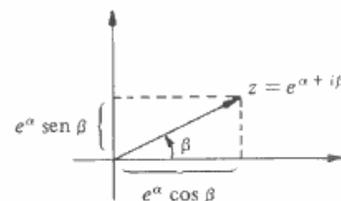
Fazendo  $t = 1$  na definição acima resulta:

$$e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$$

Se  $\alpha = 0$

$$e^{i\beta} = \cos \beta + i \operatorname{sen} \beta$$

Seja  $z = e^{\alpha + i\beta}$ . Observe que  $|z| = e^{\alpha}$  e que  $\beta$  é um argumento de  $z$ :



Seja  $\lambda$  uma constante complexa. Do que vimos anteriormente resulta:

$$\boxed{[e^{\lambda t}]' = \lambda e^{\lambda t}, \text{ para todo } t \text{ real.}}$$

O próximo exemplo mostra-nos que a propriedade

$$e^{\lambda_1 + \lambda_2} = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2}$$

é válida em  $\mathbb{C}$ .

**EXEMPLO 1.** Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  complexos dados. Mostre que

$$e^{\lambda_1 + \lambda_2} = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2}.$$

*Solução*

$u(t) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$  é a única função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{C}$  que satisfaz o problema

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = (\lambda_1 + \lambda_2)u \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Por outro lado,  $v(t) = e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , também satisfaz  $\textcircled{2}$  (verifique). Portanto, para todo  $t$  real,

$$e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} = e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t}.$$

Em particular, para  $t = 1$ ,

$$e^{\lambda_1 + \lambda_2} = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2}.$$

**EXEMPLO 2.** Verifique que, para todo  $t$  real,

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \text{ e } \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Solução

①

$$\begin{aligned} e^{it} &= \cos t + i \operatorname{sen} t, \\ e^{-it} &= \cos(-t) + i \operatorname{sen}(-t) \end{aligned}$$

ou seja,

②

$$e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t.$$

Somando membro a membro ① e ② resulta

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

Subtraindo membro a membro ① e ② resulta

$$\operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Sendo  $\lambda \neq 0$  uma constante complexa, de  $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$  segue

$$\int e^{\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} + k.$$

EXEMPLO 3. Calcule:

a)  $\int e^{it} dt$

b)  $\int e^t \cos t dt.$

Solução

a)  $\int e^{it} dt = \frac{1}{i} e^{it} + k.$

$$\begin{aligned} b) \int e^t \cos t dt &= \int e^t \left[ \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right] dt = \frac{1}{2} \int [e^{(1+i)t} + e^{(1-i)t}] dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{(1+i)t}}{1+i} + \frac{e^{(1-i)t}}{1-i} \right] + k. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int e^t \cos t dt = \frac{1}{2} e^t \left[ \frac{e^{it}}{1+i} + \frac{e^{-it}}{1-i} \right] + k.$$

Como  $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$  e  $e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t$ , resulta:

$$\int e^t \cos t dt = \frac{1}{2} e^t \left[ \frac{\cos t + i \operatorname{sen} t}{1+i} + \frac{\cos t - i \operatorname{sen} t}{1-i} \right] + k = \frac{1}{2} e^t [\cos t + \operatorname{sen} t] + k,$$

pois

$$\frac{\cos t + i \operatorname{sen} t}{1+i} + \frac{\cos t - i \operatorname{sen} t}{1-i} = \cos t + \operatorname{sen} t \text{ (verifique).}$$

EXEMPLO 4. Mostre que

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta \text{ e } \operatorname{sen} 3\theta = 3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta.$$

Solução

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

Por outro lado,

$$(e^{i\theta})^3 = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta} \cdot e^{i\theta} = e^{3i\theta}.$$

Segue que

$$e^{3i\theta} = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^3.$$

Temos, também,

$$e^{3i\theta} = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta.$$

Assim,

③

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^3 = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta.$$

Temos:

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta (i \operatorname{sen} \theta) + 3 \cos \theta (i \operatorname{sen} \theta)^2 + (i \operatorname{sen} \theta)^3,$$

ou seja,

④  $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^3 = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta + i [3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta]$ . De ③ e ④ resulta:

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta$$

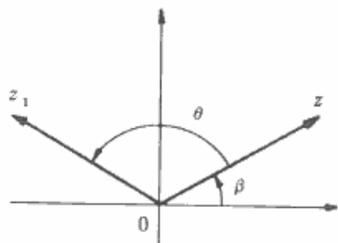
e

$$\operatorname{sen} 3\theta = 3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta.$$

EXEMPLO 5. Sejam  $z = e^{\alpha + i\beta}$ , com  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ , e  $\theta$  um real com  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Represente geometricamente  $z$  e  $ze^{i\theta}$ .

Solução

Para fixar o raciocínio, vamos supor  $\frac{\pi}{2} < \theta + \beta < \pi$ . Seja  $z_1 = ze^{i\theta}$ . Temos:  $z_1 = e^{\alpha + i(\theta + \beta)}$ .

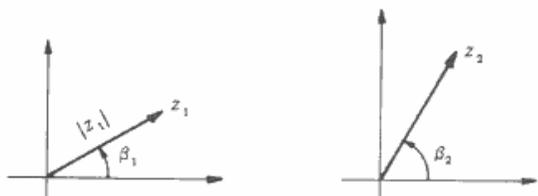


Os módulos de  $z$  e  $z_1$  são iguais a  $e^\alpha$ . O vetor  $Oz_1$  é obtido de  $Oz$  por uma rotação de  $\theta$  radiano, no sentido anti-horário.

**EXEMPLO 6.** Sejam  $z_1$  e  $z_2$  dois números complexos com argumentos  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , respectivamente. Seja  $z = z_1 \cdot z_2$ .

- a) Verifique que  $|z| = |z_1| |z_2|$ .
- b) Mostre que  $\beta_1 + \beta_2$  é um argumento de  $z$ .

*Solução*



$$z_1 = |z_1|(\cos \beta_1 + i \operatorname{sen} \beta_1) \quad z_2 = |z_2|(\cos \beta_2 + i \operatorname{sen} \beta_2)$$

Como  $e^{i\beta_1} = \cos \beta_1 + i \operatorname{sen} \beta_1$  e  $e^{i\beta_2} = \cos \beta_2 + i \operatorname{sen} \beta_2$ , resulta:

$$z_1 = |z_1| e^{i\beta_1} \quad \text{e} \quad z_2 = |z_2| e^{i\beta_2}.$$

Portanto,

$$z = |z_1| |z_2| e^{i(\beta_1 + \beta_2)}$$

ou seja,

$$z = |z_1| |z_2| [\cos(\beta_1 + \beta_2) + i \operatorname{sen}(\beta_1 + \beta_2)].$$

Portanto,

- a)  $|z| = |z_1| |z_2|$
- b)  $\beta_1 + \beta_2$  é um argumento de  $z$ .

Sejam  $a$  um número complexo dado e  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua dada, onde  $I$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$ . Consideremos a equação diferencial linear, de 1.ª ordem, com coeficiente constante,

$$\frac{dx}{dt} + ax = f(t).$$

Procedendo exatamente como na Seção 5.1 obtemos a solução geral

$$x = ke^{-at} + e^{-at} \int e^{at} f(t) dt \quad (k \in \mathbb{C}).$$

(Verifique.)

**EXEMPLO 7.** Resolva as equações:

- a)  $\frac{du}{dt} - iu = 0$
- b)  $\frac{dx}{dt} + ix = k_1 e^{it}$  ( $k_1$  constante)

*Solução*

a) Pela fórmula acima,

$$u = ke^{it} \quad (k \in \mathbb{C}).$$

$$b) x = ke^{-it} + e^{-it} \int e^{it} k_1 e^{it} dt = ke^{-it} + k_1 e^{-it} \int e^{2it} dt.$$

Ou seja,

$$x = ke^{-it} + k_1 e^{-it} \frac{e^{2it}}{2i}$$

ou ainda,

$$x = ke^{-it} + \frac{k_1}{2i} e^{it} \quad (k \in \mathbb{C}).$$

**EXEMPLO 8.** Mostre que

$$x = Ae^{it} + Be^{-it} \quad (A, B \in \mathbb{C})$$

é a solução geral de  $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$ .

*Solução*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \text{ é equivalente a}$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{dx}{dt} + ix \right] - i \left[ \frac{dx}{dt} + ix \right] = 0 \text{ (verifique).}$$

Fazendo  $u = \frac{dx}{dt} + ix$  obtemos

$$\frac{du}{dt} - iu = 0$$

cuja solução geral é  $u = k_1 e^{it}$ . Assim,

$$\frac{dx}{dt} + ix = k_1 e^{it}$$

cuja solução geral é:

$$x = ke^{-it} + \frac{k_1}{2i} e^{it} \quad (k, k_1 \in \mathbb{C}).$$

Fazendo  $A = \frac{k_1}{2i}$  e  $B = k$  obtemos:

$$x = Ae^{it} + Be^{-it} \quad (A, B \in \mathbb{C}).$$

[Observe que  $i$  e  $-i$  são as raízes da equação característica da equação dada.] Fazendo na solução acima,  $e^{it} = \cos t + i \sin t$  e  $e^{-it} = \cos t - i \sin t$  obtemos:

$$x = A(\cos t + i \sin t) + B(\cos t - i \sin t) = \underbrace{(A+B)}_{A_1} \cos t + \underbrace{(Ai - Bi)}_{B_1} \sin t,$$

ou seja,

$$x = A_1 \cos t + B_1 \sin t \quad (A_1, B_1 \in \mathbb{C}).$$

### A.3. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES, HOMOGÊNEAS, DE 2.ª ORDEM, COM COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos a equação

$$\textcircled{1} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = 0$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são números complexos dados. Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  ( $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ) as raízes da equação característica de  $\textcircled{1}$ . Procedendo exatamente como na demonstração do teorema da Sec. 5.2, obtemos os seguintes resultados:

a) se  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , a solução geral de  $\textcircled{1}$  será

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + B_1 e^{\lambda_2 t} \quad (A_1, B_1 \in \mathbb{C})$$

b) se  $\lambda_1 = \lambda_2$ , a solução geral de  $\textcircled{1}$  será

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + B_1 t e^{\lambda_1 t} \quad (A_1, B_1 \in \mathbb{C}).$$

**EXEMPLO.** Resolva a equação  $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$ .

*Solução*

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 + i \text{ ou } \lambda = -1 - i.$$

A solução geral é:

$$x = A_1 e^{(-1+i)t} + B_1 e^{(-1-i)t}$$

ou

$$x = e^{-t} [A_1 e^{it} + B_1 e^{-it}] \quad (A_1, B_1 \in \mathbb{C}).$$

Lembrando que  $e^{it} = \cos t + i \sin t$  e  $e^{-it} = \cos t - i \sin t$ , resulta

$$x = e^{-t} \left[ \underbrace{(A_1 + B_1)}_A \cos t + \underbrace{(iA_1 - iB_1)}_B \sin t \right],$$

ou seja,

$$x = e^{-t} [A \cos t + B \sin t] \quad (A, B \in \mathbb{C}).$$

**Observação:** Se  $a_1$  e  $a_2$  forem reais e se as raízes da equação  $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$  forem complexas, então tais raízes serão números complexos conjugados:  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ . Assim, a solução geral de

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = 0$$

será

$$x = A_1 e^{(\alpha + i\beta)t} + B_1 e^{(\alpha - i\beta)t}$$

ou

$$x = e^{\alpha t} [A_1 e^{i\beta t} + B_1 e^{-i\beta t}] \quad (A_1, B_1 \in \mathbb{C}).$$

Como  $e^{i\beta t} = \cos \beta t + i \sin \beta t$  e  $e^{-i\beta t} = \cos \beta t - i \sin \beta t$  resulta:

$$x = e^{\alpha t} [(A_1 + B_1) \cos \beta t + (iA_1 - iB_1) \operatorname{sen} \beta t]$$

ou

$$x = e^{\alpha t} [A \cos \beta t + B \operatorname{sen} \beta t] \quad (A, B \in \mathbb{C})$$

#### A.4. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES, DE 3.ª ORDEM, COM COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos, inicialmente, a equação homogênea

$$(I) \quad \frac{d^3 x}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_2 \frac{dx}{dt} + a_3 x = 0$$

onde  $a_1, a_2, a_3$  são constantes dadas. Sejam  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  as raízes da equação característica  $\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$ . Temos:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -a_1 \\ \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 = a_2 \quad (\text{relações de Girard}). \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -a_3 \end{cases}$$

Substituindo em (I) obtemos:

$$\frac{d^3 x}{dt^3} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \frac{d^2 x}{dt^2} + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) \frac{dx}{dt} - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 x = 0$$

que é equivalente a:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[ \underbrace{\frac{dx}{dt} - \lambda_3 x}_u \right] - (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{d}{dt} \left[ \underbrace{\frac{dx}{dt} - \lambda_3 x}_u \right] + \lambda_1 \lambda_2 \left[ \underbrace{\frac{dx}{dt} - \lambda_3 x}_u \right] = 0.$$

Segue que  $x = x(t), t \in \mathbb{R}$ , será solução de (I) se e somente se  $u = \frac{dx}{dt} - \lambda_3 x$  for solução da equação linear de 2.ª ordem

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{du}{dt} + \lambda_1 \lambda_2 u = 0.$$

Portanto,  $x = x(t)$  será solução de (I) se e somente se

$$\frac{dx}{dt} - \lambda_3 x = A_1 e^{\lambda_1 t} + B_1 e^{\lambda_2 t} \quad \text{se} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

ou

$$\frac{dx}{dt} - \lambda_3 x = A_1 e^{\lambda_1 t} + B_1 t e^{\lambda_1 t} \quad \text{se} \quad \lambda_1 = \lambda_2$$

Deixamos a seu cargo concluir que a solução geral de (I) será:

$$x = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} + C e^{\lambda_3 t} \quad \text{se} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ para } i \neq j,$$

ou

$$x = A e^{\lambda_1 t} + B t e^{\lambda_1 t} + C e^{\lambda_3 t} \quad \text{se} \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3,$$

ou

$$x = A e^{\lambda_1 t} + B t e^{\lambda_1 t} + C t^2 e^{\lambda_1 t} \quad \text{se} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.$$

As equações lineares de 3.ª ordem, não-homogêneas, com coeficientes constantes, são tratadas do mesmo modo que as de 2.ª ordem. Fica a seu cargo estender os resultados até aqui obtidos para equações lineares, com coeficientes constantes, de ordem  $n > 3$ .

# RESPOSTAS, SUGESTÕES OU SOLUÇÕES

## CAPÍTULO 1

### 1.2

1. Sim, pois, é contínua.
2. Sim, pois, é contínua.
3. Sim, pois, é limitada e descontínua apenas em  $x = 1$ .
4. Sim, pois, é contínua em  $[0, 1]$ .
5. Sim, pois, é limitada e descontínua apenas em  $x = 0$ .
6. Não, pois, não é limitada em  $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$ .
7. Sim, pois, é limitada e descontínua apenas em  $x = 0$ .
8. Não, pois, não é limitada em  $[-1, 1]$ .

