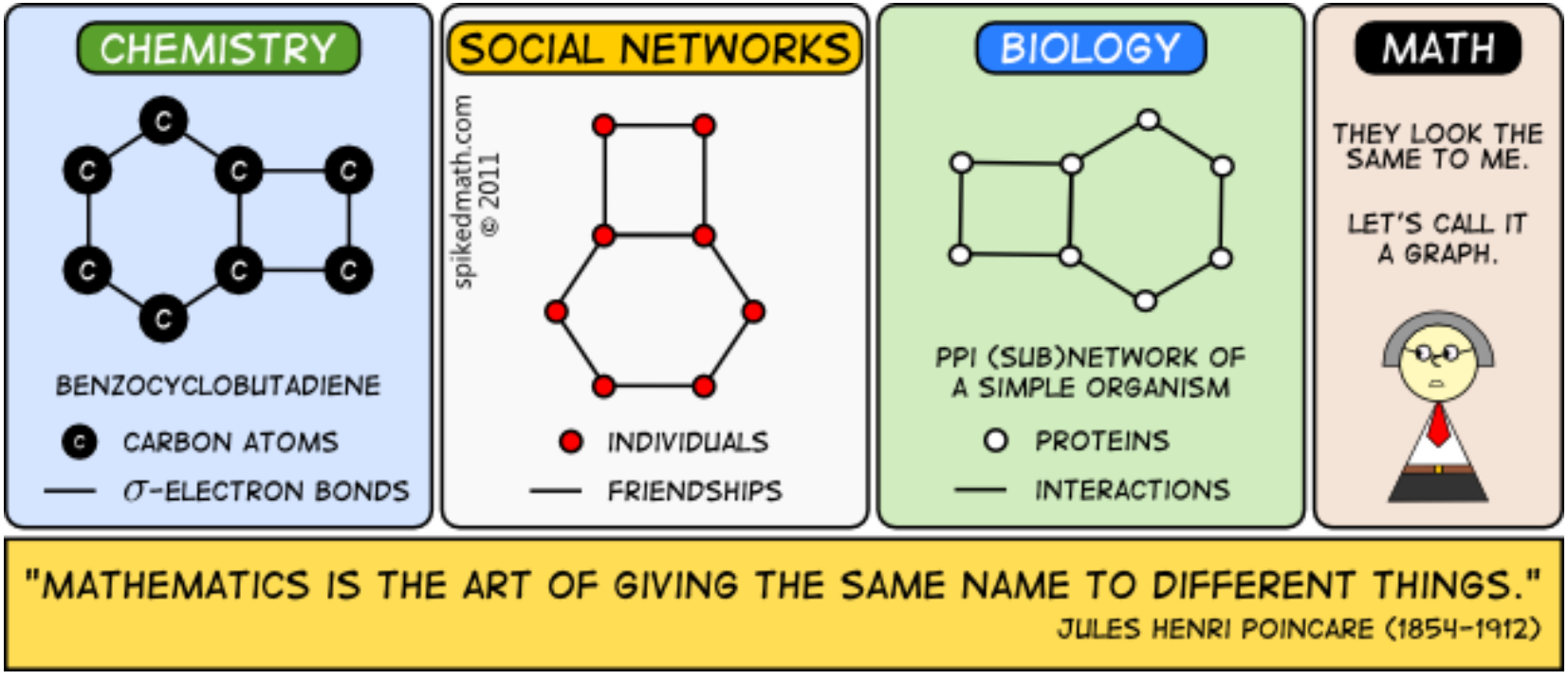
# MAC328 Algoritmos em Grafos

Arnaldo Mandel

1º Semestre 2014

# MAC0328 Algoritmos em Grafos




http://spikedmath.com/250.html

# Administração

## Página da disciplina:

www.ime.usp.br/~am/328

- PF = Paulo Feofiloff,
  *Algoritmos para Grafos em C via Sedgewick*
  www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_para_grafos
- S = Robert Sedgewick,
  *Algorithms in C (part 5: Graph Algorithms)*
- CLRS = Cormen-Leiserson-Rivest-Stein,
  *Introductions to Algorithms*
- DaMNeD = David Joyner, Minh Van Nguyen, and David Phillips,
  *Algorithmic Graph Theory and Sage*

Os slides usados neste curso são derivados do material produzido pelo Prof. José Coelho de Pina Jr.

Professor e alunos agradecem desde já!

# MAC0328

MAC0328 Algoritmos em grafos é:

- uma disciplina introdutória em projeto e análise de algoritmos sobre grafos
- um laboratório de algoritmos sobre grafos

# MAC0328

MAC0328 combina técnicas de

- programação
- estruturas de dados
- análise de algoritmos
- teoria dos grafos

para resolver problemas sobre grafos.

# Pré-requisitos

O pré-requisito oficial de MAC0328 é

- MAC0122 Princípios de Desenvolvimento de Algoritmos.

No entanto, é recomendável que já tenham cursado

- MAC0211 Laboratório de programação; e
- MAC0323 Estruturas de dados

Costuma ser conveniente cursar MAC0328 simultaneamente com

- MAC0338 Análise de algoritmos.

# Principais tópicos

- grafos dirigidos
- estruturas de dados para grafos
- construção de grafos aleatórios
- florestas e árvores
- caminhos e ciclos
- busca em largura
- caminhos mínimos
- grafos bipartidos
- busca em profundidade
- grafos dirigidos acíclicos
- ordenação topológica
- pontes e ciclos
- grafos conexos e componentes
- grafos biconexos
- árvores geradoras mínimas
- fluxo em redes

# Principais tópicos

- grafos dirigidos
- estruturas de dados para grafos
- construção de grafos aleatórios
- florestas e árvores
- caminhos e ciclos
- **busca em largura**
- caminhos mínimos
- grafos bipartidos
- **busca em profundidade**
- grafos dirigidos acíclicos
- ordenação topológica
- pontes e ciclos
- grafos conexos e componentes
- grafos biconexos
- árvores geradoras mínimas
- fluxo em redes

