Prova I, Calc 3 – Albert Fisher – Fisica – 13 de maio de 2024

Justifique suas respostas! Coloque o seu nome! Boa sorte!

Nota: 1, 3, e 4 valem 3 pontos. 2 e 5 valem 2 pontos. Tem 13 pontos possíveis.

(1) Uma função linear f de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ esta definido por:
$f(x,y) = (u,v)$ onde $u = 2x - 2y$ e $v = 2x + 2y$.
Considere a região B que é o quadrado $\{(x,y) : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1\}$.
(a) Desenhe a imagem $f(B)$.
(b) Qual é a área do $f(B)$? Qual é a área do $f(f(f(B)))$?
(c) Qual é a área do $f^{-1}(B)$, a imagem pela função inversa?

(2) Inverta a ordem de integraço.

$$\int_{-2}^{0}\left(\int_{4y}^{y^3} f(x,y)dx\right)dy$$

(3) Evalue o integral sobre a região B, o parallelogramo com vertices $(0,0), (1,1), (0,2)$ e $(-1,1)$.

$$\int\int_B (x^2 - y^2)^{1/5} dxdy$$

(4)
Dado as funções

$$G(x,y,z) = x - 2y + z$$

$$H(x,y,z) = xy + z - 2$$

e dado constantes c, d, considere as superfícies de nivel $G(x,y,z) = c$, $H(x,y,z) = d$. Suponhamos que existe uma curva diferenciável $\gamma(x)$ com $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ cuja imagem está contida na interseção dessas superfícies, com $\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$. Em outras palavras, essas funções $y(x), z(x)$ são definidas implicitamente pelo sistema de equações $G(x,y,z) = c$, $H(x,y,z) = d$.
Para quais valores de (x,y,z) sambemos, através da Teorema de Valor Implicita, que uma tal γ de fato existe? Ache o vetor tangente de uma tal curva γ em termos dos coordinados x, y, z do ponto $\gamma(x)$.

(5)
Dado a função f com $f(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4}$, o conjunto L é a curva de nivel 1 da função f. Ache os pontos $\underline{p}_{\max}$ e $\underline{p}_{\min}$ onde funçáo $g(x,y) = xy$ assume os valores máximo e mínimo em L. Quais são esses valores?

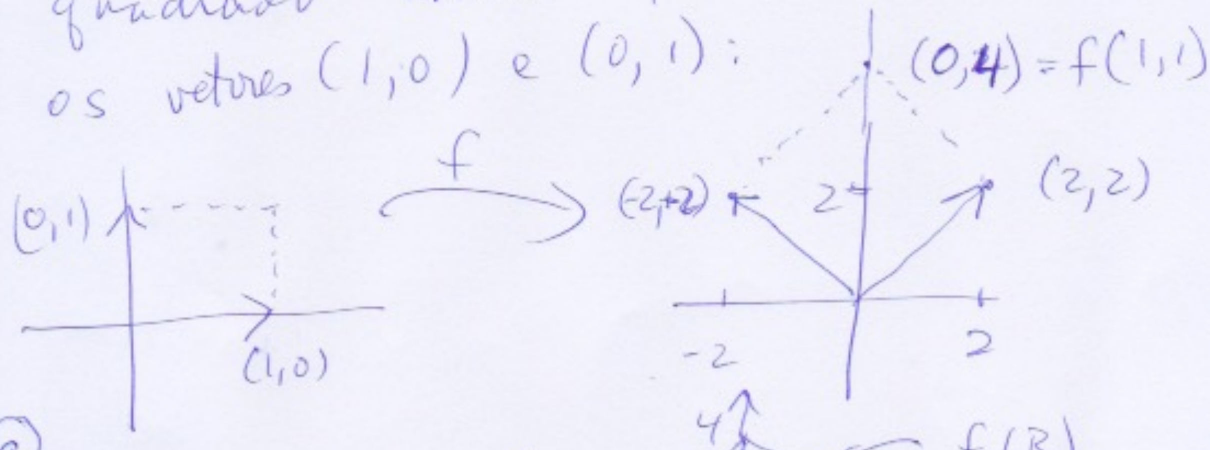
GABARITO - PROVA 1

1) f é linear de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^2$, pois é dado pelo matriz:

