Caminhos em digrafos (continuação)

S 17.1

DIGRAPHpath

Esta versão para assim que encontra `t`

```
static int lbl[maxV];
int DIGRAPHpath (Digraph G, Vertex s, Vertex t)
{
    Vertex v;
1   for (v = 0; v < G->V; v++)
2       lbl[v] = 0;
3   return pathR(G,s,t);
}
```

DIGRAPHpath

Esta versão para assim que encontra `t`

```
static int lbl[maxV];
int DIGRAPHpath (Digraph G, Vertex s, Vertex t)
{
    Vertex v;
1   for (v = 0; v < G->V; v++)
2       lbl[v] = 0;
3   return pathR(G,s,t);
}
```

pathR

Para assim que encontra t

```
int pathR (Digraph G, Vertex v, Vertex t) {
    Vertex w;
0   lbl[v] = 1;
1   if (v == t) return 1;
2   for (w = 0; w < G->V; w++)
3       if (G->adj[v][w] && !lbl[w])
4           if (pathR(G, w, t))
5               return 1;
6   return 0;
}
```

Problema

Como alterar `DIGRAPHpath` para devolver um caminho, quando existir?

Qual a ED para devolver o caminho?

Seria o caso de alterar `DIGRAPHpath` para computar um pouco mais de informação?

E o que fazer quando não há caminho: como convencer alguém?

Problema

Como alterar `DIGRAPHpath` para devolver um caminho, quando existir?

Qual a ED para devolver o caminho?

Seria o caso de alterar `DIGRAPHpath` para computar um pouco mais de informação?

E o que fazer quando não há caminho: como convencer alguém?

Problema

Como alterar `DIGRAPHpath` para devolver um caminho, quando existir?

Qual a ED para devolver o caminho?

Seria o caso de alterar `DIGRAPHpath` para computar um pouco mais de informação?

E o que fazer quando não há caminho: como convencer alguém?

Problema

Como alterar `DIGRAPHpath` para devolver um caminho, quando existir?

Qual a ED para devolver o caminho?

Seria o caso de alterar `DIGRAPHpath` para computar um pouco mais de informação?

E o que fazer quando não há caminho: como convencer alguém?

Certificados

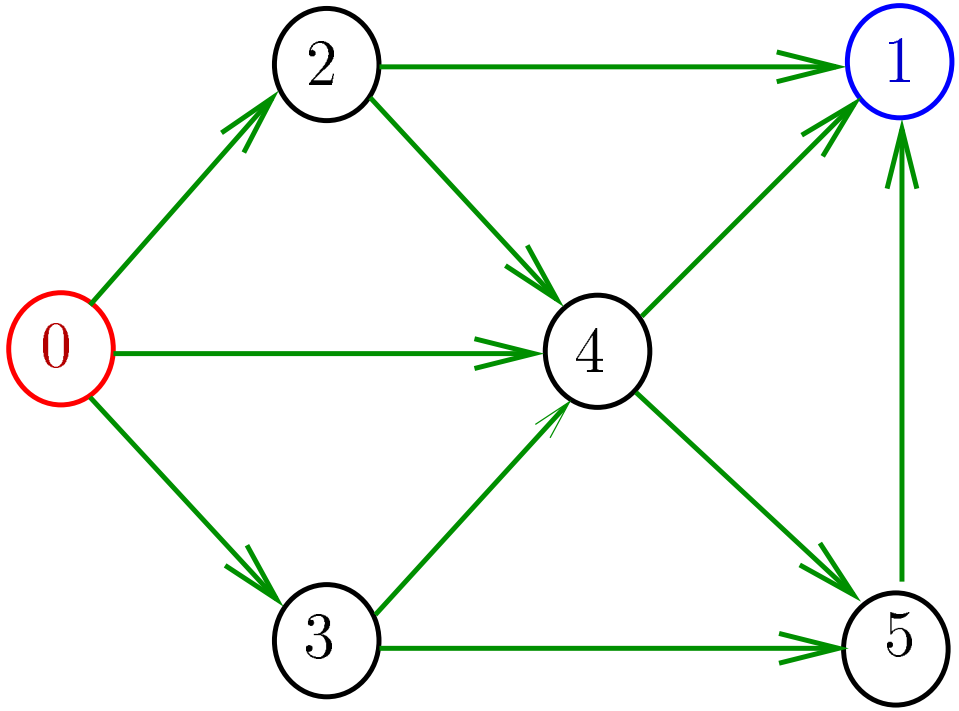
Cortes e arborescências

S páginas 84,91,92, 373

Procurando um caminho

Problema: dados um digrafo `G` e dois vértices `s` e `t` decidir se existe um caminho de `s` a `t`

Exemplo: para `s` = 0 e `t` = 1 a resposta é SIM



Certificados

Como é possível 'verificar' a resposta?

Como é possível 'verificar' que existe caminho?

Como é possível 'verificar' que não existe caminho?

Veremos questões deste tipo freqüentemente

Elas terão um papel **suuupeeer** importante no final de MAC0338 Análise de Algoritmos

Elas estão relacionadas com o Teorema da Dualidade visto em MAC0315 Programação Linear

Certificados

Como é possível 'verificar' a resposta?

Como é possível 'verificar' que existe caminho?

Como é possível 'verificar' que não existe caminho?