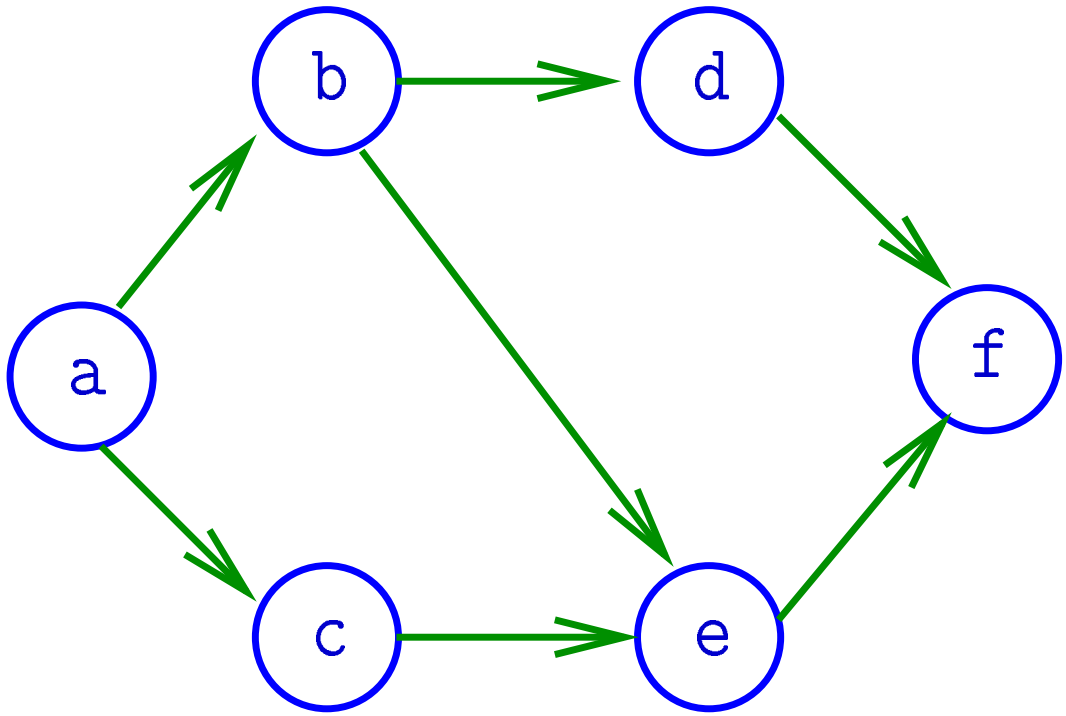
# Digrafos

S 17.0, 17.1

# Digrafos

Um **digrafo** (*directed graph*) consiste de um conjunto de vértices (bolas) e um conjunto de arcos (flechas)

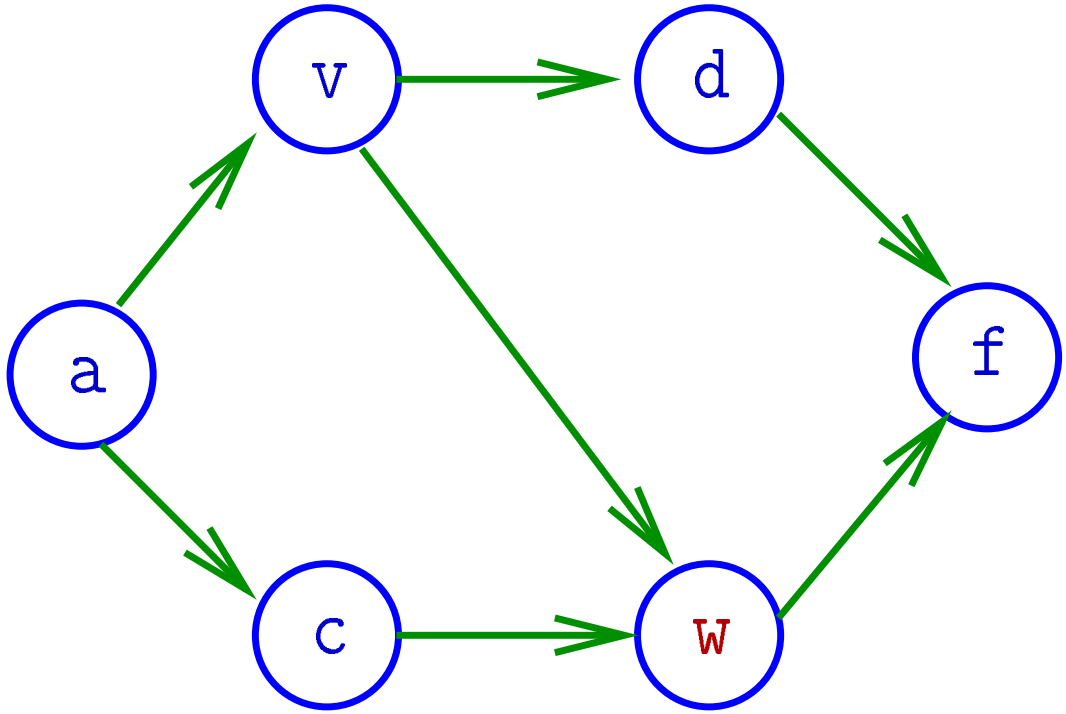
Exemplo: representação de um grafo



# Arcos

Um **arco** é um par ordenado de vértices

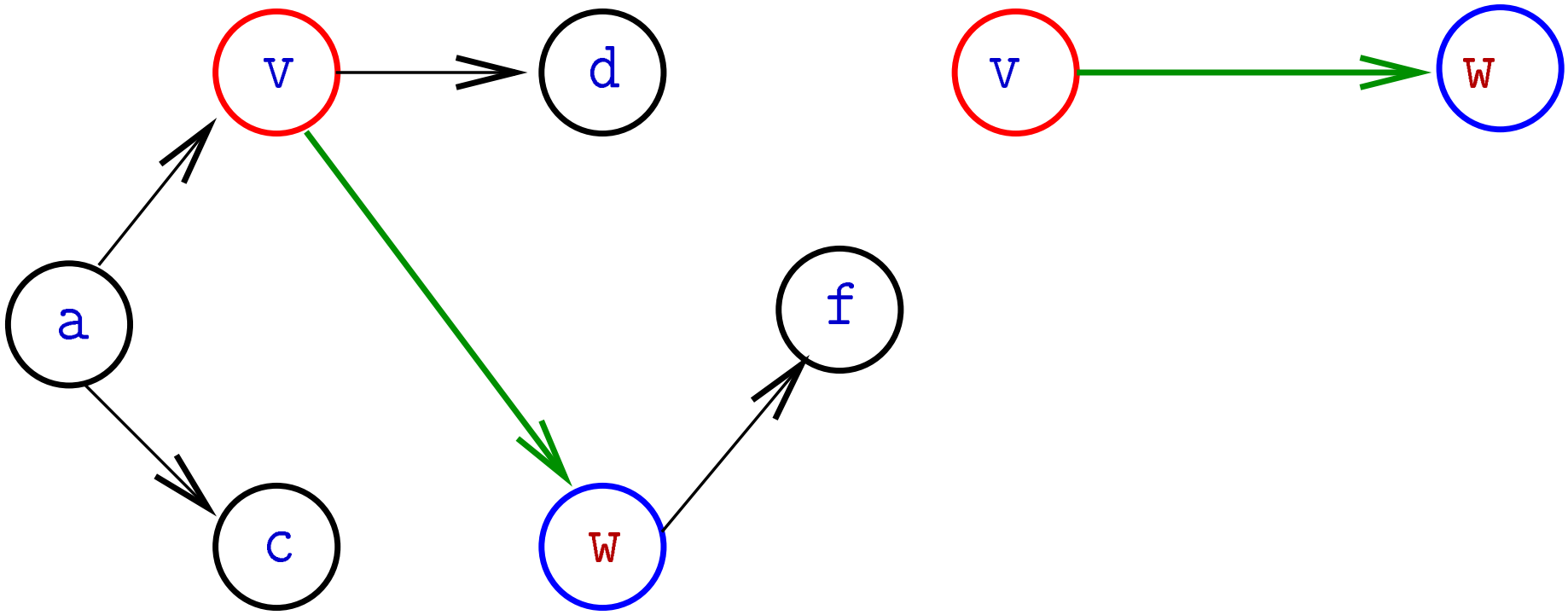
Exemplo: `v` e `w` são vértices e `v-w` é um arco