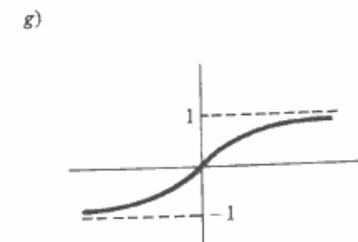
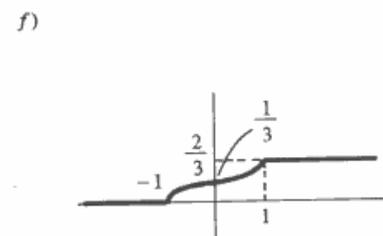
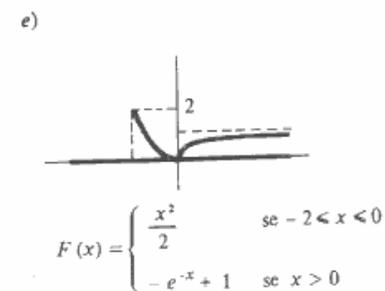
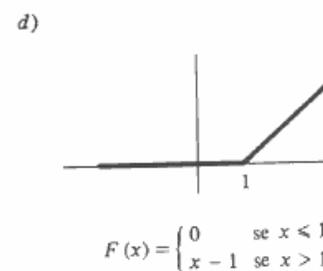
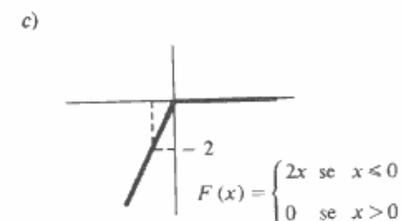
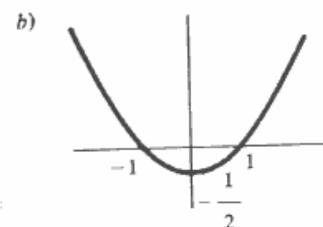
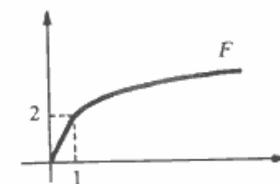
## CAPÍTULO 2

### 2.1

1. a)  $2 + \ln 2$                       b)  $\frac{11}{3}$   
c)  $\frac{1}{2} \ln 5$                           d) 1
2. a)  $\int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \int_0^x 1 dt & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \int_0^1 1 dt + \int_1^x 0 dt & \text{se } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$   
b)  $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}$  se  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $2x - \frac{4}{3}$  se  $x > 1$ .

### 2.2

$$1. a) F(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 + \ln x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



$$2. a) F(x) = \frac{x^2}{2}, x \in \mathbb{R}$$

$$b) F'(x) = x, x \in \mathbb{R}.$$

$$3. a) x > 1 \\ c) -2 < x < 2$$

$$b) x < 1 \\ d) x > 2$$

$$4. a) F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & \text{se } x \leq 1; \\ \frac{1}{3} + 2 \ln x & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad F'(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ \frac{2}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$b) \text{ Não: } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = 2$$

$$5. a) F(x) = x, x \in \mathbb{R}; F'(x) = f(x) \text{ para } x \neq 1$$

$$b) F'(1) = 1 \neq f(1)$$

## 2.4

$$1. a) F'(x) = \frac{3x}{1+x^6}$$

$$b) F'(x) = \sin x^2$$

$$c) F'(x) = -\cos x^4$$

$$d) F'(x) = 2x \sin x^4$$

$$e) F'(x) = 2 \cos 4x^2$$

$$f) F'(x) = \frac{3x^2}{5+x^{12}} - \frac{2x}{5+x^8}$$

$$g) F'(x) = 3x^2 \int_1^x e^{-s^2} ds + x^3 e^{-x^2} \quad h) F'(x) = 2x \int_0^x e^{-s^2} ds + x^2 e^{-x^2}$$

$$i) F'(x) = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} x^3$$

$$j) F'(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

2. Crescente em  $]-\infty, -2]$  e em  $[0, +\infty[$ ; decrescente em  $[-2, 0]$ .

$$3. \varphi(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$$

4. *Sugestão:* Verifique que  $[F(x) - F(-x)]' = 0$  em  $[-r, r]$ .

$$6. \text{ Integrando por partes: } \int_0^1 F(x) dx = \left[ x \int_1^x e^{-t^2} dt \right]_0^1 - \int_0^1 x F'(x) dx.$$

$$7. \frac{1}{2} [\cos \pi^2 - 1]$$

## CAPÍTULO 3

## 3.1

$$1. a) \frac{26\pi}{3}$$

$$b) \frac{21\pi}{8}$$

$$c) \frac{15\pi}{2}$$

$$d) \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$$

$$e) \frac{4\pi}{3}$$

$$f) \frac{17\pi}{2}$$

$$g) \frac{2\pi}{15}$$

$$h) 4\pi \left( \frac{\sqrt{2}-1}{3} \right)$$

$$i) \frac{44\pi}{15}$$

$$j) \frac{28\pi}{3}$$

$$l) \frac{\pi}{2}$$

$$m) 4\pi^2$$

## 3.2

$$1. a) \pi \left[ \frac{e^2 + 1}{2} \right]$$

$$b) \frac{768\pi}{7}$$

$$c) \frac{9\pi}{2}$$

$$d) 2\pi^2$$

$$e) \frac{\pi(\pi-2)}{2}$$

$$f) \pi^2$$

$$g) \frac{\pi}{6}$$

$$h) \frac{44}{15} \pi$$

## 3.3

$$1. \frac{\sqrt{3}}{3} r^3$$

$$2. \frac{\pi}{3}$$

$$3. \frac{1}{12}$$

$$4. \frac{l^3}{4}$$

## 3.4

$$1. a) \frac{\pi}{2} [e^2 + 4 - e^{-2}]$$

$$b) 4\pi R^2$$

$$c) \frac{\pi}{32} [3\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)]$$

$$d) \frac{\pi}{6} [17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}]$$

$$2. a) L(P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}. \text{ Pelo TVM existe } c_i \text{ em } ]x_{i-1}, x_i[$$

$$\text{tal que } f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i) \Delta x_i. L(P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i. \text{ logo, ...}$$

$$3. a) 1 + \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \ln \left[ \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{1+e^2}} \right]$$

$$b) 1 + \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \ln \left[ \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{1+e^2}} \right]$$

$$c) \pi R$$

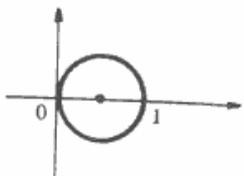
$$d) \frac{1}{4} \left[ 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + \ln \frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}} \right]$$

3.5

1.a)



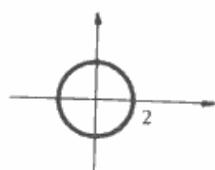
b)



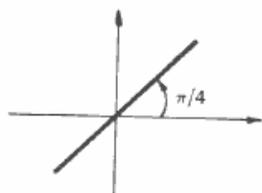
c)



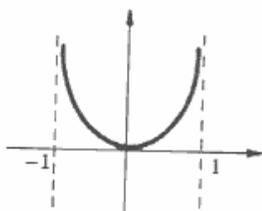
d)



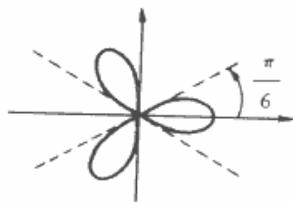
e)



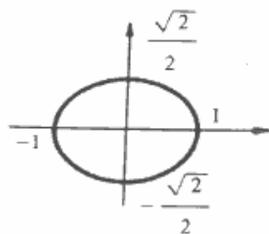
f)



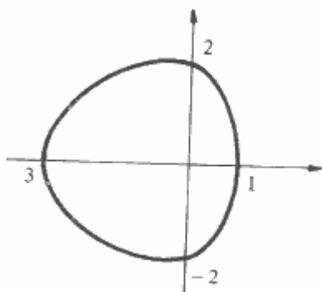
g)



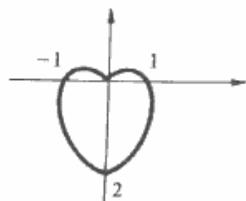
h)



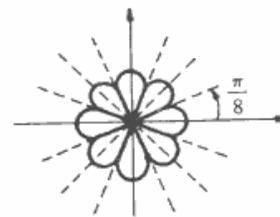
i)



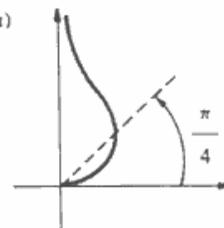
j)



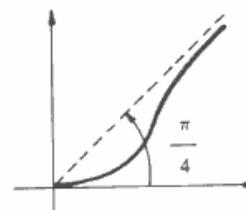
l)



m)



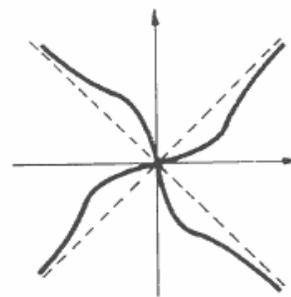
n)



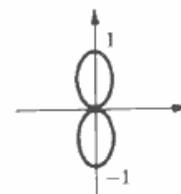
o)



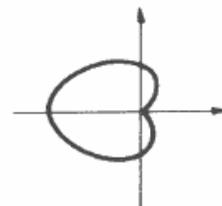
2. a)



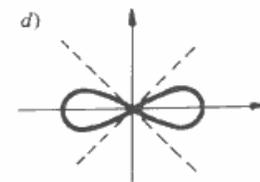
b)



c)



d)



3. a)  $\frac{9\pi}{2}$

b) 1

c)  $\frac{\pi}{2}$

d)  $\frac{\pi}{4}$

4. a) área =  $\int_0^{\pi} (2 - \cos \theta)^2 d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{5\pi}{2} - 3\sqrt{3}$ .

b)  $\frac{\pi - 2}{2}$

c)  $7\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$

d)  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

f)  $\frac{8\pi}{3} - \frac{7\sqrt{3}}{2}$

5. área =  $\frac{1}{2} \int_0^1 \theta^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_0^1 \theta^4 d\theta = \frac{1}{15}$

6.  $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} [2 \operatorname{sen} 2\theta - \operatorname{tg} 2\theta] d\theta$

3.6

1. a)  $(\frac{4}{5}, \frac{2}{7})$

b)  $(\frac{4}{3\pi}, \frac{2}{3\pi})$

c)  $(0, \frac{2}{3\pi})$

d)  $(\frac{1}{2}, \frac{6}{15})$

2. a)  $(0, \frac{4}{\pi})$

b)  $(0, \frac{3\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)}{16\sqrt{2} + 16 \ln(\sqrt{2} + 1)})$

c)  $(0, \frac{e^2 + 4 - e^{-2}}{4(e - e^{-1})})$

5. a)  $4\pi^2$

b)  $2\pi^2$

6.  $\pi^2$

7. a)  $(0, \frac{5}{9})$

b)  $\frac{208\pi}{45}$

8.  $2\sqrt{2} \pi^2$

CAPÍTULO 4

4.1

1. a)  $\frac{1}{2}$

b) 1

c)  $\frac{1}{s}$

d)  $+\infty$

e) 1

f)  $\frac{1}{s^2}$

g)  $\frac{1}{2}$

h)  $\frac{\pi}{2}$

i)  $\frac{\pi}{2s}$

j)  $\frac{1}{3}$

l)  $+\infty$

m)  $\frac{1}{2} \ln 3$

n)  $\frac{\pi}{4}$

o) 3

p)  $\frac{1}{2}$

q)  $\frac{1}{2} \ln 2$

2.  $+\infty$  se  $\alpha \leq 1$ ;  $\frac{1}{\alpha - 1}$  se  $\alpha > 1$

3. a) 1

b)  $-\frac{1}{4}$

c)  $-\infty$

d)  $-\frac{1}{2}$

e) 2

f) 2

g)  $\frac{\pi}{2}$

h) 4

4.  $m = \frac{1}{6}$

5.  $k = -2$

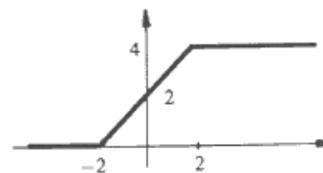
6.  $m = \frac{3}{2}$

9. a)  $\frac{1}{1+s^2} + \frac{3s}{4+s^2}$

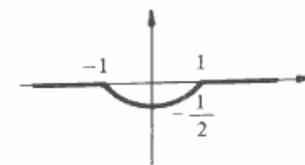
b)  $\frac{3}{s^2} + \frac{3}{s-3} + \frac{1}{(s-1)^2}$

4.2

1.



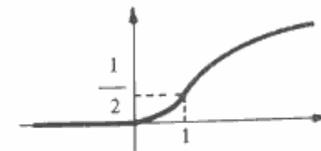
2.



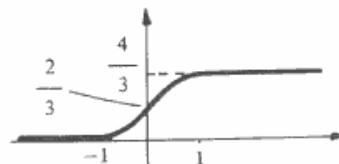
3.



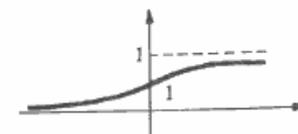
4.



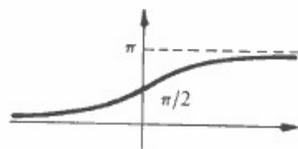
5.



6.



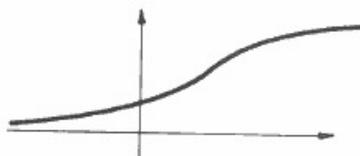
7.



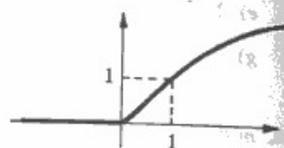
8.



9.



10.



4.3

1. a)  $\frac{3}{2}$

b)  $+\infty$

c)  $\frac{2\sqrt{26}}{3}$

d)  $-1$

3. a)  $\frac{\pi}{2}$

b)  $2\sqrt{2}$

c)  $+\infty$

d)  $1$

5. a)  $0$

b)  $+\infty$

4.4

1. a) converge  
c) converge  
e) converge  
g) converge  
i) converge  
l) converge

- b) diverge  
d) converge  
f) converge  
h) converge  
j) converge  
m) converge

3. a) diverge  
c) converge

- b) converge  
d) diverge

6.  $f(t) = \frac{10}{9} e^{-3t} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} t$

7. a)  $\frac{12}{5} e^{2t} - \frac{2}{5} \cos t + \frac{1}{5} \sin t$

b)  $-\frac{4}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}$

CAPÍTULO 5

5.1

1. a)  $ke^{3t} - \frac{1}{2} e^t$

b)  $ke^t - 2t - 3$

c)  $ke^t - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t$

d)  $ke^{-2t} - \frac{1}{5} \cos t + \frac{2}{5} \sin t$

e)  $e^{2t} [k + t]$

f)  $ke^t - 5$

g)  $ke^{-t} + \frac{1}{5} \cos 2t + \frac{2}{5} \sin 2t$

h)  $ke^{-2t} + \frac{1}{4}$

i)  $y = ke^{-3x} + \frac{1}{3} x - \frac{1}{9}$

j)  $s = ke^{2t} + te^{2t}$

l)  $q = ke^{-t} + \frac{1}{10} \cos 3t + \frac{3}{10} \sin 3t$

m)  $ke^x - \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x$

n)  $y = ke^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}$

o)  $x = ke^{-2t} + t - 2$

p)  $ke^{2x} + \frac{1}{5} e^{3x}$

q)  $T = ke^{3t} - \frac{2}{3}$

r)  $y = ke^x - \frac{1}{10} \cos 3x + \frac{3}{10} \sin 3x$

s)  $x = ke^{3t} + \frac{1}{4} e^{-t}$

2.  $8p_0$ , onde  $p_0$  é a população no instante  $t = 0$ .

3. A equação que rege o resfriamento é  $\frac{dT}{dt} = \alpha(T - 20)$ , onde  $\alpha$  é a constante de proporcionalidade.  $T(t) = 90e^{\alpha t} + 20$  onde  $\alpha = \frac{1}{20} \ln \frac{2}{3}$ .