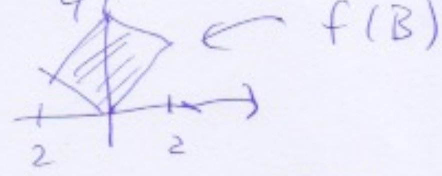
$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-2y \\ 2x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Uma transf. linear preserve combinações lineares: $f(a\underline{v} + b\underline{w}) = af(\underline{v}) + bf(\underline{w})$

Então para entender a imágem do quadrado unitário, basta olhar para os vetores $(1,0)$ e $(0,1)$:



a) Dai a imágem é:



b) Observe-se: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2\sqrt{2}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

$$= 2\sqrt{2}\, R_{\pi/4}$$

onde $R_{\pi/4}$ é a matriz de rotação anti-horário por $\theta = \pi/4$, então f é esta rotação seguido por uma ampliação pelo fator de $2\sqrt{2}$. A área então é multplicado para $(2\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 = 8$, é área f(B) = $\boxed{8.}$

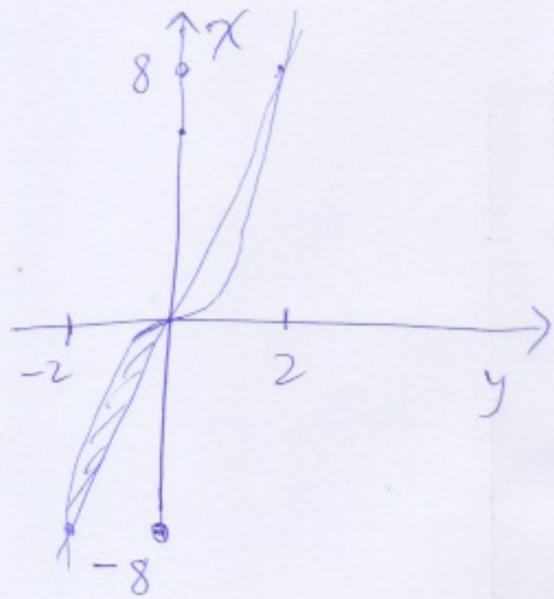
Outra solução: pela def. geométrica de determinante, o fator de mudança de área = $\det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{8.}}$

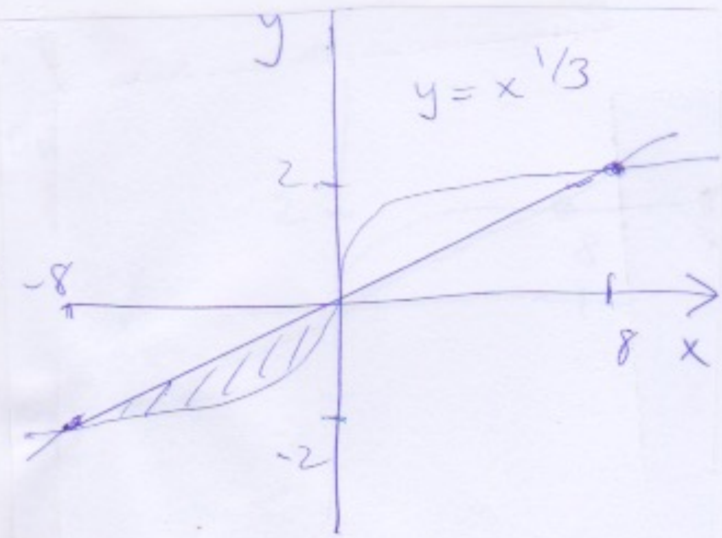
(c) a área do $f(f(f(B))) =$
$8 \cdot 8 \cdot 8 = \boxed{512.}$

(d) a área do $f^{-1}(B)$ é $\boxed{\frac{1}{8}}$.