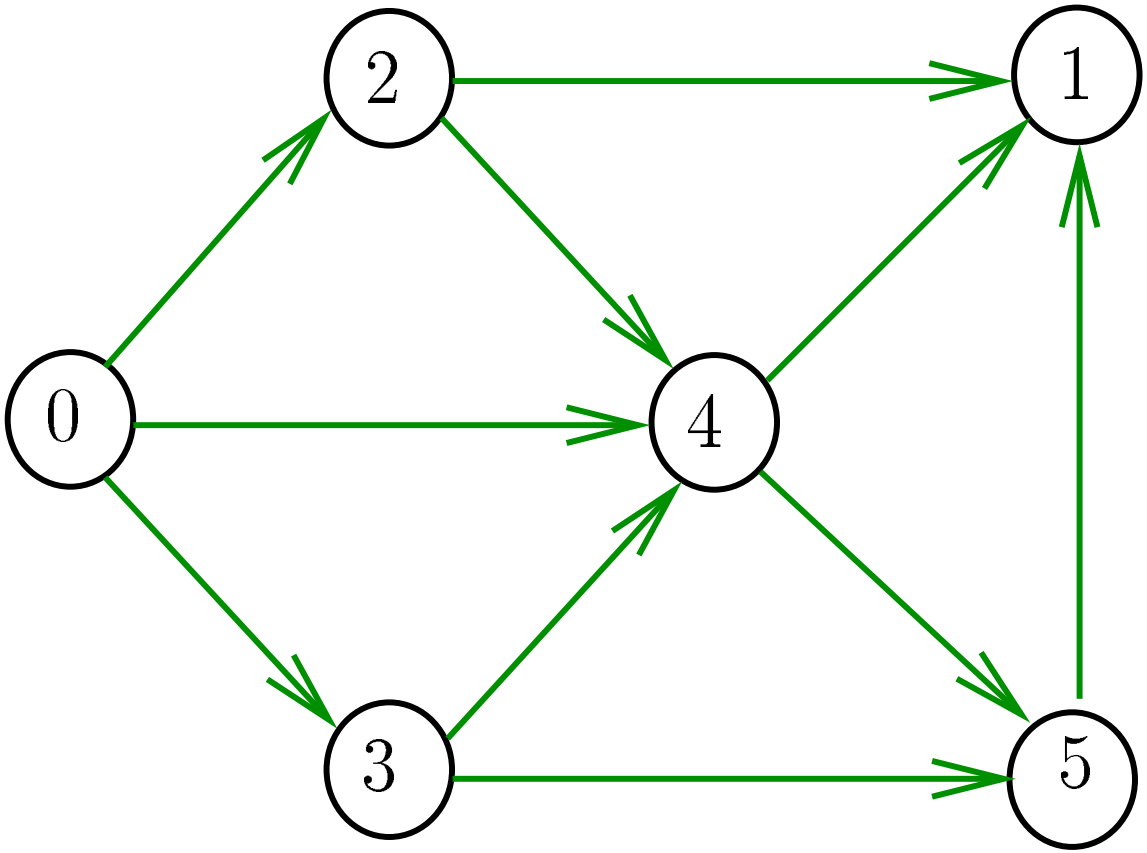
Veremos questões deste tipo freqüentemente

Elas terão um papel **suuupeeer** importante no final de MAC0338 Análise de Algoritmos

Elas estão relacionadas com o Teorema da Dualidade visto em MAC0315 Programação Linear

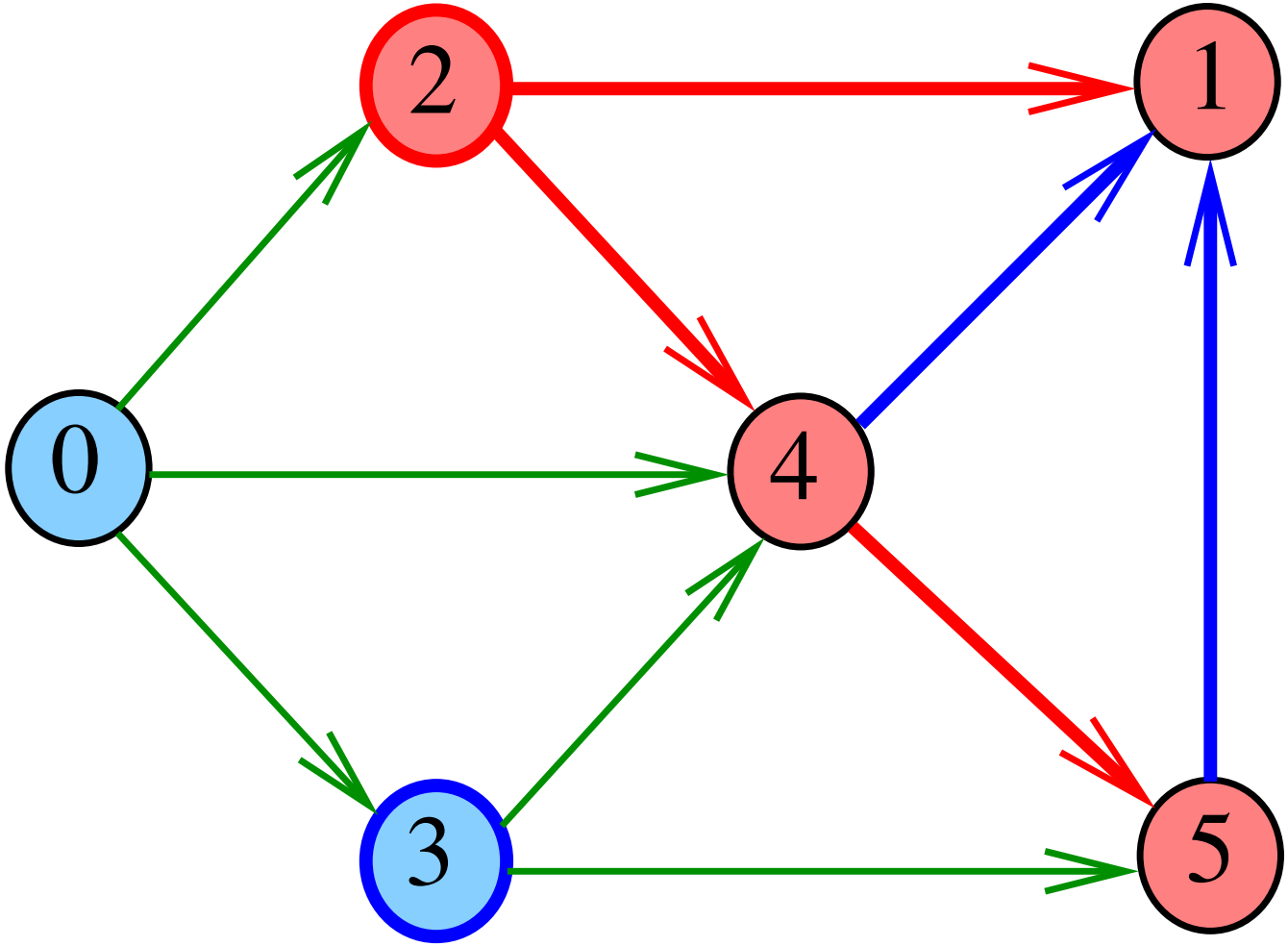
Certificado de inexistência

Como é possível demonstrar que o problema não tem solução?




```
pathR(G,2)
   2-1 pathR(G,1)
   2-4 pathR(G,4)
      4-1
      4-5 pathR(G,5)
         5-1
nao existe caminho
```

DIGRAPHpath(G,2,3)