# Ponta inicial e final

Para cada arco v-w, o vértice v é a **ponta inicial** e w é a **ponta final**

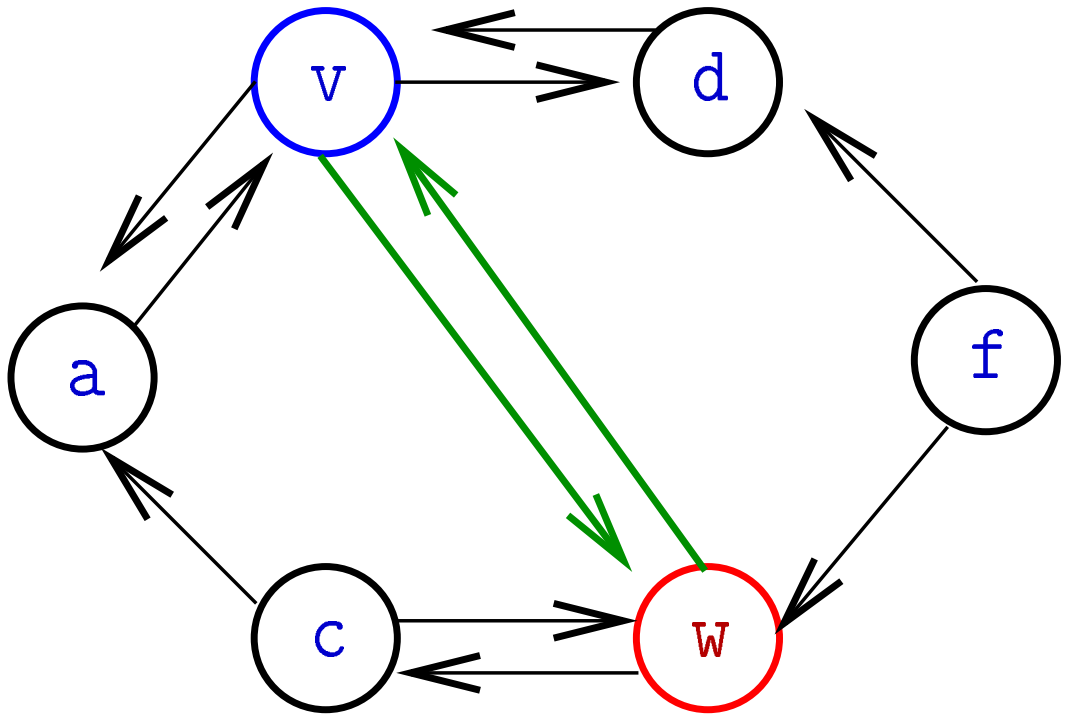
Exemplo: v é ponta inicial e w é ponta final de v-w



# Arcos anti-paralelos

Dois arcos são **anti-paralelos** se a ponta inicial de um é ponta final do outro