OBS: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$, $\det A^{-1} = \boxed{\frac{1}{8}}$.

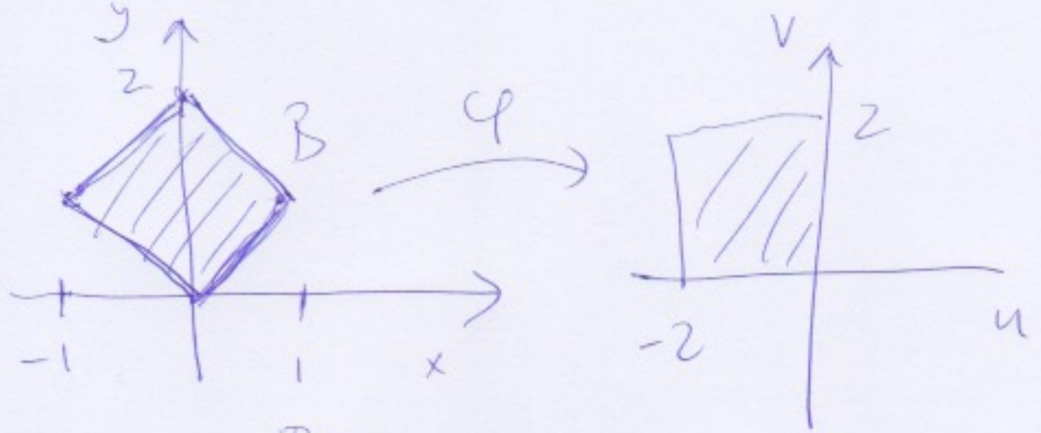
(2) $$\int_{-2}^{0}\left(\int_{4y}^{y^3} f(x,y)\,dx\right)dy = \int_{-8}^{0}\left(\int_{x^{1/3}}^{x/4} f(x,y)\,dy\right)dx$$ (3)





(ambos os gráficos
são corretos)

3 $$\iint_B (x^2-y^2)^{1/5}\,dx\,dy$$



$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} & \\ B \arrow[ur, "f\circ\varphi"] \arrow[rr] & & \varphi(B) \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}$$

$$(x-y)^2 = \overset{u}{(x-y)}\overset{v}{(x+y)}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{M}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$\varphi(1,1) = (0,2)$
$\varphi(-1,1) = (-2,0)$
$\varphi(0,2) = (-2,2)$

$$M = \sqrt{2}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \sqrt{2}\, R_{\pi/4}$$

$\det M = 2$

$\varphi(x,y) = (u,v) = (x-y, x+y)$

$$D\varphi = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = M$$

(Sendo que φ é linear, $D\varphi\big|_{(x,y)} = \varphi$

em cada ponto (x,y)).

Então $\big|\,|D\varphi|\,\big| = 2$ (modulo do determinante),
$\quad\; = |D\varphi|$

Mudança de variaveis:

$$\iint_B f\circ\varphi(x,y)\;|D\varphi(x,y)|\cdot dx\,dy = \iint_{\varphi(B)} f(u,v)\,du\,dv$$

$$\iint_B (x^2-y^2)^{1/5}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint f\circ\varphi(x,y)\,2\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_A f(u,v)\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_0^2\int_{-2}^0 (u\,v)^{1/5}\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 v^{1/5}\left(\int_{-2}^0 u^{1/5}\,du\right)dv$$

$$\int_{-2}^0 u^{1/5}\,du = \frac{5}{6}u^{6/5}\Big|_{-2}^0 = -\frac{5}{6}(-2)^{6/5}$$

$$= -\frac{5}{3}2^{1/5}$$

$$\int_0^2 v^{1/5}\,dv = \frac{5}{6}v^{6/5}\Big|_0^2 = \frac{5}{3}2^{1/5}$$

$$\frac{1}{2}\int\int (uv)^{1/5}\,du\,dv = \frac{-1}{2}\;\frac{25}{9}2^{2/5} = \boxed{\frac{-25}{18}2^{2/5}}$$