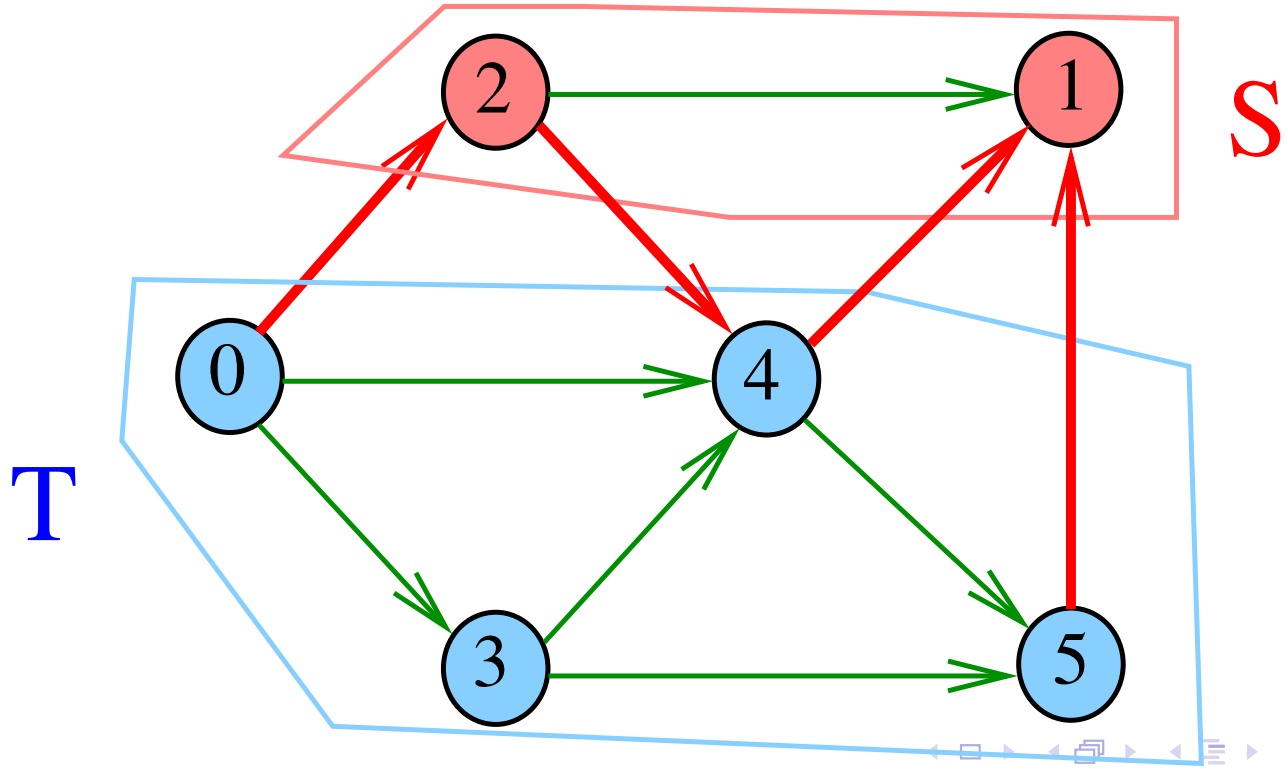


Cortes (= *cuts*)

Um **corte** é uma bipartição do conjunto de vértices

Um arco **pertence** ou **atravessa** um corte (S, T) se tiver uma ponta em S e outra em T

Exemplo 1: arcos em vermelho estão no corte (S, T)

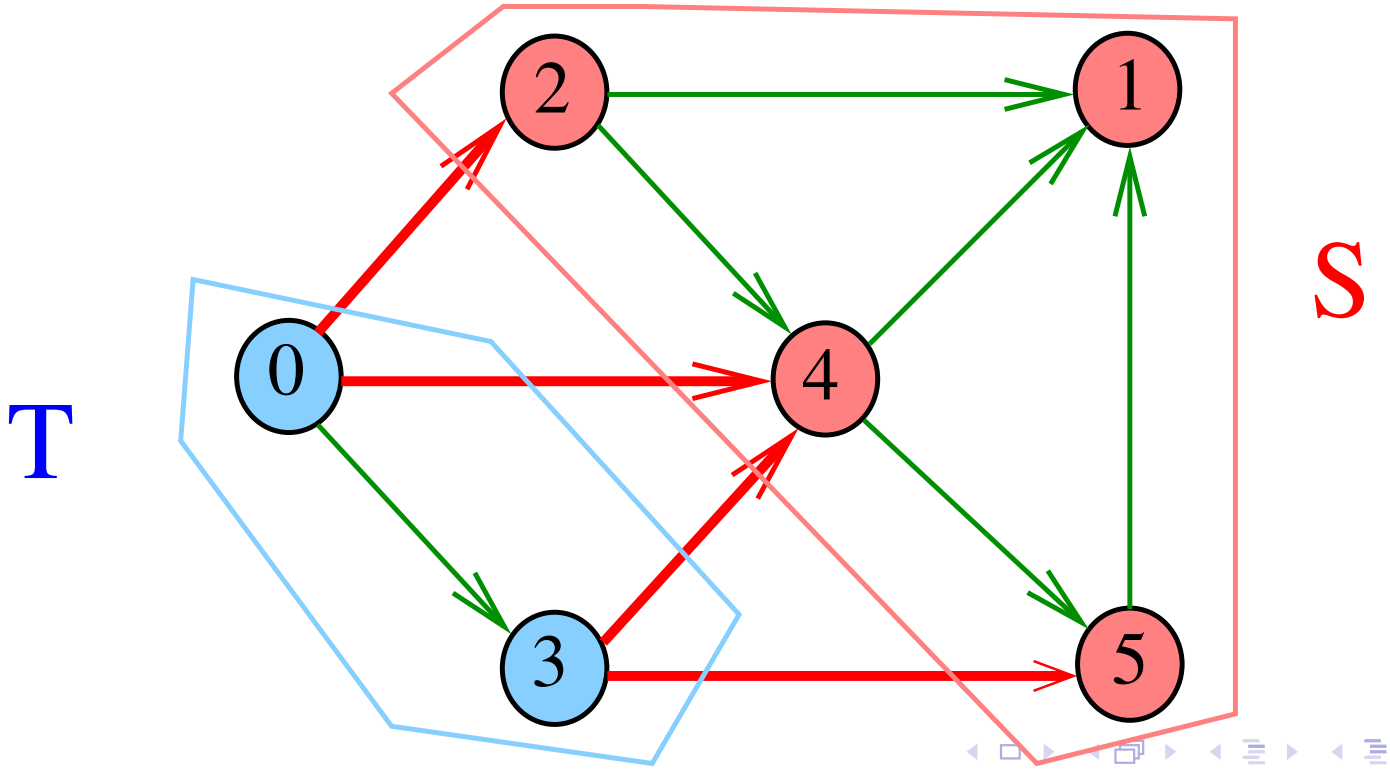


Cortes (= *cuts*)