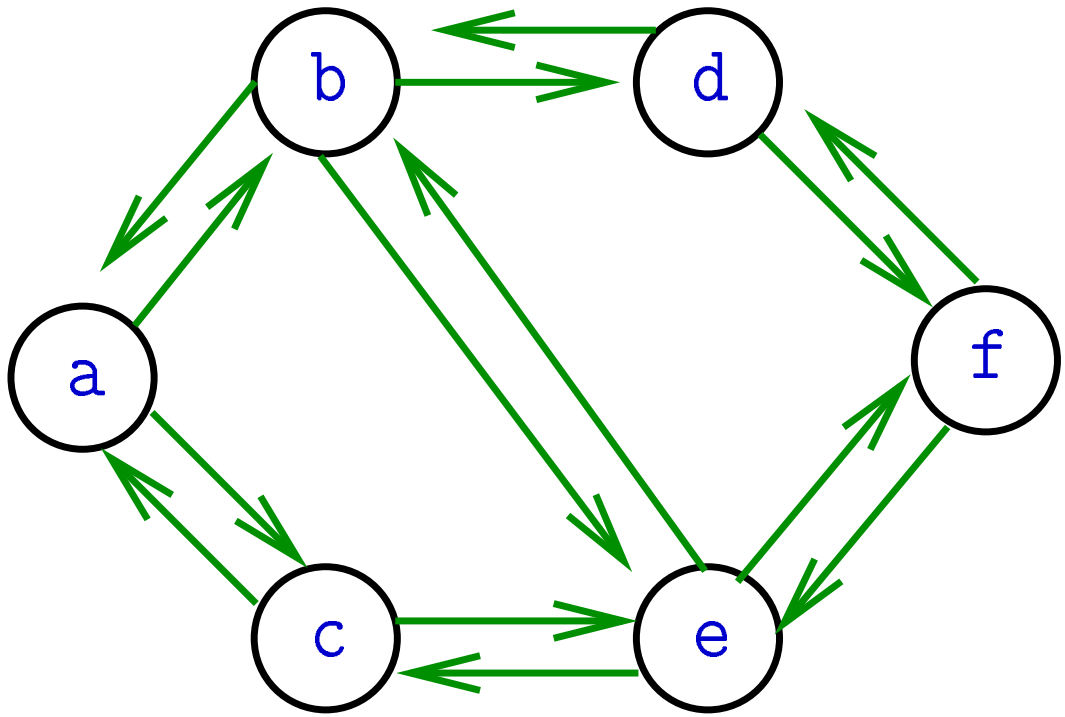
Exemplo: v-w e w-v são anti-paralelos



# Digrafos simétricos

Um digrafo é **simétrico** se cada um de seus arcos é anti-paralelo a outro

Exemplo: digrafo simétrico

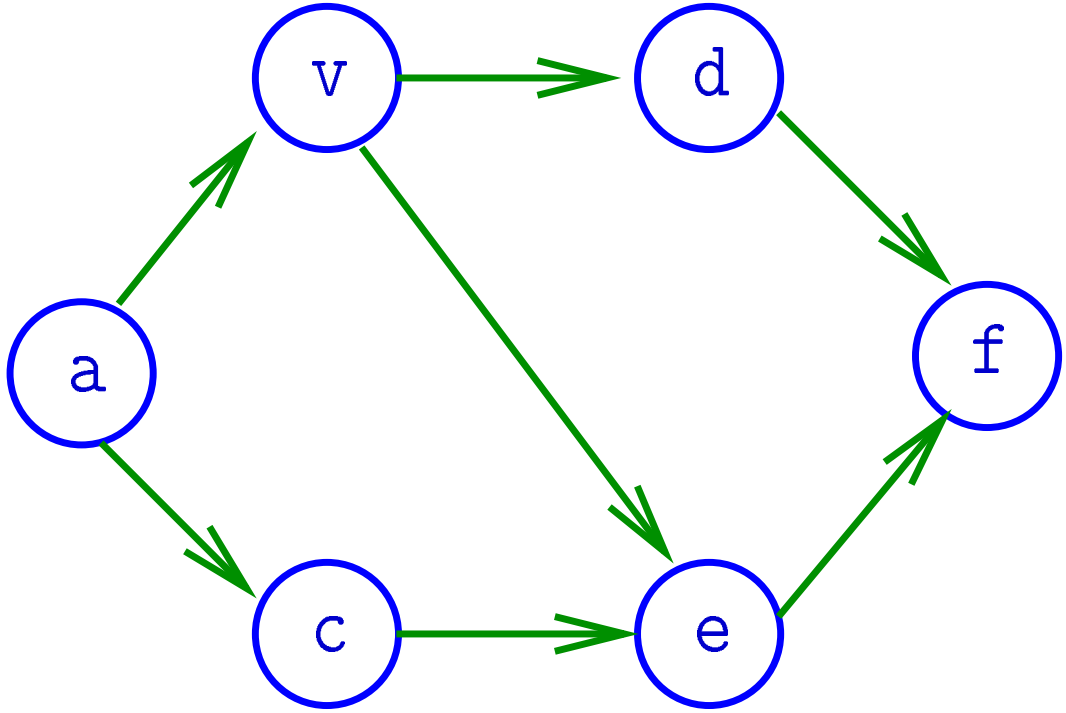


# Graus de entrada e saída

**grau de entrada** de v= nº arcos com final v

**grau de saída** de v = nº arcos com início v

Exemplo: v tem grau de entrada 1 e de saída 2



# Número de arcos

Quantos arcos, no máximo, tem um digrafo com $V$ vértices?

A resposta é $V \times (V - 1) = \Theta(V^2)$

digrafo **completo** = todo par ordenado de vértices distintos é arco

digrafo **denso** = tem "muitos" arcos

digrafo **esparso** = tem "poucos" arcos

# Número de arcos

Quantos arcos, no máximo, tem um digrafo com $V$ vértices?