$\boxed{4}$ $G(x,y,z) = x - 2y + z$
$H(x,y,z) = xy + z - 2$

Definamos:
$F = (G, H)$

então $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$\gamma(t) = (x,y,z)(t)$, $t = x$,
a curva é parametrizada por x.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[rr, bend right, "F\circ\gamma"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

$D(F\circ\gamma)\Big|_t = DF_{\gamma(t)}\, D\gamma_t$, $F\circ\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (uma curva no $\mathbb{R}^2$)

$F(\gamma(t)) = (c, d)$ constantes.

$(F\circ\gamma)'(t) = (0,0)$ vetor tangente da curva.

$$DF = \begin{bmatrix} \nabla G \\ \nabla H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ y & x & 1 \end{bmatrix}$$

$\gamma(x) = (x, y(x), z(x)) = \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$
$\gamma'(x) = (1, y'(x), z'(x)) = \gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

Pelo Teorema da Função Implícita, (8)

Se DF tem posto maximo $=2$,

daí $F^{-1}(c,d)$ é uma subvariedade

de dimensão $3-2=1$, isto é,

uma <u>curva</u>. Agora $DF = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ y & x & 1 \end{bmatrix}$

tem posto max $\iff (y,x) \neq (1,-2)$.

Mas, a <u>pergunta</u> <u>quer</u> que utilizamos

o parametro x. Para fazer isto,

a versão da Teorema da Função

Implícita p. 240 da Guidorizzi

vol 2, 5ª edição, fale que

podemos fazer se

$$\det \begin{bmatrix} G_y & G_z \\ H_y & H_z \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ x & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

isto é, $\boxed{x \neq -2}$.

VEJA AS NOTAS DE AULA
ESCRITOS DE MÃO!

(Se a pergunta fa em termos do y, ⑨
seria para $y \neq 1$).
(Pois daí $\det \begin{bmatrix} G_x & G_z \\ H_x & H_z \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{bmatrix} = 1 - y \neq 0$.)

Podemos ver isto na prática:

temos
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ y & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} y = y(x) \\ z = z(x) \end{matrix}$$

equivalentemente:
$$\begin{cases} 1 - 2y' + z' = 0 \\ y + xy' + z' = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -2y' + z' = -1 \\ xy' + z' = -y \end{cases}$$

ou $$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -y \end{bmatrix}. \text{ Para } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ x & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-x-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x & -2 \end{bmatrix} \text{ Daí,}$$

$$\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -y \end{bmatrix} = \frac{1}{-x-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -y \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{se } x \neq -2}$$

Daí, $\boxed{y' = \frac{-y+1}{x+2}, \quad z' = \frac{-(x+2y)}{x+2}}$ (10)

(válido para $x \neq -2$).

O vetor tangente é

$$\gamma'(x) = (1, y', z') = \left(1, \frac{-y+1}{x+2}, \frac{-(x+2y)}{x+2}\right),$$

VERIFICANDO: SABEMOS QUE: $\gamma' \perp \nabla F, \nabla G$

$$\Rightarrow \gamma' = c\,(\underline{v} \wedge \underline{w})$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ y & x & 1 \end{vmatrix} = (-2-x, -1+y, x+2y)$$

$$= (-2-x)\left(1, \frac{-1+y}{-2-x}, \frac{x+2y}{-2-x}\right)$$

$$= (-2-x)\left(1, \frac{-y+1}{x+2}, \frac{-(x+2y)}{x+2}\right) \quad \left(\text{para } x \neq -2\right)$$

$$= (-2-x)\,\gamma'(x)$$!! (Verificando o resultado, pois é um multiplo do $\gamma'(x)$ então é $\perp \nabla F, \nabla G$).