4. a)  $i = \frac{E_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$

b)  $i = \frac{1}{1 + 576\pi^2} [e^{-5t} - 264\pi \cos 120\pi t + 11 \sin 120\pi t]$

5.2

1. a)  $x = Ae^{3t} + Be^{-t}$

b)  $x = e^t (A + Bt)$

c)  $x = Ae^{2t} + Be^{-2t}$

d)  $x = A + Be^{4t}$

e)  $x = Ae^{\sqrt{3}t} + Be^{-\sqrt{3}t}$

f)  $x = e^{-t} (A + Bt)$

g)  $y = Ae^{2x} + Be^{-x}$

h)  $y = e^{-3x} (A + Bx)$

i)  $A + Be^{-5x}$

j)  $y = Ae^{-\sqrt{6}x} + Be^{\sqrt{6}x}$

l)  $x = A + Be^{-3t}$

m)  $x = A + Bt$

n)  $x = Ae^{-t} + Be^{\frac{1}{2}t}$

o)  $x = A + Be^{-\frac{5}{3}t}$

2. a)  $x = \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{2}{3}e^{-3t}$

b)  $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t}$

c)  $y = (1-x)e^x$

3. a)  $x = Ae^{\sqrt{2}t} + Be^{-\sqrt{2}t}$

b)  $x = Ae^{-2t} + Be^{-3t}$

c)  $y = A + Be^{7t}$

d)  $y = e^{5t}[A + Bt]$

4. A equação que rege o movimento da partícula é:  $m\ddot{x} = -2\dot{x} - x$  ou  $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$ , pois,  $m = 1$ .

a)  $x(t) = e^{-t}(1+t)$ . Desenhe o gráfico.

b)  $x(t) = (1-t)e^{-t}$ . Desenhe o gráfico.

5.  $x(t) = e^{1-2t} - e^{-t}$

## 5.3

1. a)  $a = -2$  e  $b = 2$

b)  $a = -5$  e  $b = 12$

c)  $a = \frac{3}{5}$  e  $b = -\frac{1}{5}$

d)  $a = -\frac{1}{5}$  e  $b = \frac{2}{5}$

e)  $a = -4$  e  $b = 0$

f)  $a = -\frac{1}{2}$  e  $b = -\frac{1}{2}$

g)  $a = \frac{10}{13}$  e  $b = \frac{15}{13}$

h)  $a = \frac{1}{2}$  e  $b = \frac{1}{2}$

2. a)  $\pm i$

b)  $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

c)  $-1 \pm i$

d)  $-1 \pm \sqrt{2}i$

e)  $\pm wi$

f)  $\pm 2i$

g)  $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$

h)  $\pm \sqrt{5}i$

i)  $\pm \sqrt{2}i$

j)  $\pm 2$

l)  $2 \pm i$

## 5.4

1. a)  $e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$

b)  $A \cos \sqrt{5}t + B \sin \sqrt{5}t$

c)  $e^{-\frac{1}{2}t}(A \cos \sqrt{3}t + B \sin \sqrt{3}t)$

d)  $Ae^{\sqrt{5}t} + Be^{-\sqrt{5}t}$

e)  $A \cos 3t + B \sin 3t$

f)  $e^{-t}(A \cos t + B \sin t)$

g)  $e^{2t}(A + Bt)$

h)  $A + Be^{-5t}$

i)  $e^{-3t}(A \cos t + B \sin t)$

j)  $e^{-\frac{1}{2}t} \left[ A \cos \frac{\sqrt{11}}{2}t + B \sin \frac{\sqrt{11}}{2}t \right]$

l)  $Ae^{5t} + Be^t$

m)  $e^{3t}(A + Bt)$

n)  $A \cos 2t + B \sin 2t$

o)  $e^{-\frac{3}{2}t} \left[ A \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right]$

p)  $A \cos \sqrt{a}t + B \sin \sqrt{a}t$

q)  $Ae^{\sqrt{-a}t} + Be^{-\sqrt{-a}t}$

r)  $e^t [A \cos \sqrt{5}t + B \sin \sqrt{5}t]$

s)  $e^{-4t} [A \cos 2t + B \sin 2t]$

2. a)  $x = \frac{1}{2} \sin 2t$

b)  $-e^{-t}(\cos t + \sin t)$

c)  $e^{-\frac{1}{2}t} \left[ \cos \sqrt{7}t + \frac{3\sqrt{7}}{14} \sin \sqrt{7}t \right]$

d)  $-\cos t + 2 \sin t$

3.  $\dot{x}(t) = -2 \sin 2t - \cos 2t$

4.  $x(t) = e^{-t} \sin t$

5.  $f(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$

6.  $x = e^t \sin t$

7. a)  $c > 2$

b)  $c = 2$

c)  $0 < c < 2$

## 5.5

1. a)  $Ae^{\sqrt{3}t} + Be^{-\sqrt{3}t} - \frac{1}{12} \cos 3t$

b)  $Ae^{-2t} + Bte^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$

c)  $Ae^t + Bte^t + \frac{5}{2}t^2e^t$

d)  $Ae^{-t} + Be^{-3t} + \frac{8}{15}e^{2t}$

e)  $e^{-t}(A \cos t + B \sin t) + 2$

f)  $A + Be^{-2t} + 2t$

g)  $A \cos t + B \sin t - t \cos t$

h)  $Ae^{2t} + Be^t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{7}{4}$

i)  $A + Be^{3t} - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t$

j)  $A \cos 3t + B \sin 3t + \frac{1}{8} \sin t + \frac{1}{4} \cos t$

l)  $Ae^{-t} + Bte^{-t} - \frac{3}{25} \cos 2t +$

m)  $A \cos 3t + B \sin 3t - \frac{1}{6}t \cos 3t$

$+ \frac{4}{25} \sin 2t$

n)  $Ae^{2t} + Be^{-2t} + \frac{1}{4}te^{2t}$

o)  $Ae^{2t} + Be^{-2t} - \frac{8}{5} \cos t$

p)  $A + Be^{2t} + \frac{2}{39} \cos 3t - \frac{1}{13} \sin 3t$

q)  $A + Be^{2t} - e^t$

r)  $A + Be^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t}$

s)  $A + Be^{2t} - \frac{5}{2}t$

2.  $A \cos wt + B \sin wt - \frac{1}{2w}t \cos wt$

3. a)  $\frac{2}{3} \cos 2t + \frac{1}{3} \sin 2t + \frac{1}{3} \cos t$

b)  $te^{-3t} \left[ 1 + \frac{1}{2}t \right]$

c)  $\frac{1}{4}t \sin 2t$

d)  $-\frac{5}{13} \cos 2t - \frac{15}{26} \sin 2t + \frac{5}{13} e^{3t}$

4.  $x_p = \frac{b}{(w_0^2 - w^2)^2 + 4\gamma^2 w^2} [-2\gamma w \cos wt + (w_0^2 - w^2) \sin wt]$

5. Sugestão: Considere os casos  $w = w_0$  e  $w \neq w_0$ .

## CAPÍTULO 6

6.3

1.  $(x, y) = (1, 2) + \lambda(-1, 1), \lambda \in \mathbb{R}$
2.  $(x, y) = (1, -1) + \lambda(2, 1), \lambda \in \mathbb{R}$
3.  $\vec{u} = (-2, 3)$
4.  $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 1\right) + \lambda(-2, 3), \lambda \in \mathbb{R}$
5. a)  $\vec{u} = (2, 1)$
- b)  $\vec{u} = (-1, 1)$
- c)  $\vec{u} = (5, 2)$
- d)  $\vec{u} = (-2, 1)$
6. a)  $\vec{n} = (2, 1)$
- b)  $\vec{n} = (3, -1)$
- c)  $\vec{n} = (1, 3)$
- d)  $\vec{n} = (2, -3)$
7. a)  $(x, y) = (2, -5) + \lambda(1, 1), \lambda \in \mathbb{R}$
- b)  $(x, y) = (1, -2) + \lambda(-1, 2), \lambda \in \mathbb{R}$
8. a)  $(x, y) = (1, 2) + \lambda(2, 1), \lambda \in \mathbb{R}$
- b)  $(x, y) = (2, -2) + \lambda(1, 3), \lambda \in \mathbb{R}$
9. a)  $(2, 1, 3) \cdot [(x, y, z) - (1, 1, 1)] = 0$  ou  $2x + y + 3z = 6$
- b)  $(-2, 1, 2) \cdot [(x, y, z) - (2, 1, -1)] = 0$  ou  $2x - y - 2z = 5$
10. a)  $(x, y, z) = (0, 1, -1) + \lambda(1, 2, -1), \lambda \in \mathbb{R}$
- b)  $(x, y, z) = (2, 1, -1) + \lambda(2, 1, 3), \lambda \in \mathbb{R}$
12.  $(x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(3, 0, -3), \lambda \in \mathbb{R}$  (tal reta é paralela à direção de  $\vec{u} \wedge \vec{v} = (3, 0, -3)$ ).
13. a)  $\vec{u} \wedge \vec{v} = (5, -4, -3)$
- b)  $\vec{u} \wedge \vec{v} = (4, -2, 8)$
14. a)  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot [(x, y, z) - (1, 2, 1)] = 0$  ou  $x - y + z = 0$
- b)  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot [(x, y, z) - (0, 1, 2)] = 0$  ou  $-4x + y + 3z = 7$

6.4

2. a)  $\sqrt{5}$
- b)  $\sqrt{14}$
- c)  $\sqrt{5}$
- d)  $\frac{\sqrt{13}}{6}$
3.  $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \geq \sqrt{u_1^2} = |u_1|$  (veja:  $u_2^2 + u_3^2 \geq 0 \Rightarrow u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \geq u_1^2 \Rightarrow \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \geq \sqrt{u_1^2}$ ). De modo análogo, tem-se:  $\|\vec{u}\| \geq |u_2|$  e  $\|\vec{u}\| \geq |u_3|$ .
5.  $\|\vec{u}\| = \|(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v}\| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\| + \|\vec{v}\|$ , ou seja,  $\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|$ .
9.  $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \beta(\vec{u} \cdot \vec{v}) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = \alpha$ , pois,  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 1$  e  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ . De modo análogo, obtém-se  $\vec{v} \cdot \vec{w} = \beta$ .
12. Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois reais quaisquer tais que  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}$ . Segue que  $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{0}$ ; daí  $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \beta(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 0$  e, portanto,  $\alpha = 0$ . Do mesmo modo,  $\vec{v} \cdot (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{0}$  e, portanto,  $\alpha(\vec{v} \cdot \vec{u}) + \beta(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 0$ ; logo,  $\beta = 0$ , pois,  $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$  e  $\vec{v} \cdot \vec{v} = 1$ . Fica provado, assim, que quaisquer que sejam os reais  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0} \rightarrow \alpha = \beta = 0$ . Portanto,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são linearmente independentes.

$$17. \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad \text{sen}^2 \theta = 1 - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2}$$

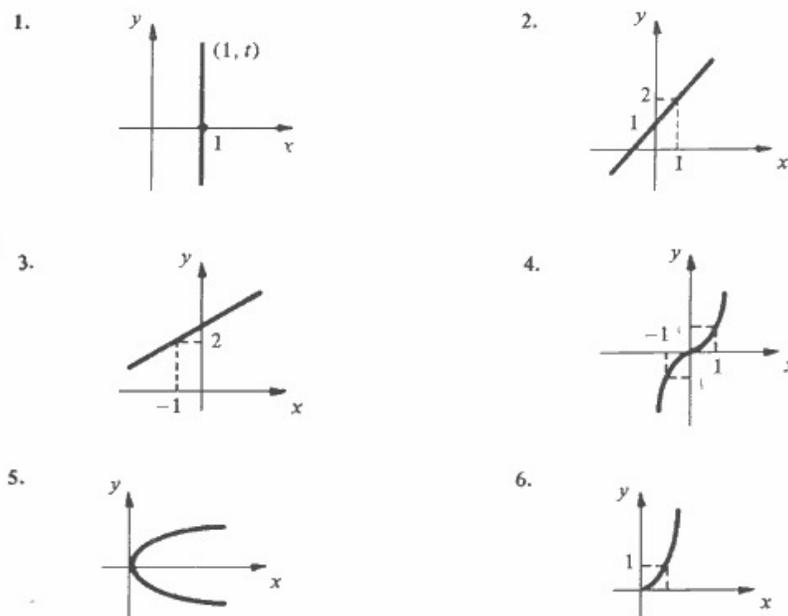
$$\text{sen} \theta = \frac{\sqrt{\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{(u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

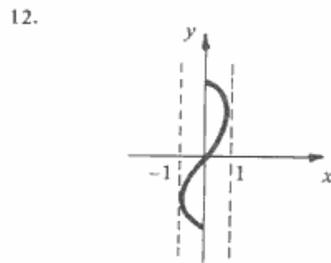
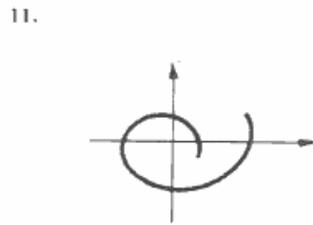
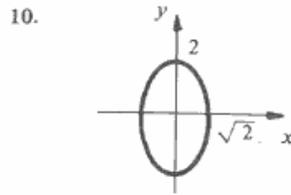
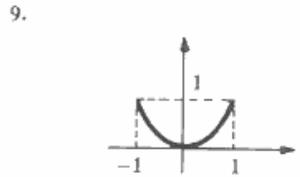
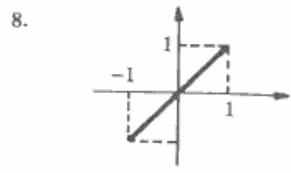
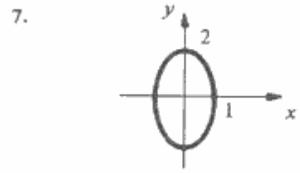
6.5

1. a) É aberto
- b) Não é aberto
- c) É aberto (conjunto vazio)
- d) Não é aberto
- e) É aberto (conjunto vazio)
- f) É aberto
- g) É aberto
- h) Não é aberto
2. a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
- b)  $\phi$
- c)  $\{(0, 1)\}$
- d)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1\}$
- e)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1, 1 \leq y \leq 2\}$
- f)  $\mathbb{R}^2$
7. a) É fechado
- b) Não é fechado
- c) É fechado
- d) Não é fechado
- e) É fechado
- f) É fechado
- g) É fechado
- h) Não é fechado