Um **corte** é uma bipartição do conjunto de vértices

Um arco **pertence** ou **atravessa** um corte (S, T) se tiver uma ponta em S e outra em T

Exemplo 2: arcos em vermelho estão no corte (S, T)

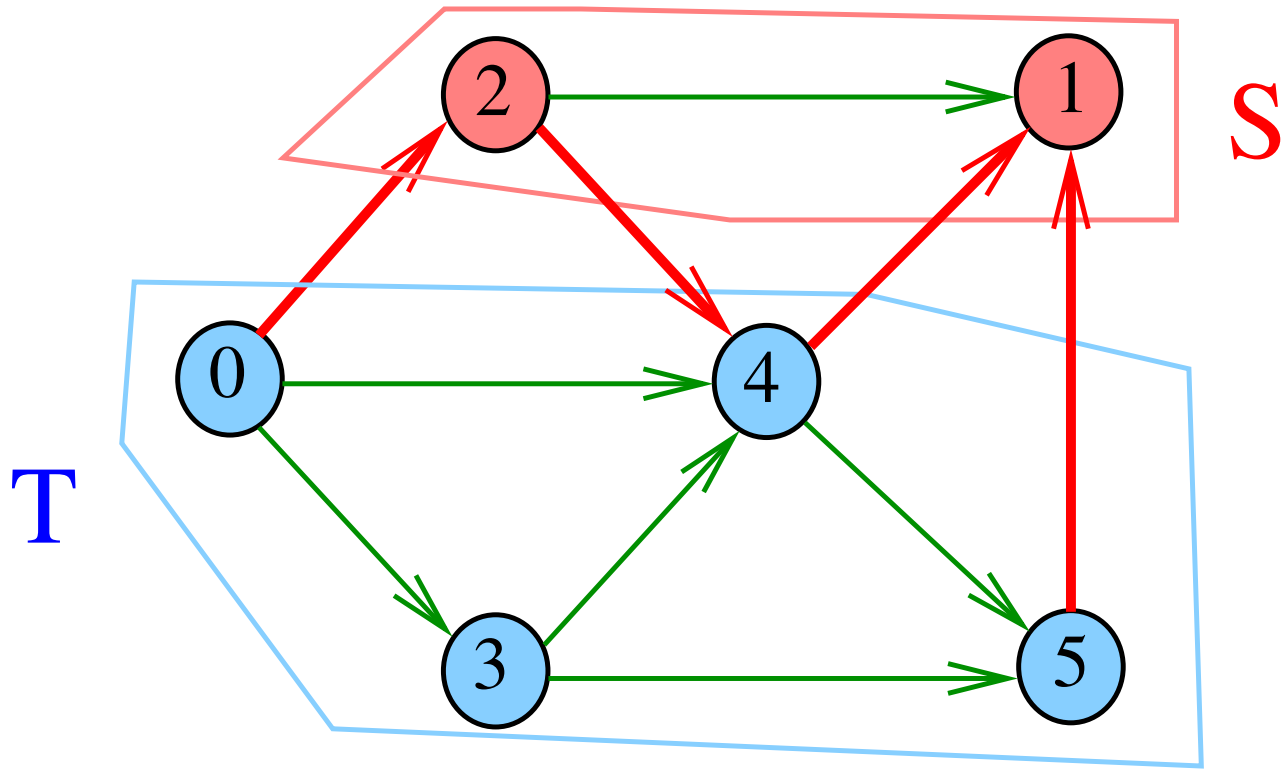


st-Cortes (= st-*cuts*)

Um corte (S, T) é um **st-corte** se

s está em S e t está em T

Exemplo: (S, T) é um 1-3-corte um 2-5-corte ...