A resposta é $V \times (V - 1) = \Theta(V^2)$

digrafo **completo** = todo par ordenado de vértices distintos é arco

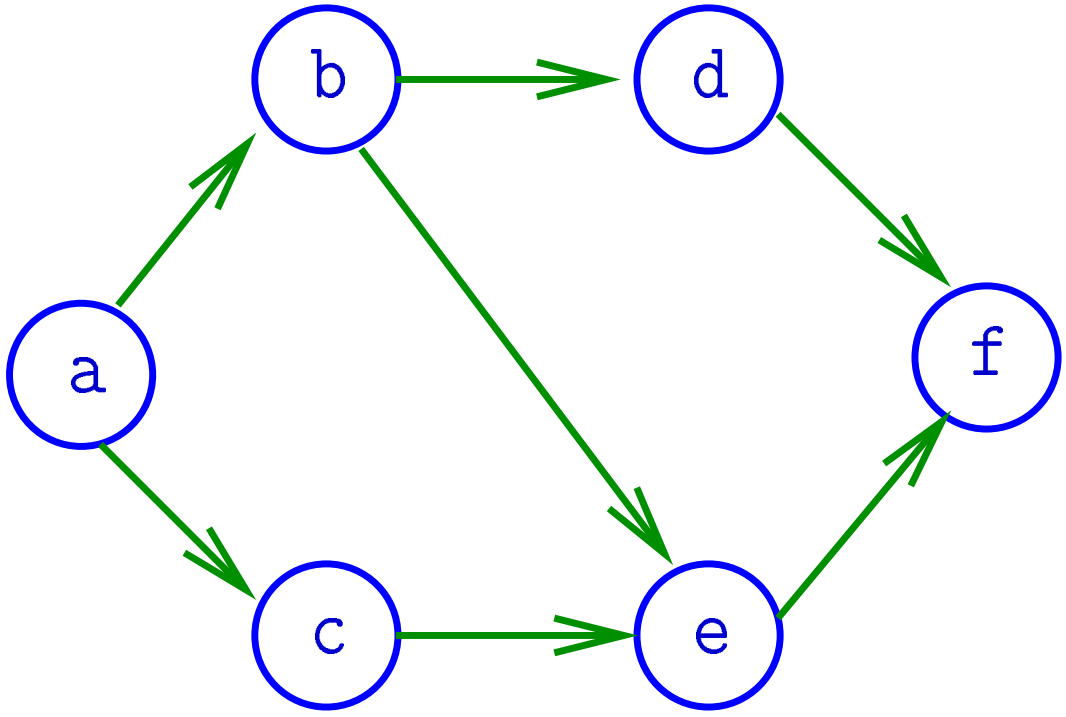
digrafo **denso** = tem "muitos" arcos

digrafo **esparso** = tem "poucos" arcos

# Especificação

Digrafos podem ser especificados através de sua lista de arcos

Exemplo:




```
d-f
b-d
a-c
b-e
e-f
a-b
```

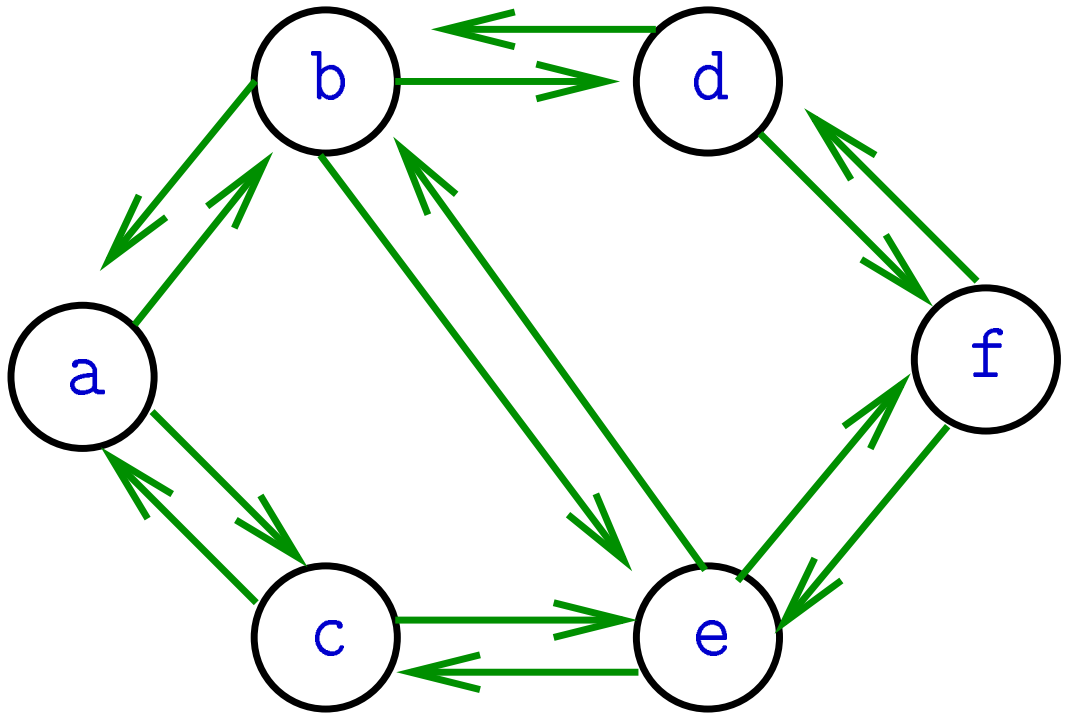
# Grafos

S 17.0, 17.1

# Grafos

Um **grafo** é um digrafo **simétrico**

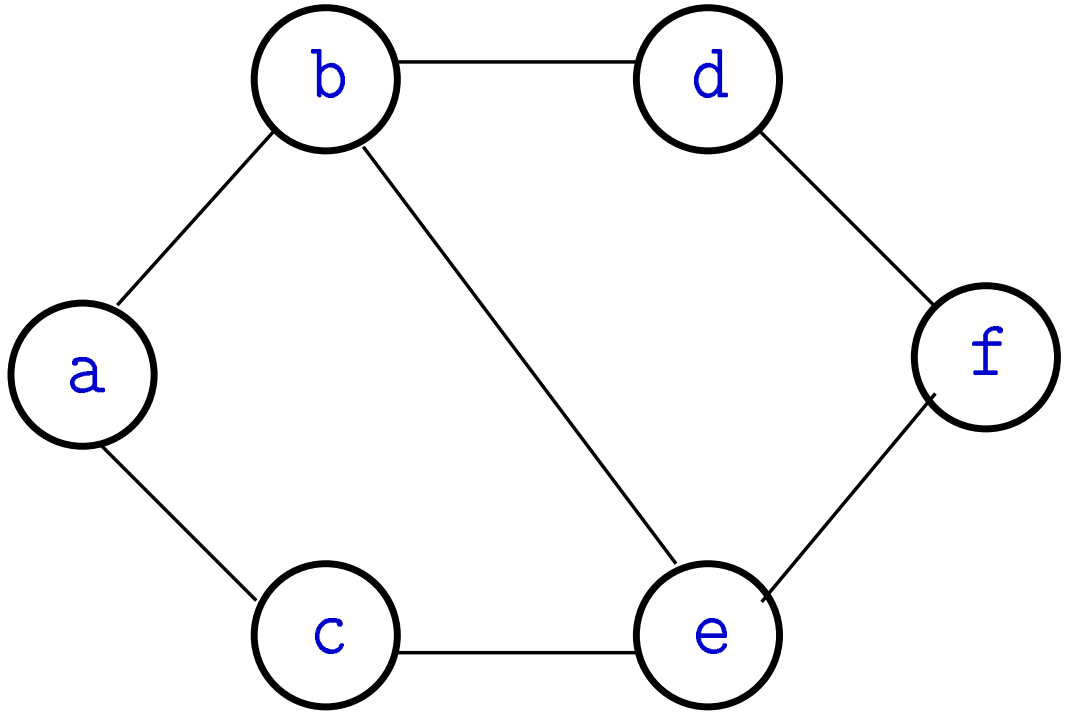
Exemplo: um grafo



# Grafos

Um **grafo** é um digrafo **simétrico**