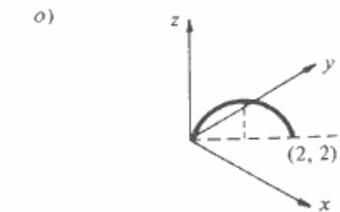
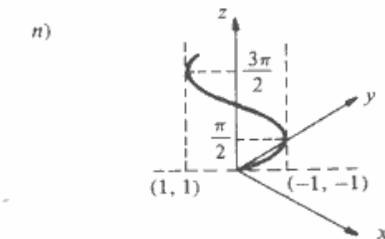
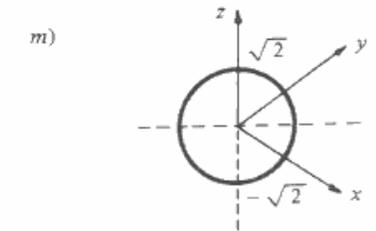
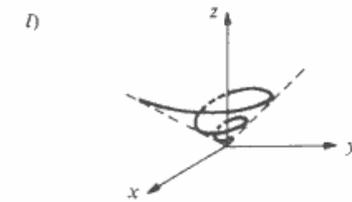
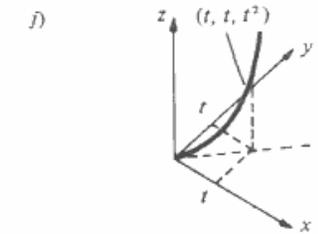
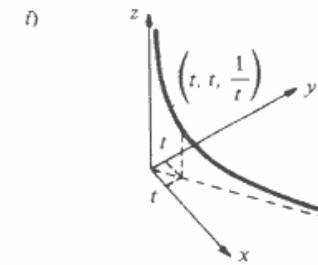
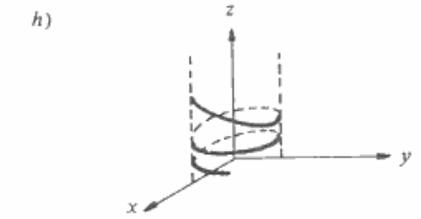
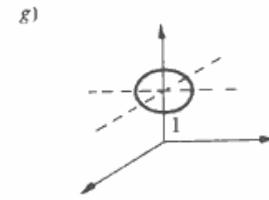
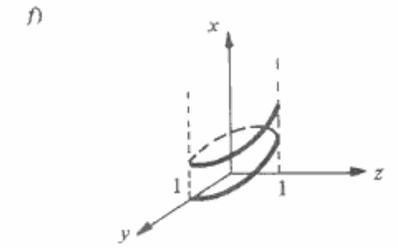
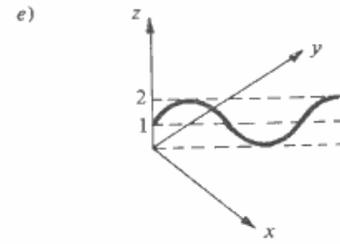
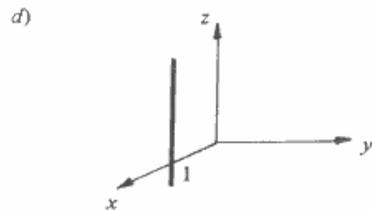
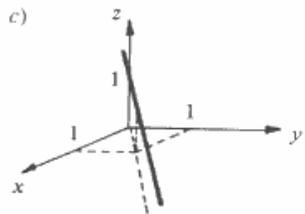
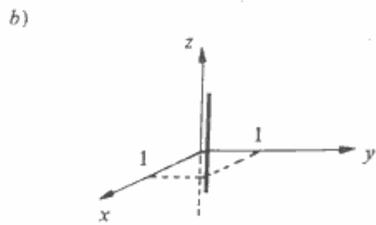
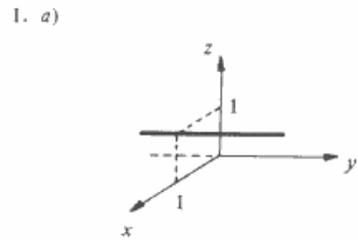
## CAPÍTULO 7

7.1





7.2



2. a)  $0 < t \leq 1$

b)  $\left(\ln \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{9}{25}\right)$

3. a)  $-\sqrt{5} < t < -1$  ou  $2 \leq t < \sqrt{5}$

b)  $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}, t \neq 0$

7.3

1. a)  $3t + t \sin t + 2t^2$

b)  $(e^{-t}t, e^{-t} \sin t, 2e^{-t})$

c)  $(t-6, \sin t - 2t, 2-2t^2)$

d)  $(t^2 \sin t - 2t, 6 - t^3, t^2 - 3 \sin t)$

2.  $(2 + t^2) \vec{i} + (t^3 - t) \vec{j} - 3t \vec{k}$

3.  $\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t) = 1 + t$

7.4

1. a)  $\lim_{t \rightarrow 1} \vec{F}(t) = \left( \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t}-1}{t-1}, \lim_{t \rightarrow 1} t^2, \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{t} \right) = \left( \frac{1}{2}, 1, 0 \right)$

b)  $(3, 2, 0)$

c)  $3 \vec{i} + \frac{\pi}{4} \vec{j} + 4 \vec{k}$

2. a)  $\lim_{t \rightarrow t_0} [\vec{F}(t) + \vec{G}(t)] = \left( \lim_{t \rightarrow t_0} [F_1(t) + G_1(t)], \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} [F_n(t) + G_n(t)] \right) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) = \vec{a} + \vec{b}$

b)  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \vec{F}(t) = \left( \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) F_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) F_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) F_n(t) \right) = (La_1, La_2, \dots, La_n) = L \vec{a}$

c)  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} (F_2(t)G_3(t) - F_3(t)G_2(t), F_3(t)G_1(t) - F_1(t)G_3(t), F_1(t)G_2(t) - F_2(t)G_1(t)) = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = \vec{a} \wedge \vec{b}$

3. a)  $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$

b)  $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 1\}$

5. a)  $|\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)| \leq \|\vec{F}(t)\| \|\vec{G}(t)\|$  e  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\vec{F}(t)\| = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\vec{G}(t)\| = 0$ ; pelo teorema do confronto,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\vec{F}(t)\| \|\vec{G}(t)\| = 0$ ; logo,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = 0$ .

6. Como  $\vec{F}$  é contínua em  $[a, b]$ ,  $\|\vec{F}(t)\|$  também será. Segue que  $\|\vec{F}(t)\|$  é limitada em  $[a, b]$ , ou seja, existe  $M > 0$  tal que  $\|\vec{F}(t)\| \leq M$  em  $[a, b]$ .

7.5

1. a)  $\frac{d\vec{F}}{dt} = \left( 6t, -e^{-t}, \frac{2t}{1+t^2} \right); \frac{d^2\vec{F}}{dt^2} = \left( 6, e^{-t}, \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2} \right)$

b)  $\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{2}{3\sqrt[3]{t}} \vec{i} - 2t \sin t^2 \vec{j} + 3 \vec{k}; \frac{d^2\vec{F}}{dt^2} = \frac{-2}{9t\sqrt[3]{t}} \vec{i} - (2 \sin t^2 + 4t^2 \cos t^2) \vec{j}$

c)  $\frac{d\vec{F}}{dt} = 5 \cos 5t \vec{i} - 4 \sin 4t \vec{j} + 2e^{-2t} \vec{k}; \frac{d^2\vec{F}}{dt^2} = -25 \sin 5t \vec{i} - 16 \cos 4t \vec{j} - 4e^{-2t} \vec{k}$

2. a)  $(x, y, z) = \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3} \right) + \lambda \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right), \lambda \in \mathbb{R}$

b)  $(x, y) = (1, 1) + \lambda(2, 1), \lambda \in \mathbb{R}$

c)  $(x, y, z) = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4 \right) + \lambda \left( -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 4 \right), \lambda \in \mathbb{R}$

d)  $(x, y, z, w) = (1, 1, 1, 1) + \lambda(1, 2, 1, 2), \lambda \in \mathbb{R}$

3. Seja  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ ; sendo  $F'(t) = \vec{0}$  em  $I$ , resulta  $F'_i(t) = 0$  em  $I$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Segue que existem constantes  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , tais que  $F_i(t) = k_i$ , para todo  $t$  em  $I$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Portanto,  $F(t) = k$  em  $I$ , onde  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ .

4. Verifique que  $\frac{d}{dt} \left[ \vec{F}(t) \wedge \frac{d\vec{F}}{dt}(t) \right] = \vec{0}$  em  $I$ , e use o Exerc. 3.

5. Sugestão: para  $t \geq 0$ ,  $\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{t} \Leftrightarrow \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = t$ .

7. a)  $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} + 2t \vec{j}; \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2 \vec{j}$

b)  $\vec{v}(t) = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \vec{k}; \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\cos t \vec{i} - \sin t \vec{j}$

c)  $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0; \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$

d)  $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 t; \vec{a}(t) = \vec{a}_0$

9. a)  $\|\vec{T}(t)\| = 1, \vec{T}(t) \cdot \vec{T}(t) = 1$ , daí  $2 \frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \vec{T} = 0$ , ou seja,  $\vec{T}$  e  $\frac{d\vec{T}}{dt}$  são ortogonais.

b) Sugestão:  $\vec{v}(t) = v(t) \vec{T}(t)$ .

12. a)  $\vec{r}(t) = \left( \frac{t^2}{2} + 1 \right) \vec{i} + \vec{j} + 2t \vec{k}$

b)  $\vec{r}(t) = (2 - \cos t) \vec{i} + \left( \frac{1}{2} \sin 2t - 1 \right) \vec{j} + (2 + \ln(t+1)) \vec{k}$

c)  $\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \arctg 2t \vec{i} + (1 - e^{-t}) \vec{j} + (t+1) \vec{k}$

7.6

1. a)  $\int_0^1 [t \vec{i} + e^t \vec{j}] dt = \left[ \int_0^1 t dt \right] \vec{i} + \left[ \int_0^1 e^t dt \right] \vec{j} = \frac{1}{2} \vec{i} + (e-1) \vec{j}$

b)  $\frac{\pi}{2} \vec{j} + 2 \vec{k}$

c)  $3 \vec{i} + 2 \vec{j} + \vec{k}$

2. a)  $(2-e) \vec{i} + \left( e - \frac{3}{2} \right) \vec{j} - \frac{1}{2} \vec{k}$

b)  $\frac{1}{2} + e$

3. Observe que  $\vec{G}(t) = \left( \int_0^1 F_1(s) ds, \dots, \int_0^1 F_n(s) ds \right)$  e aplique o teorema fundamental do cálculo.

4. a)  $2\vec{i} + 2\vec{j} + \frac{8}{3}\vec{k}$       b)  $\ln 2\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \vec{k}$

7.7

1. a)  $\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$     b)  $\sqrt{5}$

c)  $\int_0^\pi \sqrt{1+e^{-2t}} dt = \int_{\arctg e^{-\pi}}^{\arctg e^{-0}} \left[ \frac{1}{\sen \theta} + (\cos \theta)^{-2} \sen \theta \right] d\theta =$   
 $= \ln \frac{1 + \sqrt{1+e^{-2\pi}}}{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{2} + \pi - \sqrt{1+e^{-2\pi}}$

d)  $\sqrt{3} [1 - e^{-1}]$       e)  $\ln \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{1+e^2}} + 1 + \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2}$

f)  $\pi$       g)  $\frac{e - e^{-1}}{2}$

2.  $L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta =$   
 $= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \sen \theta\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \sen \theta + \rho \cos \theta\right)^2} d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta.$

3. a)  $\frac{1}{2} [\pi\sqrt{1+\pi^2} + \ln(\pi + \sqrt{1+\pi^2})]$     b)  $2\sqrt{2} - \sqrt{2}$

c)  $\pi$       d)  $\sqrt{2} [1 - e^{-2\pi}]$

8. a)  $\delta(s) = \left( \frac{2s}{\sqrt{13}} + 1, \frac{3s}{\sqrt{13}} - 1 \right)$     b)  $\delta(s) = \left( 2 \cos \frac{s}{2}, 2 \sen \frac{s}{2} \right)$

c)  $\delta(s) = \left( \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sen \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$

d)  $\delta(s) = \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left( \cos \left( \ln \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right), \sen \left( \ln \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right)$

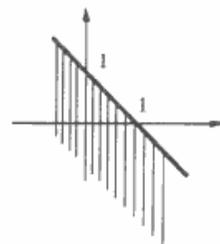
**CAPÍTULO 8**

8.1

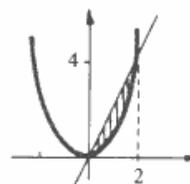
1. a) 1      b)  $3a + 2x$   
 c) 3      d) 2

2. a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq -2y\}$       b)  $\frac{u}{v}$

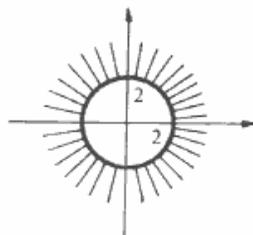
3. a)



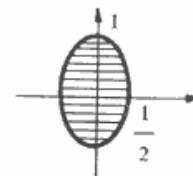
c)



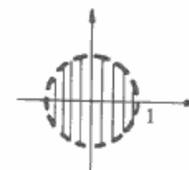
e)



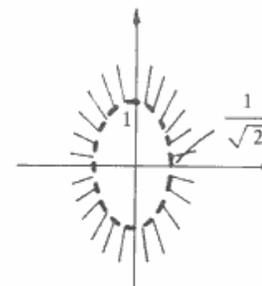
g)



b)

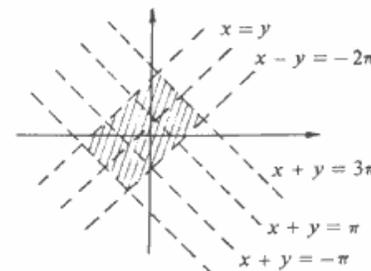


d)



f)  $|x| - |y| \geq 0 \Leftrightarrow -|x| \leq y \leq |x|$

h)



4.  $f(x, y) = ax + by$ , onde  $a$  e  $b$  devem ser determinados de modo que  $f(1, 0) = 2$  e  $f(0, 1) = 3$ . Tem-se  $a = 2$  e  $b = 3$ . Assim:  $f(x, y) = 2x + 3y$ .

5. a) homogênea de grau zero.      b) homogênea de grau 2.  
 c) não é homogênea.              d) homogênea de grau -2.

6. a)  $f(4\sqrt{3}, 4) = f\left(8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, 8 \cdot \frac{1}{2}\right) = 8^2 f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 64 \frac{\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}$ . (Observe que

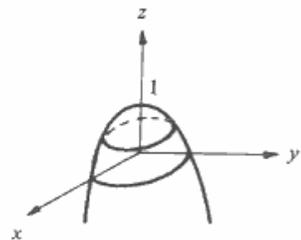
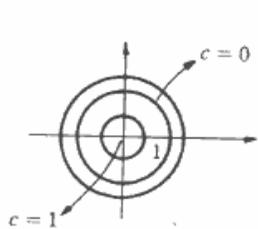
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \text{ e que } f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b)  $f(0, 3) = 3^2 f(0, 1) = 0$

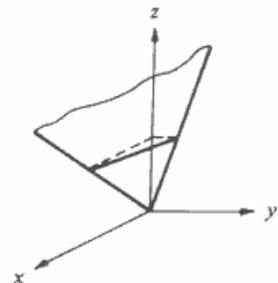
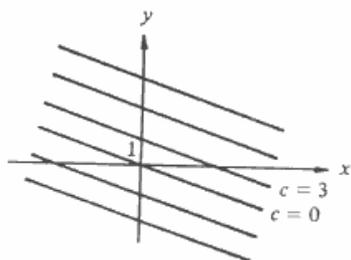
c)  $f(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = x\sqrt{x^2 + y^2}$

8.2

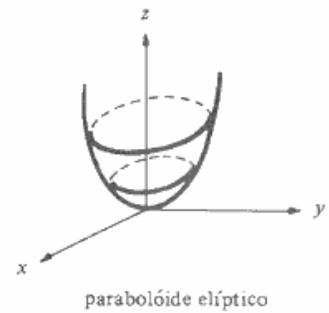
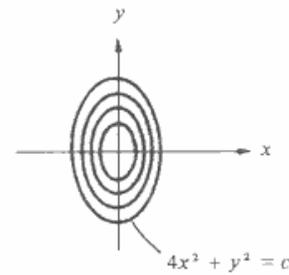
1. a)  $1 - x^2 - y^2 = c$  ou  $x^2 + y^2 = 1 - c$  ( $c \leq 1$ )



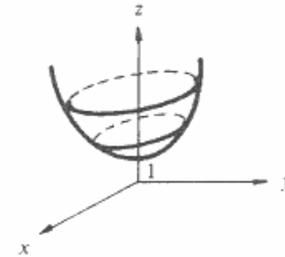
b)  $x + 3y = c$



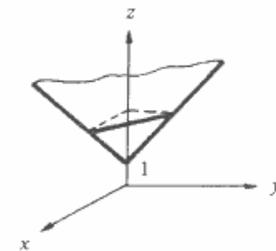
c)



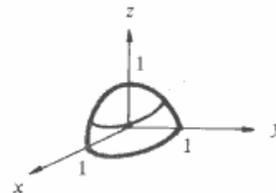
d) As curvas de nível são circunferências com centros na origem.