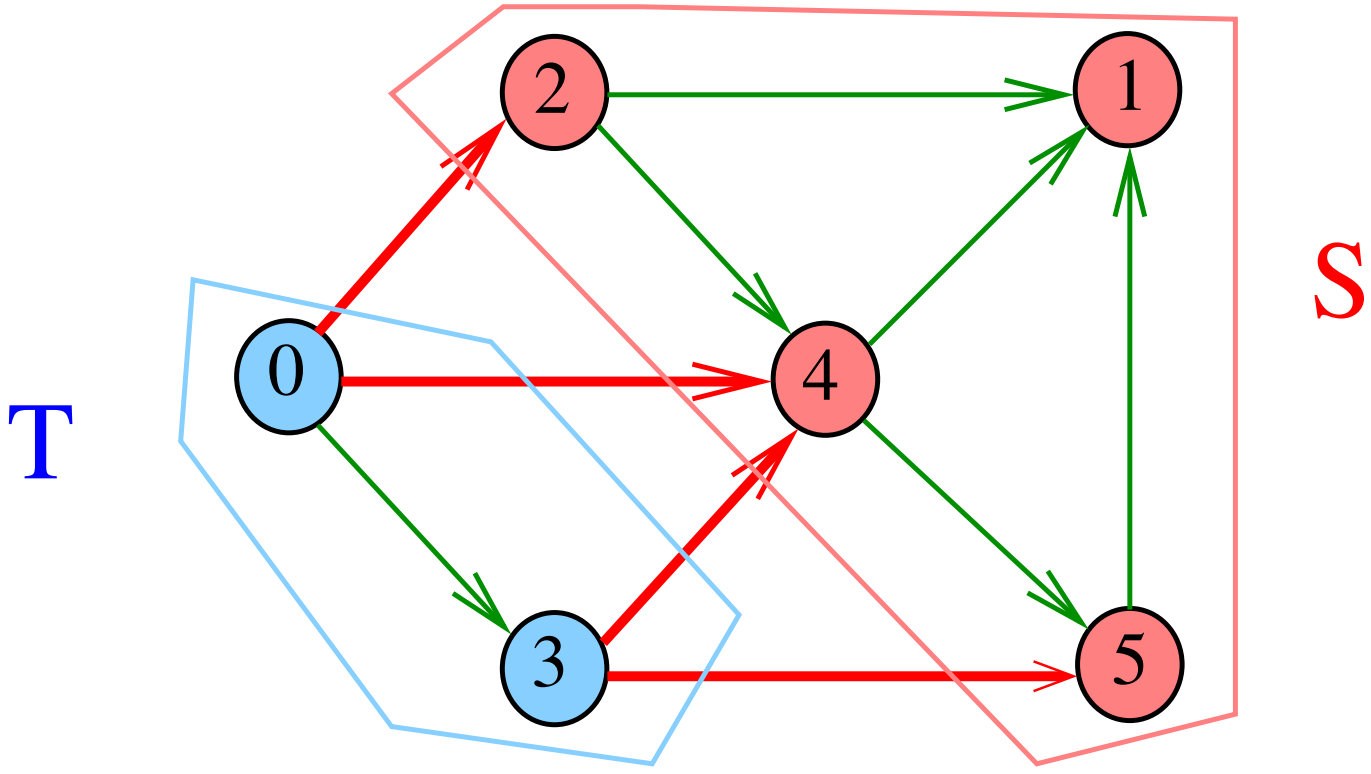
Certificado de inexistência

Para demonstrarmos que **não existe** um caminho de s a t basta exibirmos um st-corte (S, T) em que

> ***todo arco*** *no corte tem ponta inicial em* T *e ponta final em* S

Certificado de inexistência

Exemplo: certificado de que não há caminho de 2 a 3



st_corte

Verifica se lbl descreve mesmo um st-corte.
Recebe um digrafo G e vértices s e t, além do vetor lbl computado pela chamada

DIGRAPHpath(G, s,t);

A função devolve **1** se

$$S = \{v : lbl[v] = 1\}$$

$$T = \{v : lbl[v] = 0\}$$

formam st-corte (S, T) em que todo arco no corte tem ponta inicial em T e ponta final em S ou devolve **0** em caso contrário

```
int st_corte (Digraph G, Vertex s, Vertex t);
```

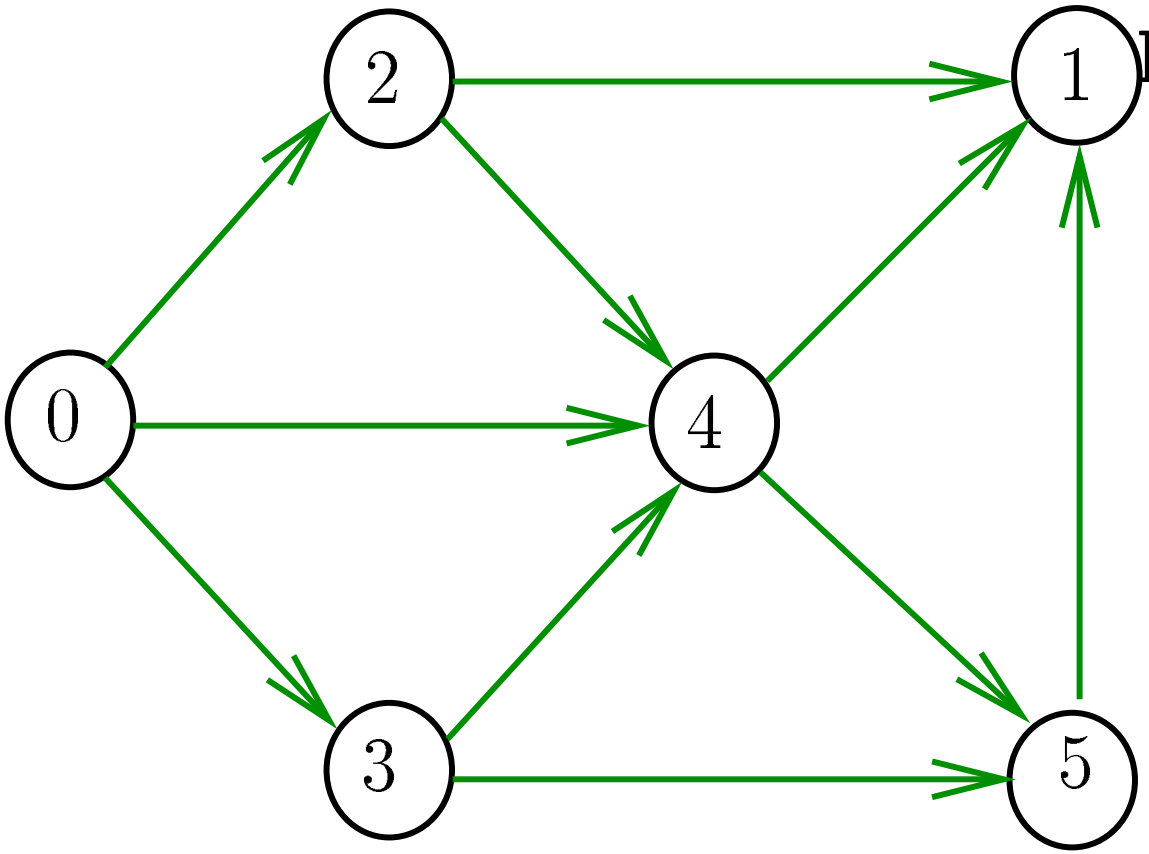
st_corte

```
int
st_corte (Digraph G, Vertex s, Vertex t) {
    Vertex v, w;
1   if (!lbl[s] || lbl[t])
2       return 0;
3   for (v = 0; v < G->V; v++)
4       for (w = 0; w < G->V; w++)
5           if (G->adj[v][w] &&
6               lbl[v] && !lbl[w] )
7               return 0;
8   return 1;
}
```