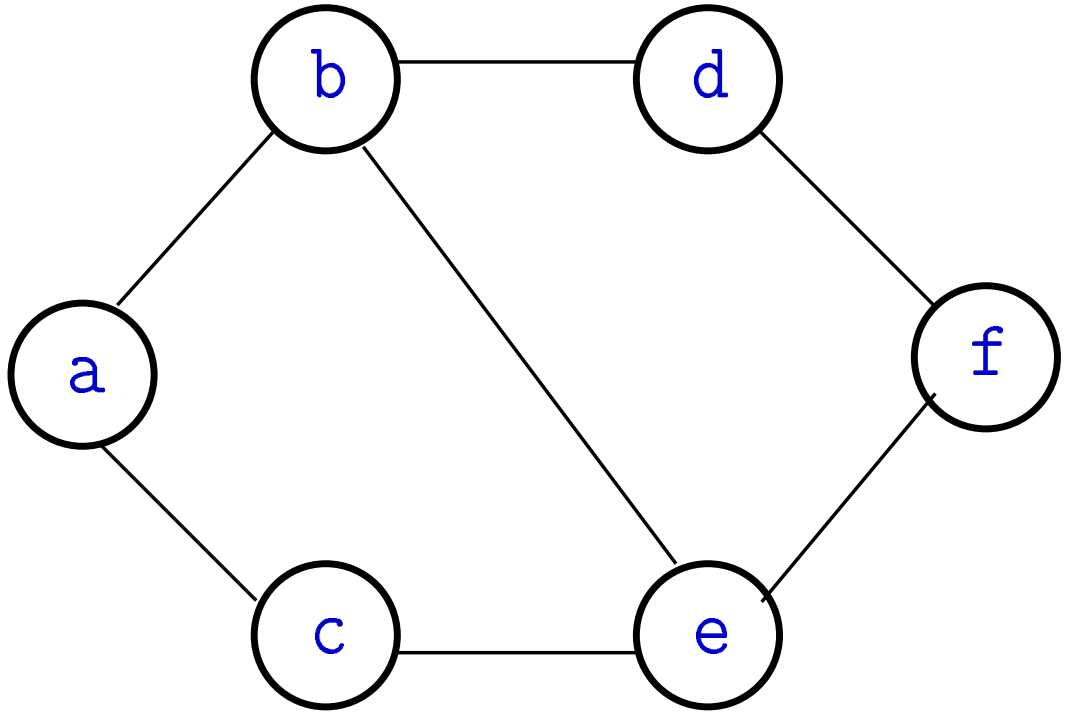
Exemplo: representação usual



# Arestas

Uma **aresta** é um par de arcos anti-paralelos.

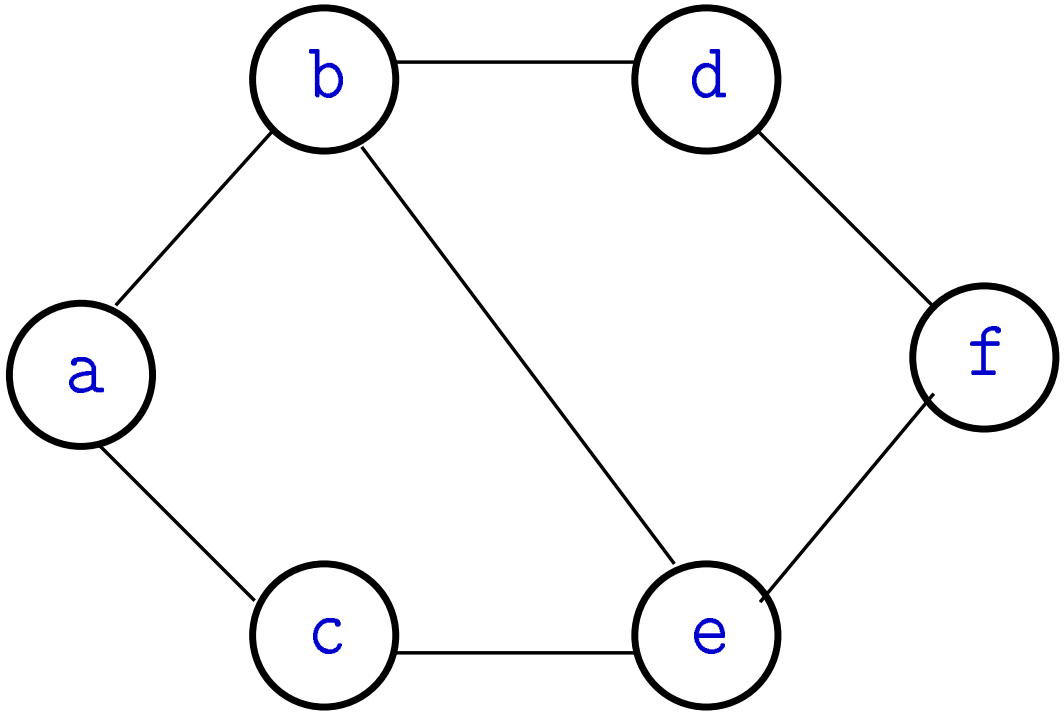
Exemplo: b-a e a-b são a **mesma** aresta



# Especificação

Grafos podem ser especificados através de sua lista de arestas

Exemplo:



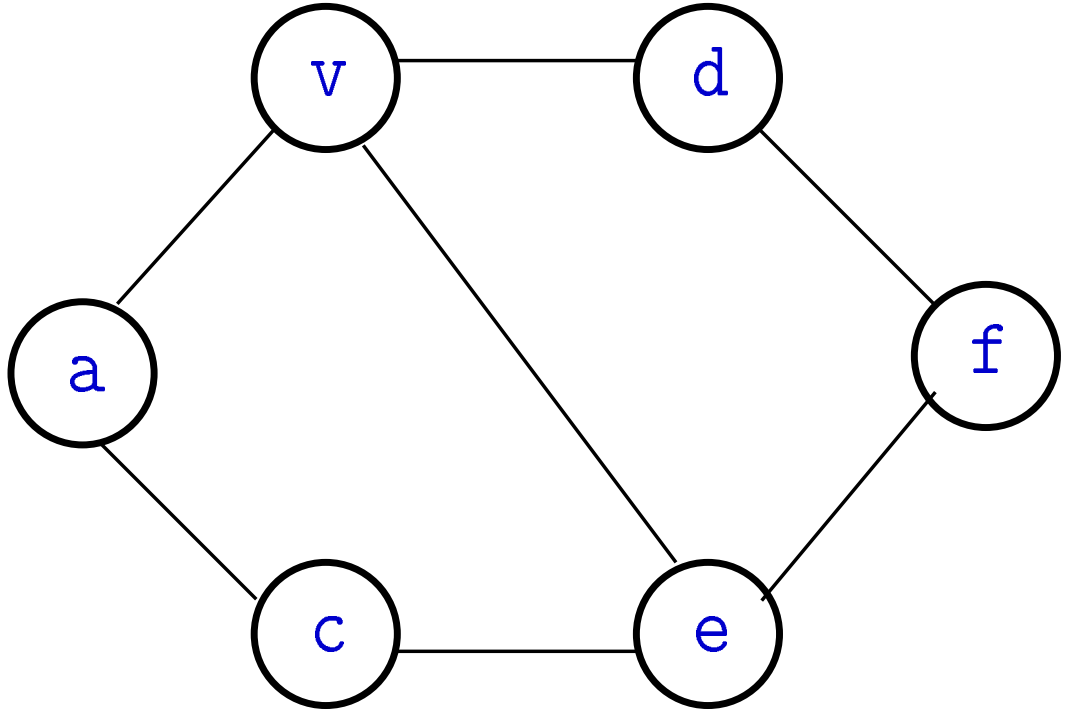

```
f-d
b-d
c-a
e-b
e-f
a-b
```

# Graus de vértices

Em um grafo

**grau** de v = número de arestas com ponta em v

Exemplo: v tem grau 3



# Número de arestas

Quantas arestas, no máximo, tem um grafo com $V$ vértices?