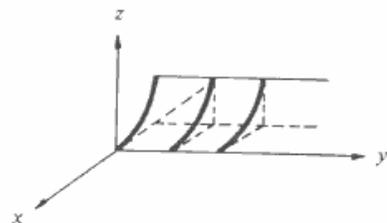
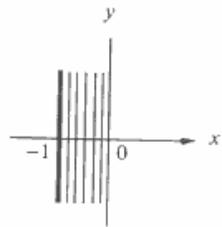
e) As curvas de nível são retas paralelas a  $x + y = 0$ .



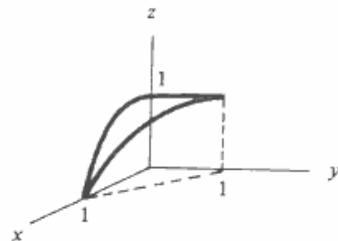
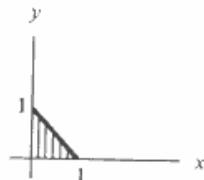
f) As curvas de nível são as circunferências  $x^2 + y^2 = 1 - c^2$ , com  $0 \leq c \leq 1$ . O gráfico de  $g$  é a parte da superfície esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , correspondente a  $z \geq 0$ .



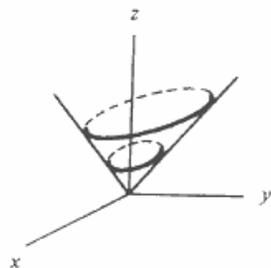
g)  $x^2 = c$  ( $0 \leq c \leq 1$ );  $x = -\sqrt{c}$



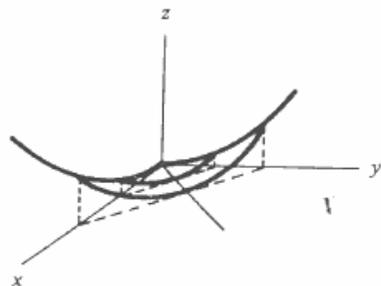
h)



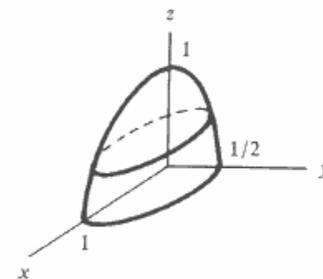
i) As curvas de nível são as circunferências  $x^2 + y^2 = c^2$ ,  $c \geq 0$ .



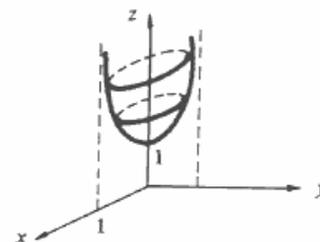
j)  $y = x$  é a curva de nível correspondente a  $c = 0$ . Para  $c > 0$ , a curva de nível é o par de retas  $y = x + \sqrt{c}$  e  $y = x - \sqrt{c}$ .



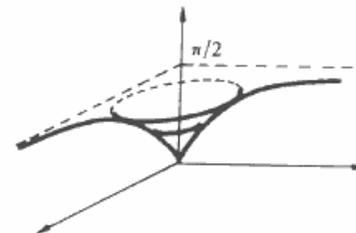
l) As curvas de nível são as elipses  $x^2 + 4y^2 = 1 - c^2$  ( $0 \leq c \leq 1$ ).



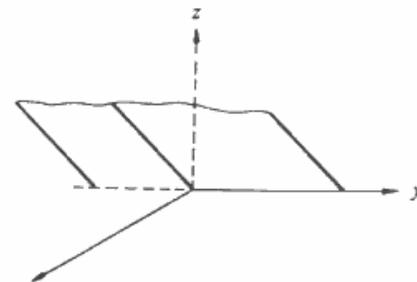
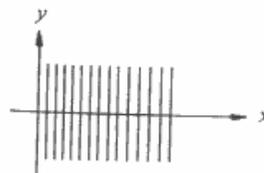
m) As curvas de nível são as circunferências ( $c \geq 1$ )  $x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{c^2}$ .



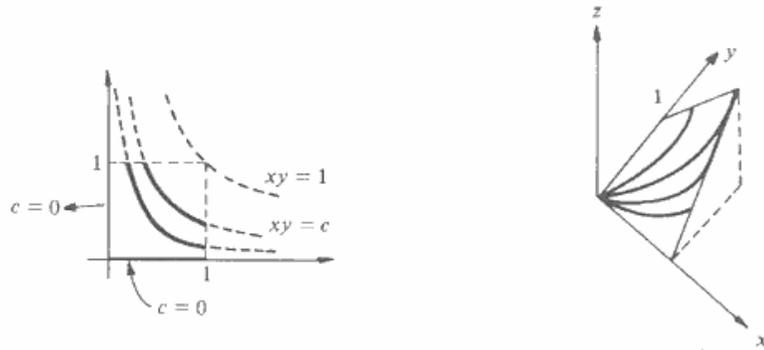
n) As curvas de nível são as circunferências  $x^2 + y^2 = \operatorname{tg} c$  ( $0 \leq c < \frac{\pi}{2}$ ).



o) As curvas de nível são retas  $x = c$  ( $c \geq 0$ ).

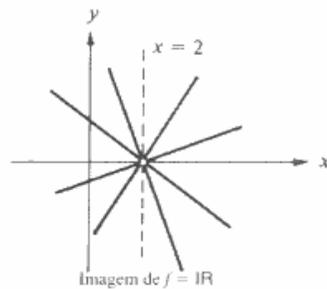
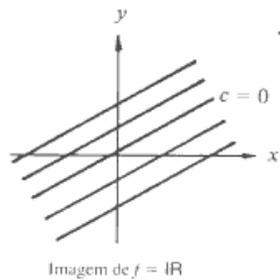


r)



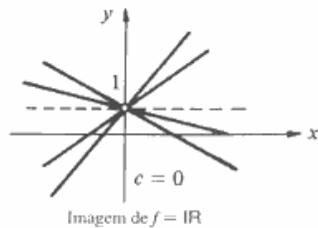
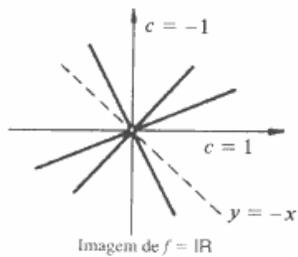
2. a)  $x - 2y = c (c \in \mathbb{R})$

b)  $c = \frac{y}{x-2} \Leftrightarrow y = c(x-2), x \neq 2$



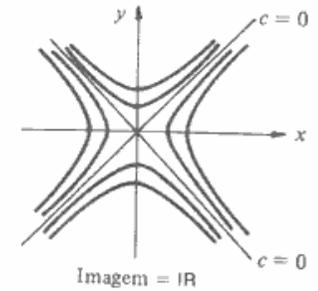
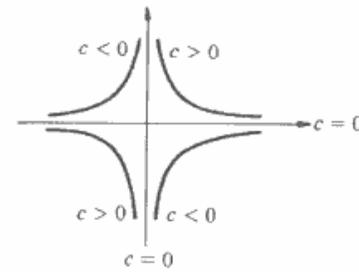
c)  $(1+c)y = (1-c)x (c \in \mathbb{R})$

d)  $c(y-1) = x (c \in \mathbb{R})$



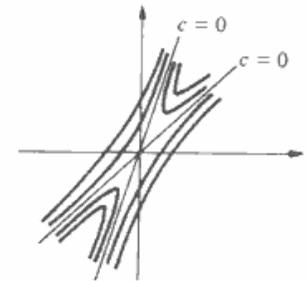
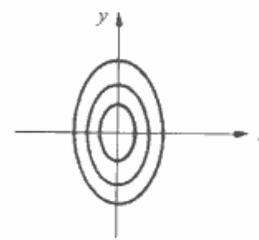
e)  $xy = c (c \in \mathbb{R})$

f)  $x^2 - y^2 = c (c \in \mathbb{R})$



g)  $4x^2 + y^2 = c (c \geq 0)$   
Imagem =  $[0, +\infty[$

h)  $c = 3x^2 - 4xy + y^2$   
 $y = 2x \pm \sqrt{x^2 + c} (c \in \mathbb{R})$



i)  $cy^2 = (1-c)x^2 (0 \leq c \leq 1)$

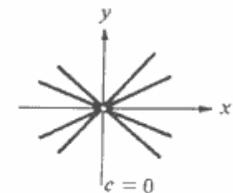
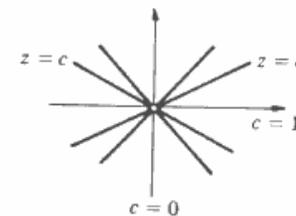
Se  $c = 0, x = 0$

Se  $c \neq 0, y = \pm \sqrt{\frac{1-c}{c}} x$

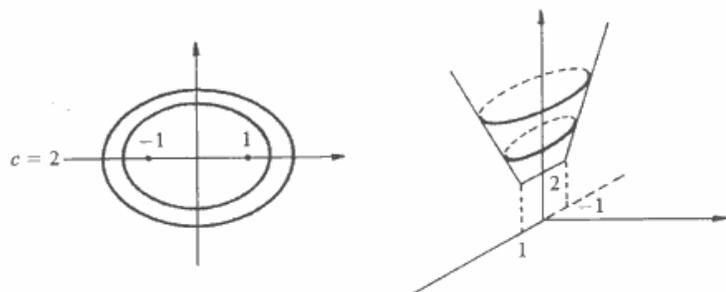
j) Se  $c = 0, x = 0$  ou  $y = 0$

Se  $c \neq 0, y = \frac{1 \pm \sqrt{1+4c^2}}{2c}$

Imagem =  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$



3.



- 4 a)  $f(1, 1) = 3$  é o valor mínimo de  $f$ . Não admite valor máximo.  
 b) Não admite valor máximo, nem mínimo.  
 c) Zero é o valor mínimo de  $f$ ; este valor é atingido nos pontos  $(x, 0)$ ,  $x \geq 0$ , ou  $(0, y)$ ,  $y \geq 0$ . Não há valor máximo.  
 d) Valor máximo: 1; este valor é atingido nos pontos  $(x, 0)$ ,  $x \neq 0$ . O valor mínimo é zero, que é atingido nos pontos  $(0, y)$ ,  $y \neq 0$ .

e)  $f\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}$  é o valor mínimo de  $f$  em  $A$ ;  $f$  não admite valor máximo em  $A$ .

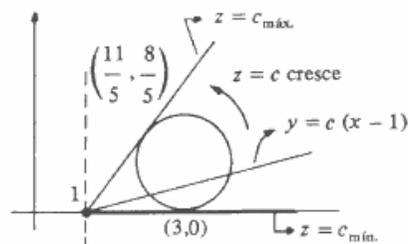
f) 2 é o valor máximo, que é atingido em  $(0, 0)$ :  $f(0, 0) = 2$ . Não há valor mínimo.

g)  $f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}$  é o valor máximo;  $f\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}$  é o valor mínimo.

(Sugestão:  $g(x) = x\sqrt{1-4x^2}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ , fornece os valores de  $f$  sobre o conjunto

$$4x^2 + y^2 = 1, y \geq 0)$$

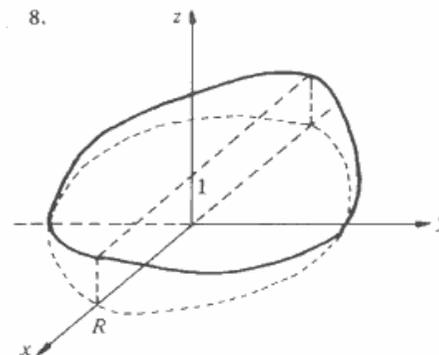
- 5 a)  $f(0, 0) = 3$  é o valor mínimo e  $f(2, 0) = 7$  o valor máximo.  
 b)  $f(1, 3) = 4$  é o valor máximo e  $f(0, 0) = 0$  o valor mínimo.  
 c)  $f(-1, 1) = -\frac{1}{2}$  é o valor máximo e  $f(0, 2) = -2$  o valor mínimo.  
 d)  $f(3, 0) = 0$  é o valor mínimo e  $f\left(\frac{11}{5}, \frac{8}{5}\right) = \frac{4}{3}$  é o valor máximo.



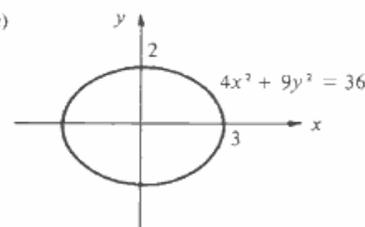
6. O que se quer são os valores máximo e mínimo de  $z = (5-t)(t^2+3)$  em  $[0, 4]$ . Altura máxima: 24. Altura mínima:  $\frac{392}{27}$ .

7.  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

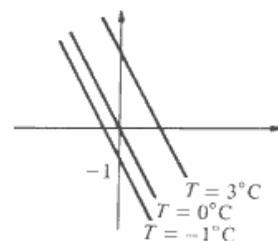
8.



12. a)



13. a)

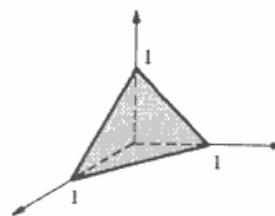


8.3

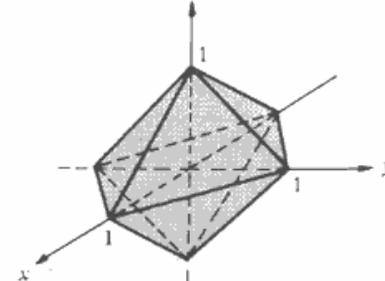
1. a) É uma esfera de centro  $(0, 0, 0)$  e raio 1.

b) É o semi-espaço abaixo do plano  $z = 1$ .

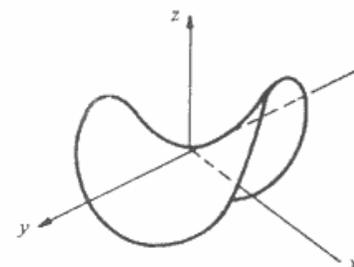
c)



d)



11.



b)  $\left(\frac{9}{13}, \frac{4}{13}\right)$

b) Ponto de mais alta temperatura:

$$\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

Ponto de mais baixa temperatura:  $\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$



h)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x}{x^2 + y^2}$   
 i)  $\frac{\partial g}{\partial x} = yx^{y-1}$  e  $\frac{\partial g}{\partial y} = x^y \ln x$   
 l)  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x [1 + \ln(x^2 + y^2)]$  e  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y [1 + \ln(x^2 + y^2)]$   
 l)  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^2 + 3)^2}}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{3\sqrt[3]{(x^3 + y^2 + 3)^2}}$

m)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\text{sen } y [\cos(x^2 + y^2) + 2x^2 \text{sen}(x^2 + y^2)]}{[\cos(x^2 + y^2)]^2}$   
 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \cos y \cos(x^2 + y^2) + 2yx \text{sen } y \text{sen}(x^2 + y^2)}{[\cos(x^2 + y^2)]^2}$

3. a) 4 b) -4

6.  $\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}$  e  $\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{nR}{V}$

7.  $\frac{\partial z}{\partial x} = e^y \phi'(x-y)$  e  $\frac{\partial z}{\partial y} = e^y \phi(x-y) - e^y \phi'(x-y)$ ; logo,  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = e^y \phi(x-y) = z$ .