Consumo de tempo

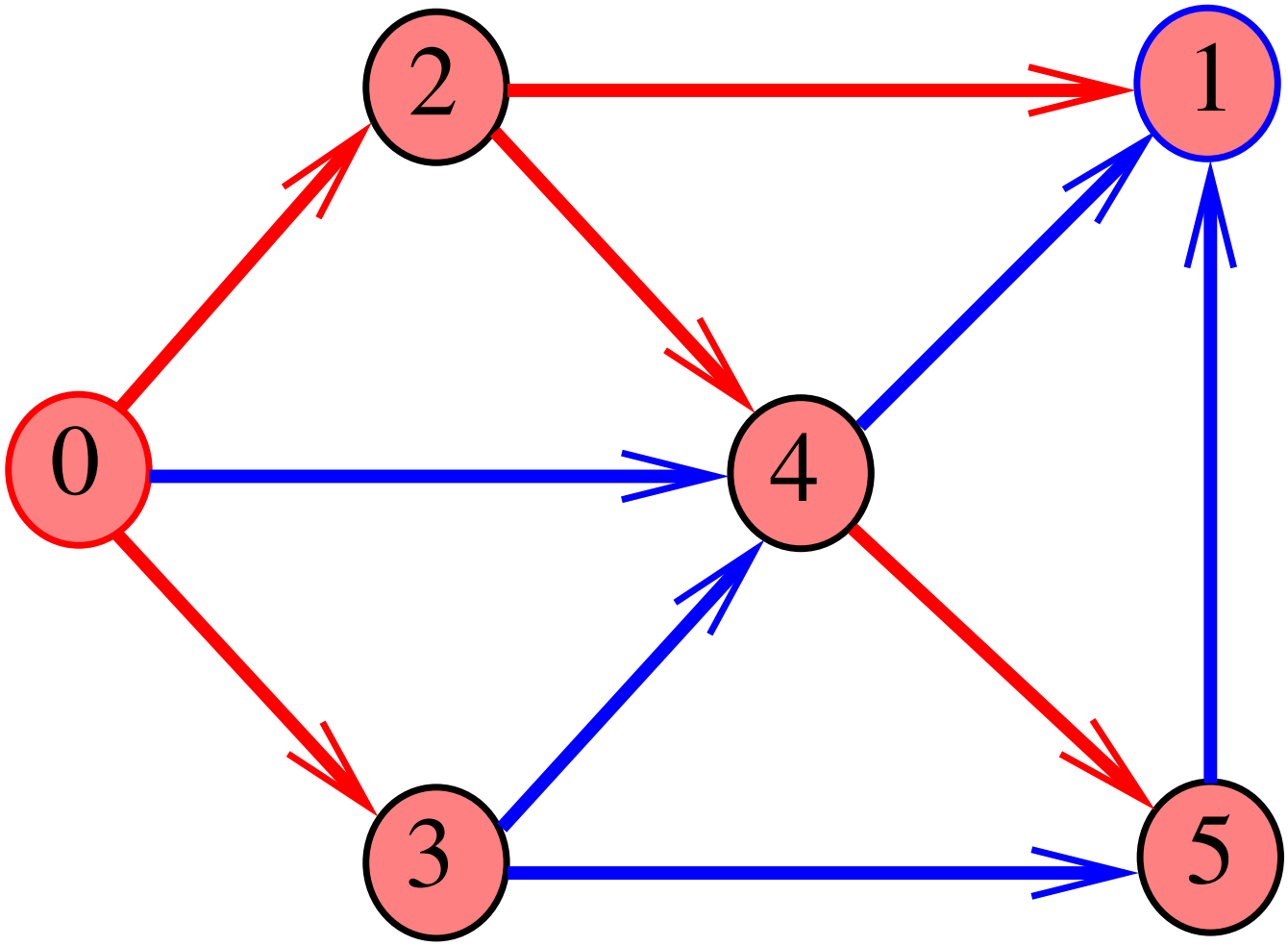
O consumo de tempo da função `st_corte` para matriz de adjacência é $O(V^2)$.

Certificado de existência




```
pathR(G,0)
  0-2 pathR(G,2)
    2-1 pathR(G,1)
    2-4 pathR(G,4)
      4-1
      4-5 pathR(G,5)
        5-1
  0-3 pathR(G,3)
    3-4
    3-5
  0-4
existe caminho
```

DIGRAPHpath(G,0,1)



Caminhos no computador

Como representar caminhos no computador?

Caminhos no computador

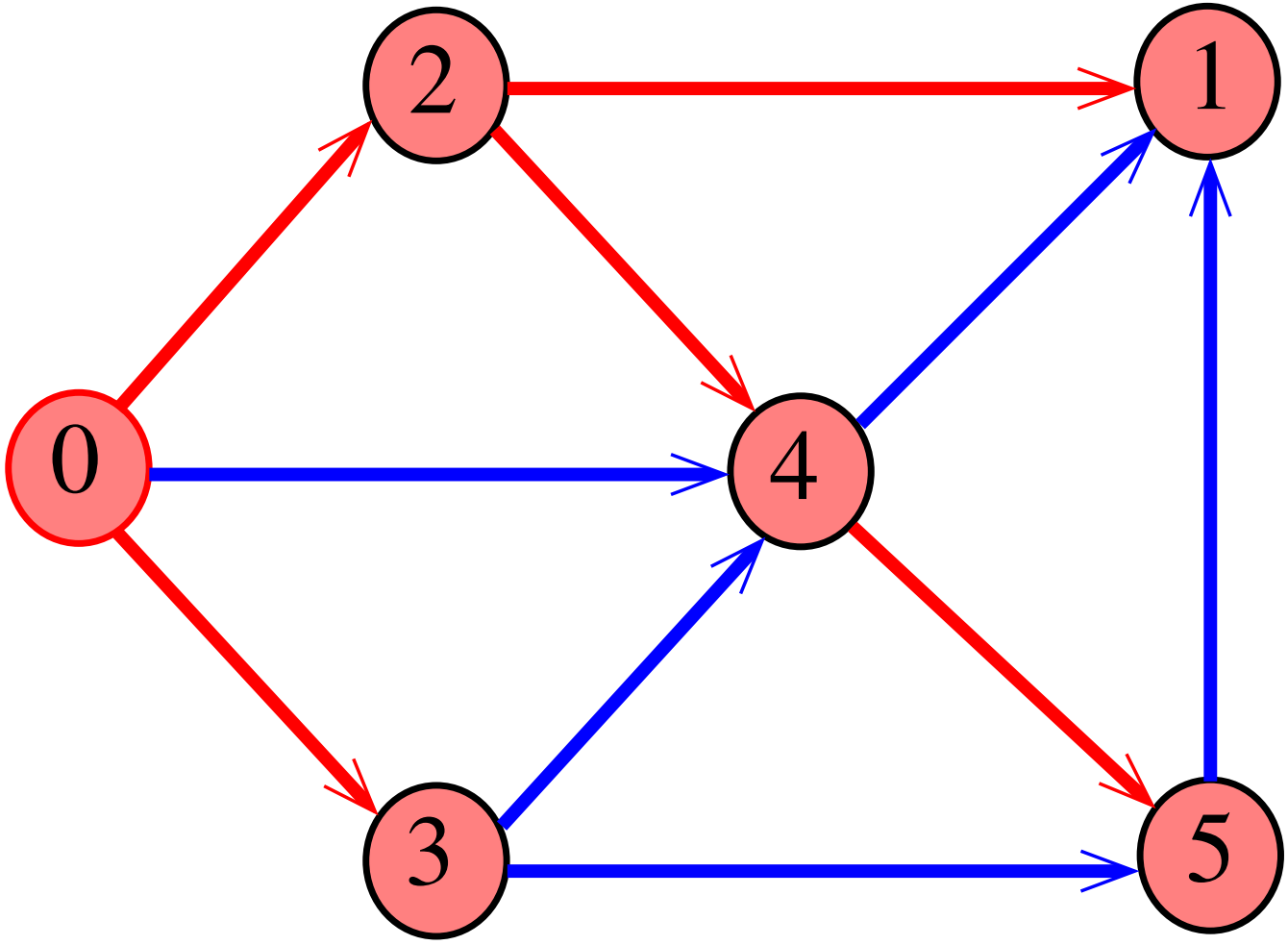
Uma maneira **compacta** de representar caminhos de um vértice a outros é uma arborescência