(11)

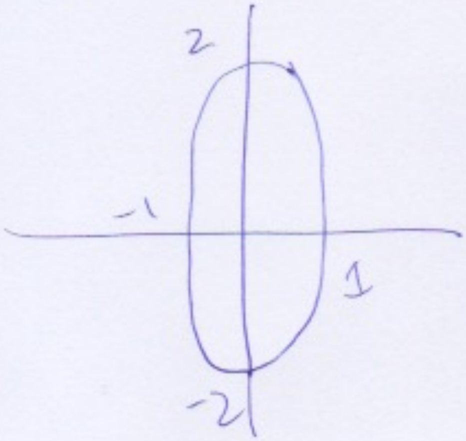
(5) $f(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4}$

$x=0 \Rightarrow y = \pm 2$

$y = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$g(x,y) = xy$

curvas de nivel do g: hiperbolas.



Aqui, $f(x,y) = 1$

$\nabla f = \left(2x, \frac{2y}{4}\right) = \left(2x, \frac{y}{2}\right)$

$\nabla g = (y, x)$

$\nabla f = \lambda \nabla g$

$\left(2x, \frac{y}{2}\right) = \lambda(y, x)$

Mult de Labrange:

$$\begin{cases} 2x = \lambda y & y = 2\lambda x \\ \frac{y}{2} = \lambda x & 2x = \lambda(2\lambda x) \end{cases}$$

$x = \lambda^2 x$, $\lambda^2 = 1$,

$\lambda^2 - 1 = 0.$ $\boxed{\lambda = \pm 1}$

$\overset{\shortparallel}{(\lambda+1)(\lambda-1)}$

1º passo: determina λ:

$\lambda = \pm 1$,

2º passo: substituir:

$$y = 2\lambda x = \begin{cases} 2x & \lambda = 1 \\ -2x & \lambda = -1 \end{cases}$$

5 cont.

(12)

$y = \pm 2x$

$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

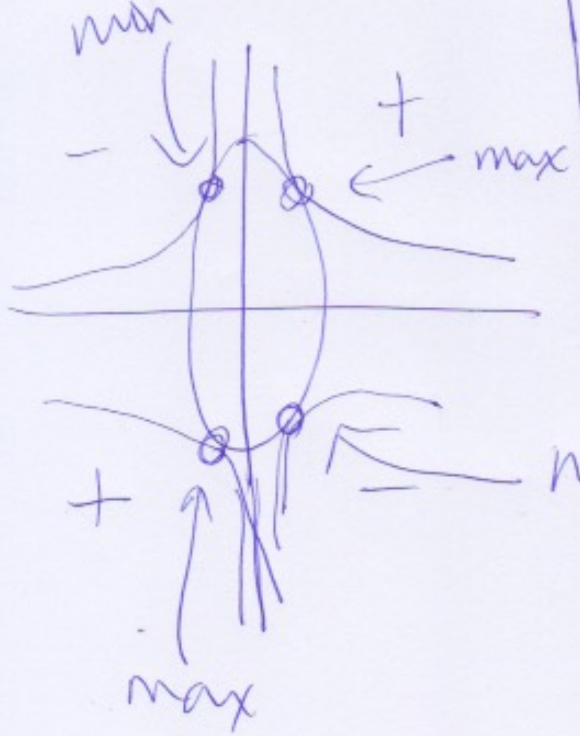
$x^2 + \frac{(\pm 2x)^2}{4} = 1$

$2x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$\boxed{x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Temos 4 pontos:



Se $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$y = \pm 2x = \pm\sqrt{2}$

pontos:	valores: $g(x,y) = xy$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$	$= 1$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$	$= -1$

Se $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$y = \pm 2x$, pontos

	$g(x,y)$
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$	$= 1$
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$.	$= -1$

valores:

max $= 1$ no $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

min no $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$.