10.  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-yz}{xy+3z^2}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-xz}{xy+3z^2}$

13.  $17 \left( \frac{\partial w}{\partial x} = y + 4z^3 \frac{\partial z}{\partial x} \right)$

15.  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-(x^2+y^2)^2}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{-(x^2+y^2)^2}$

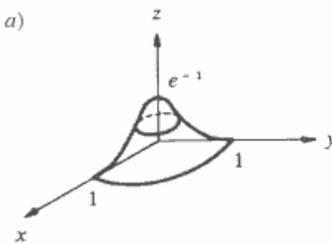
16.  $\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-x^4}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{-y^4}$

18.  $\phi(y) = \frac{1}{2} \ln(1+y^2)$  19.  $x^3y^2 - 6xy + \frac{1}{2} \ln(1+y^2)$

20.  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$   $\left( \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ não existe} \right)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4x^2y^3 + 2y^5 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}$  se  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$

21. a)



b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{-2x}{(x^2 + y^2 - 1)^2} e^{\left(\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}\right)} & \text{se } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

23. a)  $z(t) = f(t, t) = 2t^2$

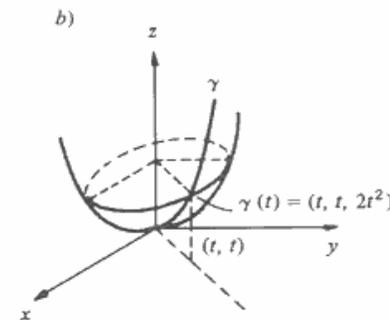
c)  $(x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda(1, 1, 4)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

d) Verifique que  $(1, 1, 2)$  pertence ao plano e que  $\gamma'(1)$  é ortogonal ao vetor

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1), -1 \right)$$

(Observe que  $\left( \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1), -1 \right)$

é normal ao plano.)



24.  $z(t) = (x(t))^2 + (y(t))^2 \Rightarrow z'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)$ . Segue que  $\gamma'(0) = (x'(0), y'(0), 2x'(0) + 2y'(0))$ . Verifique que  $(1, 1, 2)$  pertence ao plano e que  $\gamma'(0)$  é ortogonal a

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1), -1 \right)$$

25. O plano determinado por  $T_1$  e  $T_2$  passa pelo ponto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  e é normal ao vetor

$$\gamma'_1(x_0) \wedge \gamma'_2(x_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \vec{j} - \vec{k}$$

A equação do plano é, então:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, f(x_0, y_0))] = 0$$

ou seja,  $z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$ .



## 11.3

1. a)  $z = 4x + 2y - 4$ ;  $(x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda(4, 2, -1)$   
 b)  $z = 2y - 1$ ;  $(x, y, z) = (0, 1, 1) + \lambda(0, 2, -1)$   
 c)  $z = -8x + 2y + 8$ ;  $(x, y, z) = (1, -1, -2) + \lambda(-8, 2, -1)$   
 d)  $z = 9x - 8y$ ;  $(x, y, z) = (2, 2, 2) + \lambda(9, -8, -1)$

2.  $x + 6y - 2z = 3$                       3.  $z = 2x + y - \frac{5}{4}$

4.  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1$ .

5. a)  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -\frac{2}{3}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -\frac{1}{3}$     b)  $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(2, 1, 3)$

8.  $z = 2x + 3y + 3$                       9.  $z = 0$  e  $z = 6x + 6y - 18$

11. a)  $V(a, b) = \frac{(1 + a^2 + b^2)^3}{24ab}$                       b)  $a = \frac{1}{2}$  e  $b = \frac{1}{2}$

12.  $z = 2\sqrt{2}y$  e  $z = -2\sqrt{2}y$

14.  $z - z_0 = -\frac{x_0 c^2}{a^2 z_0}(x - x_0) - \frac{y_0 c^2}{b^2 z_0}(y - y_0)$ ; segue que

$$\frac{z_0 z}{c^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = -\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{y_0^2}{b^2},$$

ou seja,

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1, \quad \text{pois} \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1.$$

**Observação.** As derivadas parciais  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$  foram obtidas diretamente da equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

## 11.4

1. a)  $dz = 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy$

b)  $dz = \left[ \arctg(x + 2y) + \frac{x}{1 + (x + 2y)^2} \right] dx + \frac{2x}{1 + (x + 2y)^2} dy$

c)  $dz = y \cos xy dx + x \cos xy dy$

d)  $du = 2s e^{s^2 - t^2} ds - 2t e^{s^2 - t^2} dt$

e)  $dT = \frac{2p}{1 + p^2 + V^2} dp + \frac{2V}{1 + p^2 + V^2} dV$

f)  $dx = \frac{v}{\sqrt{1 - u^2 v^2}} du + \frac{u}{\sqrt{1 - u^2 v^2}} dv$

2. a)  $\Delta z \cong dz$  e  $dz = (e^{x^2 - y^2} + 2x^2 e^{x^2 - y^2}) dx - 2xy e^{x^2 - y^2} dy$ . Fazendo  $x = 1, y = 1, dx = 0,01$  e  $dy = 0,002$ , resulta  $\Delta z \cong 0,03 - 0,004$ , ou seja,  $\Delta z \cong 0,026$ .  
 b) Para  $x = 1$  e  $y = 1$  tem-se  $z = 1$ . Assim,  $1 + 0,026 = 1,026$  é um valor aproximado para  $z$  correspondente a 1,01 e 1,002.

3. a)  $dz = \frac{1}{2} dx + \frac{1}{12} dy$                       b) 2,9966

c)  $\Delta z \cong \frac{-0,1}{2} + \frac{0,01}{12}$ , ou seja,  $\Delta z \cong -0,049166$

4.  $A = xy$ ;  $dA = y dx + x dy$ . Assim,  $\Delta A \cong y dx + x dy$  onde  $x = 2, y = 3, dx = 0,01$  e  $dy = -0,03$ , ou seja,  $\Delta A \cong -0,03$ .

5.  $V = \pi r^2 h$  é o volume do cilindro de altura  $h$  e raio da base  $r$ ;  $dV = 2\pi r h dr + \pi r^2 dh$ . Sendo  $\Delta V$  o volume do material utilizado na caixa,  $\Delta V \cong 2\pi r h dr + \pi r^2 dh$ , onde  $r = 1, h = 2, dr = 0,03$  e  $dh = 0,03$ , ou seja,  $\Delta V \cong 0,15\pi$ .

6.  $\Delta P \cong -5$  watts.

7.  $\Delta V \cong \frac{2}{3} \pi r h dr + \frac{1}{3} \pi r^2 dh$ , onde  $r = 12, h = 20, dr = -0,1$  e  $dh = 0,2$ .

8.  $(1,01)^{2,03} \cong 1 + dz$ , onde  $dz$  é a diferencial de  $z = x^y$ , no ponto  $(1, 2)$ , relativa aos acréscimos  $dx = 0,01$  e  $dy = 0,03$ . Ou seja,  $(1,01)^{2,03} \cong 1,02$ .

9.  $\Delta z = dz$  onde  $dz$  é a diferencial de  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , no ponto  $(3, 4)$ , relativa aos acréscimos  $dx = 0,01$  e  $dy = -0,1$ .

11. a)  $dw = yz dx + xz dy + xy dz$                       b)  $dx = e^{2u + 2v - t^2} (2 du + 2 dv - 2t dt)$

c)  $dw = \frac{2x}{1 + z^2} dx + \frac{2y}{1 + z^2} dy - \frac{2z(x^2 + y^2)}{(1 + z^2)^2} dz$

d)  $ds = 2xyz(1 + x^2)^{yz-1} dx + (1 + x^2)^{yz} \ln(1 + x^2) [z dy + y dz]$

12.  $\sqrt{(0,01)^2 + (3,02)^2 + (3,97)^2} \cong 5 + dw$ , onde  $dw$  é a diferencial de  $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , no ponto  $(0, 3, 4)$ , relativa aos acréscimos  $dx = 0,01, dy = 0,02$  e  $dz = -0,03$

$$\sqrt{(0,01)^2 + (3,02)^2 + (3,97)^2} \cong 4,988.$$

## 11.5

1. a)  $(2xy, x^2)$                       b)  $e^{x^2 - y^2} (2x \vec{i} - 2y \vec{j})$

c)  $\left( \frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2} \right)$                       d)  $\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} - \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$

2. a)  $\frac{x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$                       b)  $(2x, 2y, 2z)$

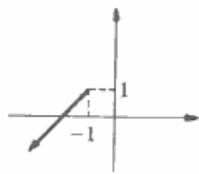
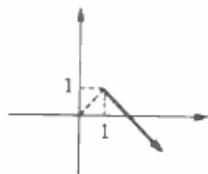
c)  $(2xz^2(x^2 + y^2 + 1)^{z^2-1}, 2yz^2(x^2 + y^2 + 1)^{z^2-1}, 2z(x^2 + y^2 + 1)^{z^2} \ln(x^2 + y^2 + 1))$

d)  $\left( \frac{yz}{x^2 + y^2}, \frac{-xz}{x^2 + y^2}, \arctg \frac{x}{y} \right)$

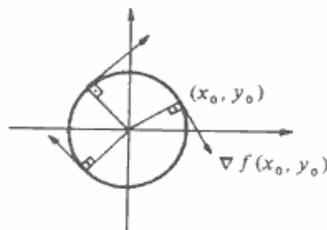
3.  $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$

a)  $\nabla f(1, 1) = 2\vec{i} - 2\vec{j}$

b)  $\nabla f(-1, 1) = -2\vec{i} - 2\vec{j}$



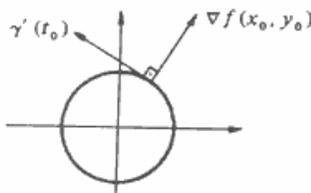
- 4.
- $\nabla f(x_0, y_0) = y_0\vec{i} - x_0\vec{j}$
- . Observe que
- $\nabla f(x_0, y_0)$
- é normal a
- $x_0\vec{i} - y_0\vec{j}$
- ;
- $\nabla f(x_0, y_0)$
- é tangente em
- $(x_0, y_0)$
- à circunferência
- $x^2 + y^2 = 1$
- .



Observe, ainda, que para todo  $(x_0, y_0)$  na circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $\|\nabla f(x_0, y_0)\| = 1$ .

5. Derivando em relação a
- $t$
- os dois membros de
- $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$
- , resulta:

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0.$$



Para  $t = t_0$ ,  $(2x_0, 2y_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$ , ou seja,  $\nabla f(x_0, y_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$ .  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$  é uma curva cuja imagem está contida na curva de nível  $x^2 + y^2 = 1$ .

7. a)  $f'(x, y) = (y, x)$

b)  $f'(x, y) = 2^{x-y} \ln 2 (1, -1)$

c)  $f'(x, y) = \left( \operatorname{tg} \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \sec^2 \frac{x}{y}, -\frac{x^2}{y^2} \sec^2 \frac{x}{y} \right)$

d)  $f'(x, y) = \left( \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}, \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} \right)$

11. b)  $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0$

c)  $(2, 8, 18) \cdot [(x, y, z) - (1, 1, 1)] = 0$

## CAPÍTULO 12

## 12.1

1. a)  $9r^2 \cos 3r^3$

b)  $-4 \sin t \cos t$

2. a)  $3 \frac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t^2 - 1) + 4t \frac{\partial f}{\partial y}(3t, 2t^2 - 1)$

b) 1

3. a)  $2t \frac{\partial f}{\partial x}(r^2, 3t) + 3 \frac{\partial f}{\partial y}(r^2, 3t)$

b)  $3 \cos 3t \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 2 \sin 2t \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ , onde  $x = \sin 3t$  e  $y = \cos 2t$

4.  $2t \frac{\partial f}{\partial x}(r^2, 2t) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(r^2, 2t) = 3r^2 - 3$ ; faça agora,  $t = 1$ .

5. a)  $-\frac{11}{6}$

b)  $z - \frac{\pi}{4} = -\frac{11}{6}(x - 3) + 2(y - 1)$

6.  $g'(t) = -1$ .

- 7.
- $x = 2 \cos t$
- ,
- $y = \sin t$
- é uma parametrização da elipse
- $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$
- . Basta mostrar que
- $g'(t) = 0$
- em
- $\mathbb{R}$
- , onde
- $g(t) = f(2 \cos t, \sin t)$
- . Observe que a função
- $g$
- fornece os valores de
- $f$
- sobre a elipse dada.

8.  $\gamma'(t) = (2, 2t, z'(t))$  e  $z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dt}$ ;  $\gamma'(1) = (2, 2, 0)$  e  $\gamma(1) = (2, 1, 3)$ . A reta tangente é:  $(x, y, z) = (2, 1, 3) + \lambda(2, 2, 0)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

10.  $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(u + 2v, u^2 - v) + 2u \frac{\partial f}{\partial y}(u + 2v, u^2 - v)$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \text{ onde } x = u + 2v \text{ e } y = u^2 - v.$$

14.  $\frac{dz}{dt} = 2t f(r^2, t^3) + t^3 \left[ 2 \frac{\partial f}{\partial x}(r^2, t^3) + 3t \frac{\partial f}{\partial y}(r^2, t^3) \right]$ .

16.  $z = uf(x, y)$ ,  $x = u - v$  e  $y = u + v$ . Então:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f(x, y) + u \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u \left[ -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right].$$

Portanto,

$$u \frac{\partial z}{\partial u} + u \frac{\partial z}{\partial v} = z + 2u^2 \frac{\partial f}{\partial y}.$$

$$18. \frac{d}{dx} [f(x, g(x))] = \frac{d}{dx} [0]; \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) g'(x) = 0.$$

$$19. \gamma'(t) = (1, f'(t)) \text{ e } f'(t) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(t, f(t))}{\frac{\partial g}{\partial y}(t, f(t))}. \text{ A equação da reta tangente é:}$$

$$(x, y) = (0, 1) + \lambda \left(1, -\frac{1}{2}\right), \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$20. \frac{\partial}{\partial x} [f(x, y, g(x, y))] = \frac{\partial}{\partial x} [0]; \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y))}; \text{ então, } \frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = -\frac{1}{5}; \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = -\frac{1}{2}.$$

A equação do plano tangente no ponto  $(1, 1, 3)$  é:  $z - 3 = -\frac{1}{5}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1)$ .

$$\text{Observe: } \frac{\partial}{\partial x} [f(x, y, g(x, y))] = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}.$$

$$21. a) g'(t) = 6t \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + 3t^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + 2e^{2t} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \text{ onde } x = 3t^2, y = t^3 \text{ e } z = e^{2t}$$

$$b) g'(0) = 8.$$

$$22. \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = f(x^2 + y, 2y, 2x - y) + x \left[ 2x \frac{\partial f}{\partial x}(x^2 + y, 2y, 2x - y) + 2 \frac{\partial f}{\partial z}(x^2 + y, 2y, 2x - y) \right].$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x^2 + y, 2y, 2x - y) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x^2 + y, 2y, 2x - y) - \frac{\partial f}{\partial z}(x^2 + y, 2y, 2x - y) \right]$$

Observação: Poderia ter feito  $g(x, y) = xf(u, v, w)$ ,  $u = x^2 + y$ ,  $v = 2y$  e  $w = 2x - y$ . Teríamos, então:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f(u, v, w) + x \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \right] = \dots$$

$$30. f(x, y) = \phi\left(\frac{x}{y}\right), \text{ onde } \phi(u) \text{ é uma função diferenciável qualquer.}$$

$$32. \text{ Para cada } (x, y) \text{ fixo, } \frac{d}{dt} [f(tx, ty)] \Big|_{t=0} = f(x, y).$$

ou seja,

$$x \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}_a + y \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}_b = f(x, y).$$

## 12.2

$$1. \text{ Seja } F(x, y) = y^3 + xy + x^3 - 4; F \text{ é de classe } C^1 \text{ em } \mathbb{R}^2, F(0, \sqrt[3]{4}) = 0 \text{ e } \frac{\partial F}{\partial y}(0, \sqrt[3]{4}) \neq 0.$$