Uma **arborescência** é um digrafo em que

- existe exatamente um vértice com grau de entrada 0, a **raiz** da arborescência
- não existem vértices com grau de entrada maior que 1,
- cada um dos vértices é término de um caminho com origem no vértice **raiz**.

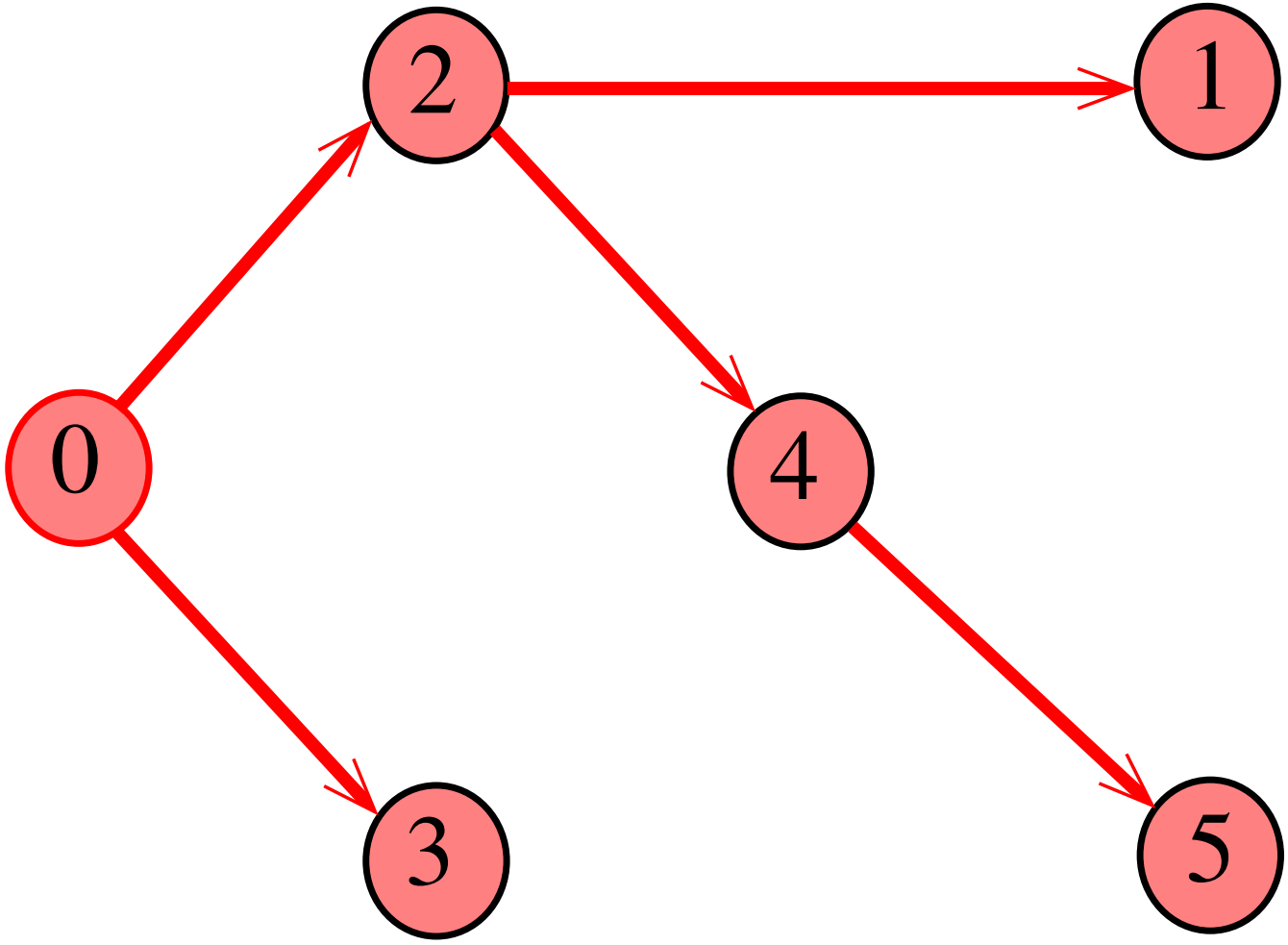