A resposta é $V \times (V-1)/2 = \Theta(V^2)$

grafo **completo** = todo par **não**-ordenado de vértices distintos é aresta

# Número de arestas

Quantas arestas, no máximo, tem um grafo com $V$ vértices?

A resposta é $V \times (V-1)/2 = \Theta(V^2)$

grafo **completo** = todo par **não**-ordenado de vértices distintos é aresta

# Estruturas de dados

S 17.2

# O que se faz com grafos?

Grafos podem ser vistos com ED, generalizando outras EDs ligadas.

Ou podem ser vistos como objetos de uma classe, definida por métodos que proporcionam:

- Dado um vértice e um arco, o vértice é ponta do arco? Qual?
- Dado um arco, quais são suas pontas?
- Iteradores
  - Para cada vértice $v$ ...
  - Dado um vértice $v$,
    - para cada arco saindo de (entrando em) $v$ ...

# O que se faz com grafos?

Grafos podem ser vistos com ED, generalizando outras EDs ligadas.

Ou podem ser vistos como objetos de uma classe, definida por métodos que proporcionam:

- Dado um vértice e um arco, o vértice é ponta do arco? Qual?
- Dado um arco, quais são suas pontas?
- Iteradores
  - Para cada vértice ...
  - Dado um vértice $v$, ...
    - para cada arco saindo de (entrando em) $v$ ...

# O que se faz com grafos?

Grafos podem ser vistos com ED, generalizando outras EDs ligadas.

Ou podem ser vistos como objetos de uma classe, definida por métodos que proporcionam:

- Dado um vértice e um arco, o vértice é ponta do arco? Qual?
- Dado um arco, quais são suas pontas?
- Iteradores
  - Para cada vértice...
  - Dado um vértice $v$,

    para cada arco saindo de (entrando em) $v$...

# O que se faz com grafos?

Grafos podem ser vistos com ED, generalizando outras EDs ligadas.

Ou podem ser vistos como objetos de uma classe, definida por métodos que proporcionam:

- Dado um vértice e um arco, o vértice é ponta do arco? Qual?
- Dado um arco, quais são suas pontas?
- Iteradores
  - Para cada vértice...
  - Dado um vértice $v$,

    para cada arco saindo de (entrando em) $v$...

# O que se faz com grafos?

Grafos podem ser vistos com ED, generalizando outras EDs ligadas.

Ou podem ser vistos como objetos de uma classe, definida por métodos que proporcionam:

- Dado um vértice e um arco, o vértice é ponta do arco? Qual?
- Dado um arco, quais são suas pontas?
- Iteradores
  - Para cada vértice...
  - Dado um vértice $v$,

    para cada arco saindo de (entrando em) $v$ ...

# O que se faz com grafos?

Grafos podem ser vistos com ED, generalizando outras EDs ligadas.

Ou podem ser vistos como objetos de uma classe, definida por métodos que proporcionam:

- Dado um vértice e um arco, o vértice é ponta do arco? Qual?
- Dado um arco, quais são suas pontas?
- Iteradores
  - Para cada vértice...
  - Dado um vértice $v$,

    para cada arco saindo de (entrando em) $v$ ...

# O que se faz com grafos?

Grafos podem ser vistos com ED, generalizando outras EDs ligadas.

Ou podem ser vistos como objetos de uma classe, definida por métodos que proporcionam:

- Dado um vértice e um arco, o vértice é ponta do arco? Qual?
- Dado um arco, quais são suas pontas?
- Iteradores
  - Para cada vértice...
  - Dado um vértice $v$,

    para cada arco saindo de (entrando em) $v$ ...

# Vértices

Vértices são representados por objetos do tipo `Vertex`.

Os vértices de um digrafo são `0,1,...,V-1`.

```
#define Vertex int
```

# Arcos

Um objeto do tipo `Arc` representa um arco com ponta inicial `v` e ponta final `w`.

```
typedef struct {
    Vertex v;
    Vertex w;
} Arc;
```

# ARC

A função `ARC` recebe dois vértices `v` e `w` e devolve um arco com ponta inicial `v` e ponta final `w`.

```
Arc ARC (Vertex v, Vertex w) {
1       Arc e;
2       e.v= v;
3       e.w= w;
4       return e;
    }
```

# ARC

A função ARC recebe dois vértices v e w e devolve um arco com ponta inicial v e ponta final w.

```
   Arc ARC (Vertex v, Vertex w) {
1        Arc e;
2        e.v= v;
3        e.w= w;
4        return e;
   }
```

# Arestas

Um objeto do tipo `Edge` representa uma aresta com pontas `v` e `w`.

```
#define Edge Arc
```

# Arestas

Um objeto do tipo `Edge` representa uma aresta com pontas `v` e `w`.

```
#define Edge Arc
```

# Arestas

A função `EDGE` recebe dois vértices `v` e `w` e devolve uma aresta com pontas `v` e `w`.

```
#define EDGE ARC
```

# Arestas

A função `EDGE` recebe dois vértices `v` e `w` e devolve uma aresta com pontas `v` e `w`.

```
#define EDGE ARC
```

# Grafos no computador

Usaremos duas representações clássicas:

- matriz de adjacência (**agora**)
- vetor de listas de adjacência (**próximas aulas**)

Há várias outras maneiras, como, por exemplo

- matriz de incidência

que é apropriada para MAC0315 Prog. Linear.