Pelo teorema das funções implícitas, a equação define uma função  $y = y(x)$  de classe  $C^1$  num

$$\text{intervalo aberto } I \text{ contendo } 0, \frac{dy}{dx} = -\frac{y + 3x^2}{3y^2 + x}.$$

$$2. a) \text{ Seja } F(x, y) = x^2y + \sin y - x; \text{ observe que } F(0, 0) = 0 \text{ e que}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) \neq 0; \frac{dy}{dx} = -\frac{2xy - 1}{x^2 + \cos y}$$

$$b) \frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2 + 4x^3}{4y^3 + 2x^2y}$$

$$3. a) \text{ Seja } F(x, y, z) = e^{x+y+z} + xyz - 1; \text{ note que}$$

$$F(0, 0, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 0) \neq 0; \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^{x+y+z} + xz}{e^{x+y+z} + xy} \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{e^{x+y+z} + xz}{e^{x+y+z} + xy}$$

$$b) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - 1}{3z^2 - 1} \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2 - 1}{3z^2 - 1}$$

$$4. \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x \frac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2)}{\frac{\partial F}{\partial u}(x^2 + y, y^2) + 2y \frac{\partial F}{\partial v}(x^2 + y, y^2)}$$

$$8. a) \frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z} \text{ e } \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad b) y = xe \text{ e } z = \sqrt{1 - x^2}$$

$$10. \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{y}{x}\right).$$

$$11. a) 2(x - y) \quad b) -2xy^2 \\ c) -2[s + 3r] \quad d) 2t[-9 + 2s]$$

$$12. a) \frac{\partial}{\partial u}(v) = \frac{\partial}{\partial u}(xy); 0 = y \frac{\partial x}{\partial u} + x \frac{\partial y}{\partial u}.$$

$$b) \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{y}{x}\right) \frac{\partial x}{\partial u} = 0$$

$$13. a) \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{x}{2(x^2 - y^2)} \text{ e } \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-y}{2(x^2 - y^2)}$$

$$b) x = \frac{\sqrt{u+2v} - \sqrt{u-2v}}{2} \text{ e } y = \frac{\sqrt{u+2v} + \sqrt{u-2v}}{2}$$

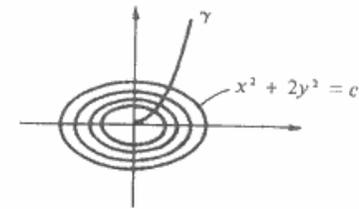
$$15. a) \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{u+y^2}{u-2x}$$

$$b) x = \frac{u - \sqrt{4v - 3u^2}}{2} \text{ e } y = \sqrt{\frac{u + \sqrt{4v - 3u^2}}{2}}$$

## CAPÍTULO 13

## 13.1

1. a)  $(x, y) = (1, 3) + \lambda(-6, 2)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$     b)  $\gamma(t) = (\sqrt{10} \cos t, \sqrt{10} \sin t)$
2. Reta tangente:  $(x, y) = (2, 5) + \lambda(-2, 5)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
Reta normal:  $(x, y) = (2, 5) + \lambda(5, 2)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
3. a)  $(4, 2) \cdot [(x, y) - (1, 2)] = 0$  ou  $y - 2 = -2(x - 1)$ .  
b)  $y = -4x + 3$ .
4.  $y = -2x + 3$  ou  $y = -2x - 3$
5.  $y - 2 = -\frac{4}{5}(x - 1)$  ou  $y + 2 = -\frac{4}{5}(x + 1)$
6. a)  $f(x, y) = \varphi(2x - 3y)$  onde  $\varphi(u)$  é uma função derivável qualquer.  
b)  $f(x, y) = \varphi(x + y)$  onde  $\varphi(u)$  é uma função derivável qualquer.  
c)  $f(x, y) = \varphi(x - y)$  onde  $\varphi(u)$  é uma função derivável qualquer.  
d)  $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$  onde  $\varphi(u)$  é uma função derivável qualquer.
7.  $f(x, y) = \varphi(x + y)$ , com  $\varphi(u)$  definida e derivável em  $\mathbb{R}$ , satisfaz a condição  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ .  
Determine uma  $\varphi(u)$  tal que  $\varphi(2) = 3$ ,  $\varphi(0) = 1$  e  $\varphi(1) = 2$ . Por exemplo, tome  $\varphi(u) = au^2 + bu + c$  e determine  $a$ ,  $b$  e  $c$  para que as condições acima se cumpram.
8.  $f(x, y) = \varphi(2x + y)$ , com  $\varphi(u)$  definida e derivável em  $\mathbb{R}$ , satisfaz a condição  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \frac{\partial f}{\partial y}$ .  
Para que o gráfico de  $f$  contenha a imagem de  $\gamma$  é preciso que  $\varphi(3t) = t^2$ . Basta então tomar  $\varphi(u) = \frac{u^2}{9}$ . A função  $f(x, y) = \frac{1}{9}(2x + y)^2$  resolve o problema.
9. Seja  $F(x, y) = x^2 + 2y^2$ . Vamos determinar  $\gamma$  de modo que, para todo  $t$ ,  $\gamma'(t) = \nabla F(\gamma(t))$ , ou seja,  $\dot{x} = 2x$  e  $\dot{y} = 4y$ . Assim,  $x = k_1 e^{2t}$  e  $y = k_2 e^{4t}$ . Para que a condição inicial  $\gamma(0) = (1, 2)$  se verifique devemos tomar  $k_1 = 1$  e  $k_2 = 2$ ;  $\gamma(t) = (e^{2t}, 2e^{4t})$  intercepta ortogonalmente todas as curvas da família  $x^2 + 2y^2 = c$  e passa por  $(1, 2)$ .



10. Seja  $F(x, y) = xy$ . A função  $y = y(x)$  deve ser solução da equação  $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y}$ , ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \text{ Assim, } y^2 = x^2 + c.$$

$$a) y = x$$

$$b) y = \sqrt{x^2 + 3}$$

## 13.2

1. a) Plano tangente:  $(2, -6, 8) \cdot [(x, y, z) - (1, -1, 1)] = 0$  ou  $x - 3y + 4z = 8$ .  
Reta normal:  $(x, y, z) = (1, -1, 1) + \lambda(2, -6, 8)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
b) Plano tangente:  $6x + 3y + z = 9$ .  
Reta normal:  $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 1, 3\right) + \lambda(6, 3, 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
c) Plano tangente:  $x - y + 4z = 4$ .  
Reta normal:  $(x, y, z) = (2, 2, 1) + \lambda(1, -1, 4)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
2.  $z - 2 = -\frac{1}{4}(x - 1) - \frac{1}{4}(y - 1)$ .
3.  $x + y + z = \frac{11}{6}$  ou  $x + y + z = -\frac{11}{6}$ .  
(Sugestão. Seja  $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2$ . O ponto de tangência  $(x_0, y_0, z_0)$  deve satisfazer as condições:  $x_0^2 + 3y_0^2 + 2z_0^2 = \frac{11}{6}$  e  $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \lambda(1, 1, 1)$ , para algum  $\lambda$ .)
4.  $x + y + \sqrt{2}z = 2$ .
5.  $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 1, 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
6. a)  $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, -1, 0)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
b)  $\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, 1)$ .
7. a)  $(x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(-1, 0, 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
b)  $x = \frac{1}{2} \cos t$ ,  $y = \sin t$  e  $z = 1 - \frac{1}{2} \cos t - \sin t$ .
8. a)  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - y^4 z^4 + 8$ .  
b)  $x - 7y + 16z = -28$ .

9.  $-5x + 16y + 9z = 54.$

10.  $x - 2y + 2z = 7$  ou  $x + 2y + 2z = 7.$

13.4

1. a)  $-\frac{8}{\sqrt{5}}$  b)  $-\frac{2}{5}$

c) 0 d)  $\sqrt{2}$

2. a)  $3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{i} - 3\vec{j}$  b)  $\vec{i} - \vec{j} - \vec{i} + \vec{j}$

c)  $-\vec{i} - \vec{j} + \vec{i} + \vec{j}$

3.  $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1) = \|\nabla f(1, 1)\| = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$

4. a)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$  b)  $\frac{2}{3\sqrt{5}}$

5.  $-\frac{\sqrt{13}}{13}$

6. a) (1, 3) b)  $2\sqrt{2}$

7.  $x = e^{-4t}$  e  $y = 2e^{-2t}, t \geq 0.$

8.  $\gamma(t) = (t, \sqrt{t^2 + 3}), t \geq 1.$

9.  $\nabla f(1, 2) = (2, 1)$ . Seja  $\gamma(t) = (1 + 2t, 2 + t, f(1 + 2t, 2 + t))$ . A tangente em  $\gamma(0) = (1, 2, f(1, 2))$  é a reta procurada:  $(x, y, z) = (1, 2, 2) + \lambda(2, 1, 5), \lambda \in \mathbb{R}.$

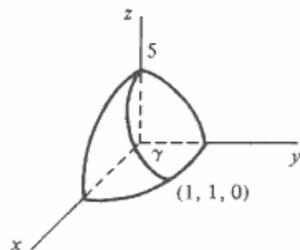
10.  $(x, y, z) = (1, 1, 4) + \lambda(1, 2, 5).$

11. Seja  $P'$  a projeção de  $P$  sobre o plano  $xy$ ;  $P'$  move-se sempre na direção e sentido de máximo crescimento de  $f$ . Sendo  $(x(t), y(t))$ , uma parametrização para a trajetória de  $P'$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , onde  $z(t) = f(x(t), y(t))$ , será uma parametrização para a trajetória de  $P$ :  $\gamma(t) = (t^4, t, 4t^8 + t^2).$

12.  $(0, \sqrt{3}).$

(Sugestão. Aproveite a solução do problema 8.)

13.  $\gamma(t) = (t, t^4, 5 - t^2 - 4t^8), 0 \leq t \leq 1.$



14. a)  $x^2 + 2y^2 = 17$   
c)  $0,1^\circ\text{C}$

b)  $-6\vec{i} - 8\vec{j}$   
d)  $0,08^\circ\text{C}$

15. a)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$

b)  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

16.  $\frac{5}{6}\sqrt{13}$

## CAPÍTULO 14

14.1

1. a)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2y$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2y$

b)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{x^2 - y^2}(1 + 2x^2), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xye^{x^2 - y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  e

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^{x^2 - y^2}(2y^2 - 1)$

c)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2 + 2y^2 - 2x^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2 + 2x^2 - 2y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

$= \frac{-4xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

d)  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 24xy^4, \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 18x^3y^2 + 9y, \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 48x^2y^3 = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$

8.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$

11.  $-\frac{1}{3}$

14. a)  $-4xy \sin(x^2 - y^2)^2$  b) 0

14.2

1. a)  $2t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \cos t \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), x = t^2$  e  $y = \sin t$

b)  $3t^2 \frac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t) + t^3 \left[ 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3t, 2t) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(3t, 2t) \right]$

c)  $2t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^2, 2t) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(t^2, 2t) + 5 \left[ 3 \cos 3t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\sin 3t, t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\sin 3t, t) \right]$

2.  $g(t) = f(x, y)$ ,  $x = 5t$  e  $y = 4t$ ;  $g'(t) = 5 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 4 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ . Então:

$$g''(t) = 25 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 40 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 16 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

9.  $f(x, y) = 0$ , onde  $y = g(x)$ ;  $\frac{d}{dx}[f(x, y)] = 0$ , daí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{\frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right]}{\left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right]^2}$$

$$g''(x) = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2}{\left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^3}$$

10. b)  $f(x, t) = \varphi(x+t) + \theta(x-t)$ , onde  $\varphi(v)$  e  $\theta(u)$  são funções quaisquer, deriváveis até a 2.ª ordem. Observe que  $g(u, v) = \varphi(v) + \theta(u)$  satisfaz  $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = 0$ .

13. 0

14. 0

## CAPÍTULO 15

## 15.1

1. a)  $f(2, 3) - f(1, 1) = \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot [(2, 3) - (1, 1)]$ , com  $(\bar{x}, \bar{y})$  no segmento de extremos  $(1, 1)$  e  $(2, 3)$ . Assim,  $(\bar{x}, \bar{y})$  é solução do sistema

$$\begin{cases} 12 = (4\bar{x}, 3) \cdot (1, 2) \\ 2\bar{x} - \bar{y} = 1 \text{ com } 1 < \bar{x} < 2 \end{cases}$$

$$\text{Então, } (\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{3}{2}, 2 \right).$$

b)  $\left( \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right)$

c)  $\left( \sqrt{\frac{7}{3}}, \sqrt{\frac{7}{3}} \right)$

## 15.3

1. a)  $f(x, y) = 3x^3y^2 - 5x^2 + y + k$

b)  $f(x, y) = \operatorname{sen} xy + x^3 - xy + y^3 + k$

c)  $f(x, y) = e^{x^2+y^2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y + k$

2.  $f(x, y) = x^2y^3 - x^2 + y^2 - y - 8$ .

3.  $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2 + y^2) + \frac{1}{2} e^{y^2} + \frac{3}{2}$ .

4. Não, pois,  $\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + 1) \neq \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2 + 1)$ .

5.  $\varphi_1(x, y) = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} + \frac{\pi}{2}$ .

6.  $\varphi_2(x, y) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} + \pi$ .

7.  $\varphi(x, y) = \begin{cases} -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} + \frac{\pi}{2} & \text{se } y > 0 \\ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0. \end{cases}$

8. a) Sim, pois admite função potencial  $\varphi(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ .

b) Não, pois,  $\frac{\partial}{\partial y}(y) \neq \frac{\partial}{\partial x}(-x)$ .

c)  $\varphi(x, y) = xy + y^2$  é uma função potencial, logo,  $\vec{F}$  é conservativo.

d) Admite função potencial  $\varphi(x, y) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , logo é conservativo.

e) Não, pois,  $\frac{\partial}{\partial y}(4) \neq \frac{\partial}{\partial x}(x^2)$ .

f) Admite função potencial  $\varphi(x, y) = e^{x^2 - y^2}$ , logo é conservativo.

9. Como  $\vec{F}$  é conservativo, existe  $\varphi(x, y)$  definida em  $A$  tal que  $\nabla \varphi(x, y) = \vec{F}(x, y)$ . Pela regra da cadeia,  $\frac{d}{dt}(\nabla \varphi(\gamma(t))) = \nabla \varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ . Portanto,

$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = [\nabla \varphi(\gamma(t))]_a^b = 0.$$

11. a)  $U(x, y) = 3x^2 + y^2$

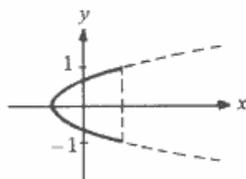
b)  $U(x, y) = -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$

$$c) U(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

d) Não é conservativo

12. a)  $\vec{F}(x, y) = -\nabla U = (-4x, -y)$ .

b)  $\ddot{x} = -4x, \ddot{y} = -y, x(0) = 1, y(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$  e  $\dot{y}(0) = 0; \ddot{x} + 4x = 0 \Rightarrow x = A_1 \cos 2t + B_1 \sin 2t; \ddot{y} + y = 0 \Rightarrow y = A_2 \cos t + B_2 \sin t$ . Tendo em vista as condições iniciais,  $\gamma(t) = (\cos 2t, \cos t)$ . Como  $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$ , a imagem de  $\gamma$  está contida na parábola  $x = 2y^2 - 1$ .



Como  $y = \cos t$ , a imagem de  $\gamma$  é arco de parábola  $x = 2y^2 - 1, -1 \leq y \leq 1$ .

13. a)  $\vec{F}(x, y) = -x\vec{i} - y\vec{j}$ .

b)  $\gamma(t) = (\cos t - \sin t, \cos t + \sin t) = \sqrt{2} \left( \cos \left( t + \frac{\pi}{4} \right), \sin \left( t + \frac{\pi}{4} \right) \right)$ . A trajetória é a circunferência de centro na origem e raio  $\sqrt{2}$ .

14.  $\gamma(t) = (\cos t, 2 \sin t)$ . A trajetória é a elipse  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ .

15.4

1. a)  $1 + x + 5y$

b)  $5 + (x - 1) + 7(y - 1)$

c)  $3x + 4y$

2. b) Inferior a  $10^{-2}$

3.  $|f(x, y) - P_1(x, y)| = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})(x - 1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})(x - 1)(y - 1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})(y - 1)^2 \right| = \frac{1}{2} |6\bar{x} - 2|(x - 1)^2 + 6\bar{y}(y - 1)^2|$ .

De  $0 < \bar{x} < 2$  e  $0 < \bar{y} < 2$  segue

$$|f(x, y) - P_1(x, y)| < 7(x - 1)^2 + 6(y - 1)^2$$

4. a) 4,931

b)  $10^{-3}$

$$7. ah^2 + bhk + ck^2 = a \left[ h^2 + \frac{b}{a} hk + \frac{b^2}{4a^2} k^2 - \frac{b^2}{4a^2} k^2 + \frac{c}{a} k^2 \right] = a \left[ \left( h + \frac{b}{2a} k \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} k^2 \right] > 0 \text{ para todo } (h, k) \neq (0, 0).$$

15.5

1. a)  $xy$

b)  $6 + 8(x - 1) + 10(y - 1) + 5(x - 1)^2 + 4(x - 1)(y - 1) + 9(y - 1)^2$

2.  $6 + 8(x - 1) + 10(y - 1) + 5(x - 1)^2 + 4(x - 1)(y - 1) + 9(y - 1)^2 + (x - 1)^3 + 2(x - 1)^2(y - 1) + 3(y - 1)^3$ .

CAPÍTULO 16

16.1

1.  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  é candidato a ponto de mínimo local.

2. Não admite extremante local:  $\left(-\frac{1}{13}, \frac{5}{13}\right)$  é o único ponto crítico e não pode ser extremamente local, pois,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left( -\frac{1}{13}, \frac{5}{13} \right) = 2 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left( -\frac{1}{13}, \frac{5}{13} \right) = -2$$

3.  $(0, 0)$  e  $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$  candidatos a ponto de máximo local.

4.  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  é candidato a ponto de mínimo local. O ponto crítico  $(0, 0)$  não é extremante local, pois  $x = 0$  não é extremante local de  $g(x) = f(x, 0) = x^3$ .

5.  $(-1, -1)$  é candidato a ponto de mínimo local.

6.  $(1, 1)$  é candidato a ponto de mínimo local;  $(-1, -1)$  é candidato a ponto de máximo local. Os pontos críticos  $(1, -1)$  e  $(-1, 1)$  não são extremantes locais.

16.3

1. a)  $\left(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}\right)$  ponto de mínimo local. (Conforme Exerc. 2, é ponto de mínimo global.)

b)  $(1, 1)$  é ponto de mínimo local, mas não global ( $f(0, y) = y^3 - 4y + 5$  tende a  $-\infty$  quando  $y \rightarrow -\infty$ ).  $\left(\frac{23}{12}, -\frac{5}{6}\right)$  é ponto de sela.

c)  $(-1, 1)$  é ponto de sela.  $\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$  é ponto de mínimo local, mas não global ( $f(x, 0) = x^3 - 5x$  tende a  $-\infty$  para  $x \rightarrow -\infty$ ).

d)  $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$  é ponto de sela.

e)  $\left(3, \frac{3}{2}\right)$  e  $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$  são pontos de sela.

f) Não admite ponto crítico.

g) Os extremantes locais de  $f$  coincidem com os extremantes locais de  $g(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y$ ;  $(2, 1)$  é ponto de mínimo local. (Conforme Exerc. 2, é ponto de mínimo global.)

h)  $(0, 0)$  ponto de máximo local;  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$  pontos de sela;  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  e  $(-1, -1)$  pontos de mínimo locais (verifique que são pontos de mínimo globais).

i)  $(1, 2)$  é ponto de mínimo local.

j)  $(-1, -1)$  é ponto de mínimo local.

l)  $(1, 1)$  é ponto de mínimo local;  $(1, -1)$  e  $(-1, 1)$  pontos de sela;  $(-1, -1)$  ponto de máximo local.

3. a)  $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$  ponto de mínimo global.

b) Não admite extremantes, pois, para todo  $(x, y)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2$ . O ponto crítico  $\left(\frac{10}{13}, \frac{11}{13}\right)$  é de sela.

c)  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$  ponto de máximo global.

d)  $\left(\frac{2}{11}, \frac{10}{11}\right)$  é ponto de mínimo global.

e) Não admite extremante;  $(2, -2)$  é ponto de sela. [Desenhe as imagens das curvas

$$\gamma_1(t) = (t, -2, f(t, -2)) \text{ e } \gamma_2(t) = (2 - 3t, -2 + 2t, z(t))$$

$$\text{onde } z(t) = f(2 - 3t, -2 + 2t).$$

f)  $(1, 2)$  ponto de mínimo global.

4.  $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ .

5.  $E(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n [\alpha a_i + \beta - b_i]^2$ ;  $\frac{\partial E}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n 2 a_i [\alpha a_i + \beta - b_i]$  e  $\frac{\partial E}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n 2 [\alpha a_i + \beta - b_i]$ .  $(\alpha, \beta)$  é a solução do sistema

$$\begin{cases} \alpha \sum_{i=1}^n a_i^2 + \beta \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \alpha \sum_{i=1}^n a_i + n\beta = \sum_{i=1}^n b_i \end{cases}$$

6. a)  $y = \frac{5}{2}x + 1$  [Sugerimos desenhar a reta encontrada e marcar os pontos dados.]

b)  $y = \frac{9}{10}x + \frac{14}{10}$

7. a) $a_i$	$b_i$	$a_i^2$	$a_i b_i$
5	100	25	500
6	98	36	588
7	95	49	665
8	94	64	752
26	387	174	2.505

$(\alpha, \beta)$  é solução do sistema

$$\begin{cases} 26\alpha + 4\beta = 387 \\ 174\alpha + 26\beta = 2.505 \end{cases}$$

$$y = -\frac{21}{10}x + \frac{1.104}{10}$$

b) 89,4

8.  $(\lambda, 2\lambda, 2)$  e  $(\mu, \mu, 4 + \mu)$  são pontos arbitrários de  $r$  e  $s$ , respectivamente;

$$\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + (2\lambda - \mu)^2 + (2 + \mu)^2}$$

é a distância entre eles. Basta, então, determinar  $(\lambda, \mu)$  que minimiza  $g(\lambda, \mu) = (\lambda - \mu)^2 + (2\lambda - \mu)^2 + (2 + \mu)^2$ .  $P = (-1, -2, 2)$  e  $Q = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

9.  $(1, 2, 1)$ .

10.  $L = p_1x + p_2y - [x^2 + 2y^2 + 2xy] = 120x + 200y - 3x^2 - 3y^2 - 2xy$ . A produção que maximiza o lucro é  $x = 10$  e  $y = 30$ .

11.  $L = 5z - (2x + y)$ . A produção  $z$  que maximiza o lucro é a correspondente a  $x = 15,8$  e  $y = 20,4$ , ou seja,  $z = 1576,2$ .

13.  $\left(\frac{34}{14}, \frac{25}{14}, \frac{16}{14}\right)$

$$14. x + y + z = \frac{3}{2}.$$

15. a)  $(1, 0, 2)$  ponto de mínimo local (verifique que é ponto de máximo global).

b)  $(1, 1, 1)$  ponto de mínimo local;  $(-1, -1, -1)$  ponto de máximo local;  $(1, 1, -1)$ ,  $(1, -1, 1)$ ;  $(1, -1, -1)$ ,  $(-1, 1, 1)$ ,  $(-1, 1, -1)$  e  $(-1, -1, 1)$  não são extremantes (veja Exerc. 16).

c)  $(-1, 1, 2)$  não extremante;  $\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 2\right)$  é ponto de mínimo local.

d)  $(3, -2, -1)$  não é extremante.

#### 16.4

1. a) Valor máximo é 6 e é atingido em  $(2, 0)$ ; valor mínimo é  $-3$  e é atingido em  $(0, 3)$ .

b)  $\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$  é ponto de máximo;  $\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$  é ponto de mínimo.

c) Valor máximo é 0 e é atingido nos pontos  $(0, y)$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . O valor mínimo é  $-2$  e é atingido em  $(1, 0)$ .

d) Valor mínimo é 0 e é atingido nos pontos  $(0, y)$ ,  $0 \leq y \leq 5$ ,  $(x, 0)$ ,  $0 \leq x \leq \frac{5}{2}$ . O valor máximo é  $\frac{25}{8}$  que é atingido em  $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right)$ .

- e) O único ponto crítico no interior de  $A$  é  $(0, 0)$  que não é extremante. Assim,  $f$  assumirá os valores máximo e mínimo na fronteira  $x^2 + y^2 = 4$  de  $A$ ;  $g(t) = f(2 \cos t, 2 \sin t)$  fornece os valores de  $f$  na fronteira. O valor máximo é 4, sendo atingido nos pontos  $(0, 2)$  e  $(0, -2)$ . O valor mínimo é  $-4$ , sendo atingido nos pontos  $(2, 0)$  e  $(-2, 0)$ .
- f) Valor mínimo é 0, sendo atingido em  $(0, 0)$ . Valor máximo é 2, sendo atingido nos pontos  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$ .
2.  $\left(\frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{34}\right)$  [Sugestão: Utilize a função  $g(x) = f\left(x, \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .]
3.  $(2, 0)$
4. Valor máximo é 25, sendo atingido em  $(0, 5)$ .
5. O problema consiste em maximizar o lucro  $L = 10x + 6y$  ( $x$  é quantidade do produto  $I$  e  $y$  do produto  $II$ ) com as restrições:  $x \leq 20$ ,  $y \leq 45$ ,  $5x + 4y \leq 200$ ,  $10x + 4y \leq 240$ ,  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ . O lucro será máximo para  $x = 8$  e  $y = 40$ .
6.  $(0, 1)$  maximiza;  $\left(\frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)$  minimiza.
7. Observe que  $Q(at, bt) = t^2 Q(a, b)$ , onde  $a^2 + b^2 = 1$ .

## 16.5

1. a)  $\left(\frac{6}{\sqrt{38}}, \frac{1}{\sqrt{38}}\right)$  é ponto de máximo;  $\left(-\frac{6}{\sqrt{38}}, -\frac{1}{\sqrt{38}}\right)$  é ponto de mínimo.
- b)  $\left(\frac{6}{\sqrt{38}}, \frac{1}{\sqrt{38}}\right)$  é ponto de máximo;  $\left(-\frac{6}{\sqrt{38}}, -\frac{6}{\sqrt{38}}\right)$  é ponto de mínimo.
- c)  $\left(\frac{6}{19}, \frac{1}{19}\right)$  ponto de mínimo.
- d)  $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  ponto de mínimo.
- e)  $(2, 1)$  e  $(-2, -1)$  pontos de máximo;  $(-2, 1)$  e  $(2, -1)$  pontos de mínimo.
- f)  $(-1, 1)$  ponto de mínimo.
- g)  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  ponto de mínimo;  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  e  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  pontos de máximo.
- h)  $(2, 0)$  ponto de máximo;  $\left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$  e  $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$  pontos de mínimo.
- i)  $(1, 1)$  ponto de mínimo local;  $\left(-\frac{13}{7}, \frac{17}{7}\right)$  ponto de máximo local.
- j)  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  e  $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  ponto de máximo,  $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$  e  $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$  ponto de mínimo.
2.  $x^2 + 16y^2 = 8$ ; o ponto de tangência é  $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ .

3.  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

4.  $(2, 4)$ . [Sugestão: minimize  $f(x, y) = (x - 14)^2 + (y - 1)^2$  com a restrição  $y = x^2$ .]

5.  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

6.  $x^2 + y^2 + 2y^2 = \frac{32}{19}$ . O ponto de tangência é  $\left(\frac{8}{19}, \frac{16}{19}, \frac{12}{19}\right)$ .

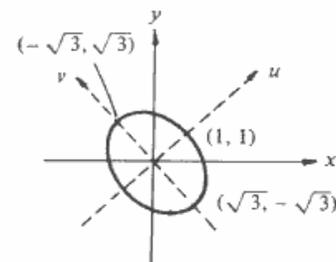
7. Valor máximo é 4, sendo atingido em  $(1, 1, 1)$ . O valor mínimo é  $-4$ , sendo atingido em  $(-1, -1, -1)$ .

8.  $\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{6}{7}\right)$  [Sugestão: minimize  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  com a restrição  $x + 2y - 3z = 4$ .]

9.  $\left(\frac{24}{11}, -\frac{9}{11}, \frac{5}{11}\right)$  [Sugestão: minimize  $x^2 + y^2 + z^2$  com as restrições  $x + 2y + z = 1$  e  $2x + y + z = 4$ .]

10.  $\left(\frac{2 - \sqrt{66}}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2 + \sqrt{66}}{6}\right)$  maximiza  $f$ .

11.  $(1, 1)$  e  $(-1, -1)$  são os mais próximos da origem;  $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$  e  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  são os mais afastados.

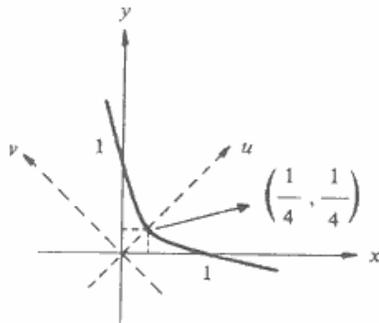


Observação: Sejam  $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  e  $\vec{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ; sejam  $u$  e  $v$  as componentes de  $(x, y)$  na base  $(\vec{u}, \vec{v})$ ; isto é:  $(x, y) = u\vec{u} + v\vec{v}$ , ou seja,  $(x, y) = u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + v\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . Verifique que a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}u - \frac{1}{\sqrt{2}}v \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{2}}v \end{cases}$$

transforma a equação dada na equação  $\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{6} = 1$ .

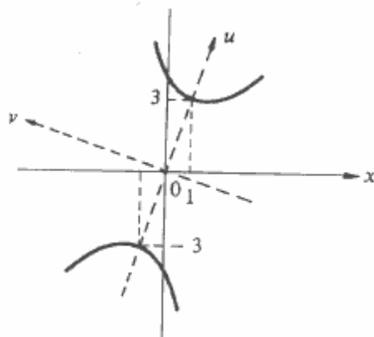
12.  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$  Verifique que a mudança de coordenadas  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}u - \frac{1}{\sqrt{2}}v$ ,  $y = \frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{2}}v$  transforma a equação dada na equação  $2v^2 - 2\sqrt{2}u + 1 = 0$  que é uma parábola.



13. (1, 3) e (-1, -3). A mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}u - \frac{1}{\sqrt{10}}v \\ y = \frac{3}{\sqrt{10}}u + \frac{1}{\sqrt{10}}v \end{cases} \quad \text{ou } (x, y) = u \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{10} \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + v \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{10} \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

transforma a equação dada na equação  $\frac{u^2}{10} - \frac{v^2}{40} = 1$  que é uma hipérbole:



Observe que  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{10} \end{pmatrix}$  e  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{10} \end{pmatrix}$  são os versores de (1, 3) e (-3, 1).

14. (1, 1, 1).

15. 12 cada um.

16. Equilátero.

18. Cubo.

19. Cubo de aresta 1 m.

20. Cubo de aresta  $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ .

21. Paralelepípedo de arestas  $\frac{4}{\sqrt{3}}$ ,  $\frac{6}{\sqrt{3}}$  e  $\frac{8}{\sqrt{3}}$ .

22.  $x = 4$ ,  $y = 2$  e  $z = \frac{4}{3}$ .

23. Temperatura máxima 200. Temperatura mínima: -200.

24.  $6x + 4y + 3z = 12\sqrt{3}$ .

25.  $P = (2, 1)$  e  $Q = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$