# Matrizes de adjacência

S 17.3

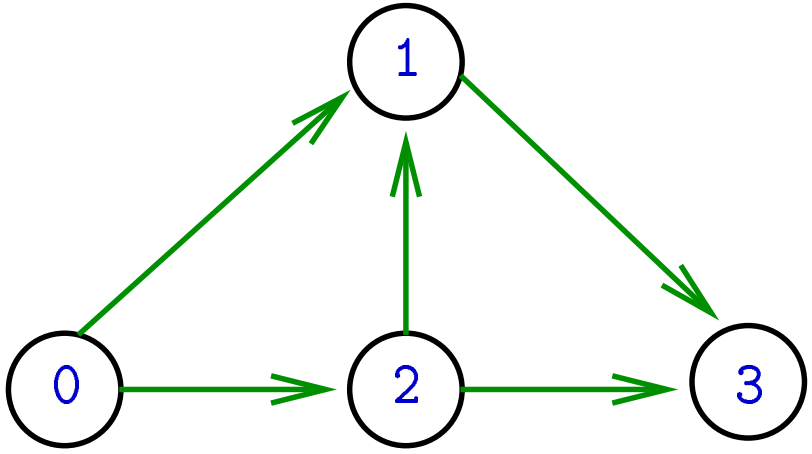
# Matriz de adjacência de digrafo

**Matriz de adjacência** de um digrafo tem linhas e colunas indexadas por vértices:

`adj[v][w]` = 1 se `v-w` é um arco

`adj[v][w]` = 0 em caso contrário

Exemplo:




| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Consumo de espaço: $\Theta(V^2)$ fácil de implementar

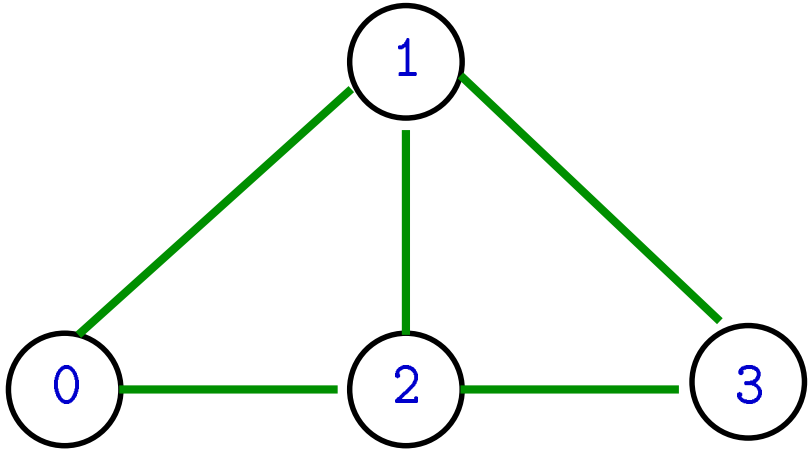
# Matriz de adjacência de grafo

**Matriz de adjacência** de um grafo tem linhas e colunas indexadas por vértices:

`adj[v][w]` = 1 se `v`-`w` é um aresta

`adj[v][w]` = 0 em caso contrário

Exemplo:




| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Consumo de espaço: $\Theta(V^2)$ fácil de implementar

# Estrutura digraph

A estrutura **digraph** representa um digrafo

- `adj` é um ponteiro para a matriz de adjacência
- `V` contém o número de vértices
- `A` contém o número de arcos do digrafo.

```
struct digraph {
    int V;
    int A;
    int **adj;
};
```

# Estrutura Digraph

Um objeto do tipo Digraph contém o endereço de um digraph

```
typedef struct digraph *Digraph;
```

# Estruturas graph e Graph

Essa mesma estrutura será usada para representar grafos

```
#define graph digraph
#define Graph Digraph
```

O número de arestas de um grafo G é

```
(G->A)/2
```

# Estruturas graph e Graph

Essa mesma estrutura será usada para representar grafos

```
#define graph digraph
#define Graph Digraph
```

O número de arestas de um grafo G é

```
(G->A)/2
```

# Funções básicas

Aloca uma matriz com linhas `0..r-1` e colunas `0..c-1`, cada elemento da matriz recebe valor `val`

```
int **MATRIXint (int r, int c, int val) {
0       Vertex i, j;
1       int **m = malloc(r * sizeof(int *));
2       for (i = 0; i < r; i++)
3           m[i] = malloc(c * sizeof(int));
4       for (i = 0; i < r; i++)
5           for (j = 0; j < c; j++)
6               m[i][j] = val;
7       return m;
    }
```

# Funções básicas

Aloca uma matriz com linhas `0..r-1` e colunas `0..c-1`, cada elemento da matriz recebe valor `val`

```
    int **MATRIXint (int r, int c, int val) {
0       Vertex i, j;
1       int **m = malloc(r * sizeof(int *));
2       for (i = 0; i < r; i++)
3           m[i] = malloc(c * sizeof(int));
4       for (i = 0; i < r; i++)
5           for (j = 0; j < c; j++)
6               m[i][j] = val;
7       return m;
    }
```

# Consumo de tempo

| linha | número de execuções da linha | |
|---|---|---|
| 1 | $= 1$ | $= \Theta(1)$ |
| 2 | $= \mathtt{r} + 1$ | $= \Theta(\mathtt{r})$ |
| 3 | $= \mathtt{r}$ | $= \Theta(\mathtt{r})$ |
| 4 | $= \mathtt{r} + 1$ | $= \Theta(\mathtt{r})$ |
| 5 | $= \mathtt{r} \times (\mathtt{c} + 1)$ | $= \Theta(\mathtt{r}\,\mathtt{c})$ |
| 6 | $= \mathtt{r} \times \mathtt{c}$ | $= \Theta(\mathtt{r}\,\mathtt{c})$ |
| total | $\Theta(1) + 3\,\Theta(\mathtt{r}) + 2\,\Theta(\mathtt{r}\,\mathtt{c})$ | |
| | $= \Theta(\mathtt{r}\,\mathtt{c})$ | |

# Conclusão

Supondo que o consumo de tempo da função `malloc` é constante

> O consumo de tempo da função `MATRIXint` é $\Theta(\mathtt{r}\,\mathtt{c})$.

# DIGRAPHinit

Devolve (o endereço de) um novo digrafo com vértices `0,...,V-1` e nenhum arco.

```
   Digraph DIGRAPHinit (int V) {
0      Digraph G = malloc(sizeof *G);
1      G->V = V;
2      G->A = 0;
3      G->adj = MATRIXint(V, V, 0);
4      return G;
   }
```

# DIGRAPHinit

Devolve (o endereço de) um novo digrafo com vértices 0,...,V-1 e nenhum arco.

```
   Digraph DIGRAPHinit (int V) {
0      Digraph G = malloc(sizeof *G);
1      G->V = V;
2      G->A = 0;
3      G->adj = MATRIXint(V, V, 0);
4      return G;
   }
```