Arborescências

Exemplo: a raiz da arborescência é 0



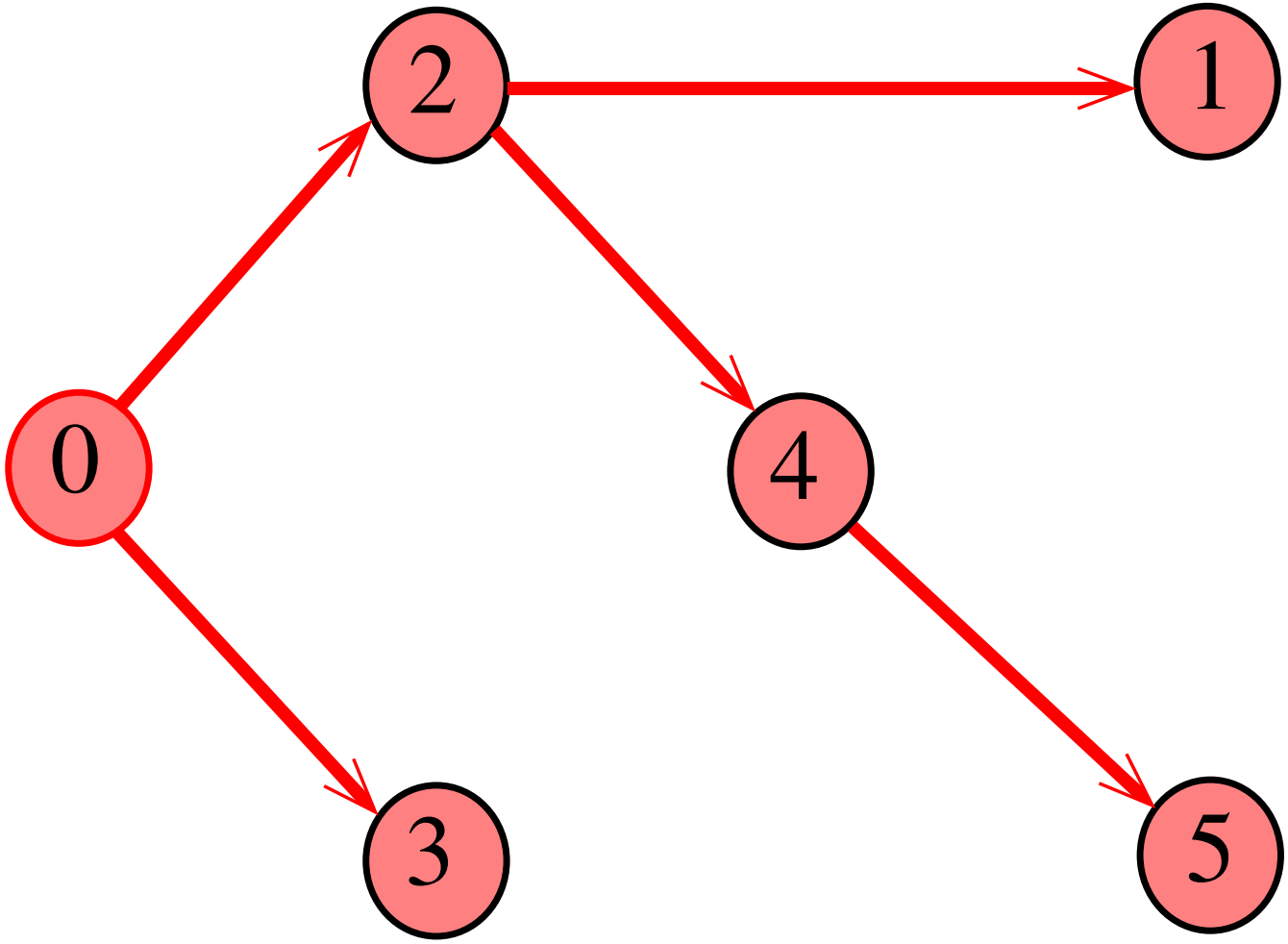
Arborescências

Exemplo: a raiz da arborescência é 0



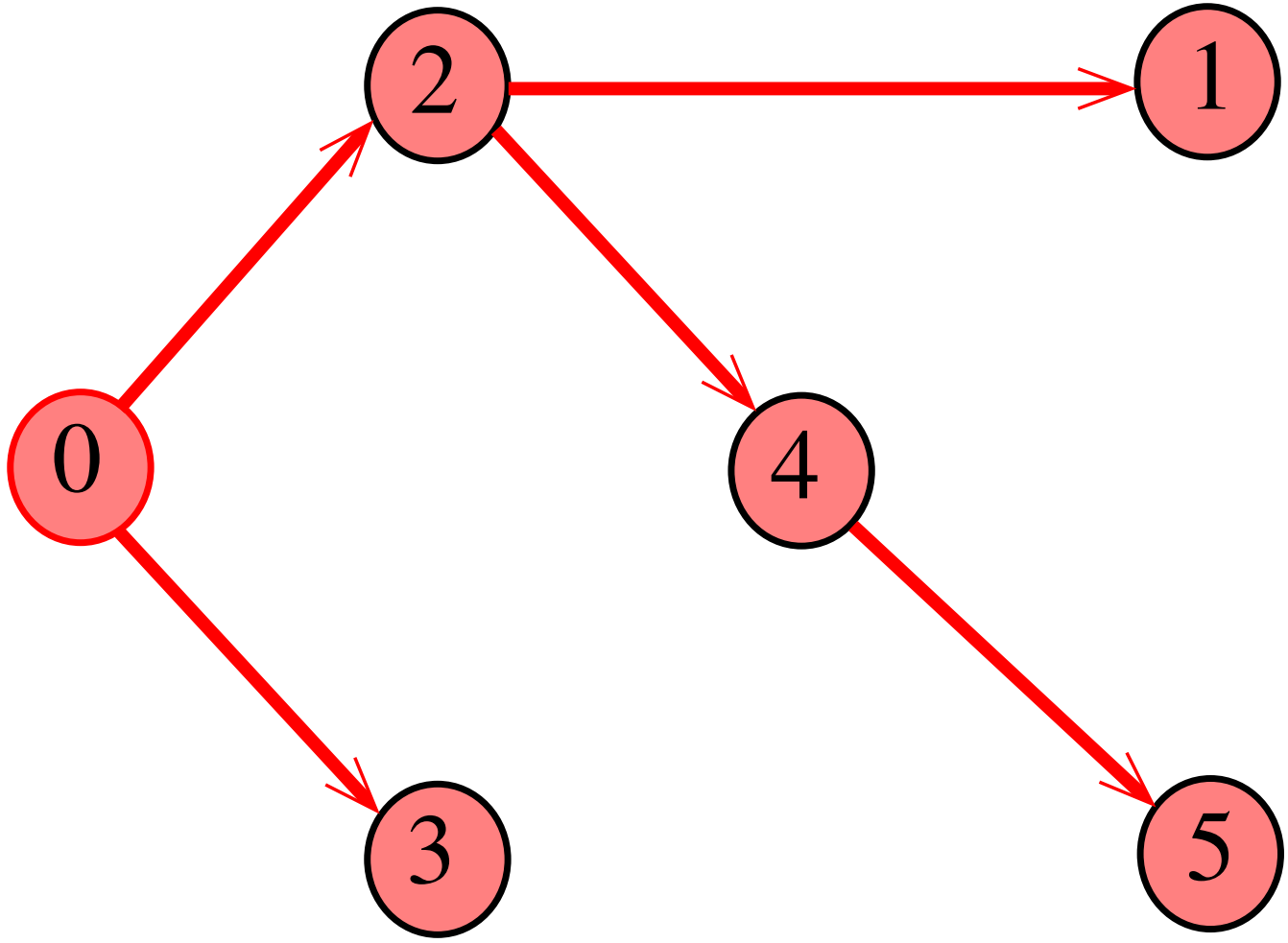
Arborescências

Propriedade: para todo vértice v, existe exatamente um caminho da raiz a v



Arborescências

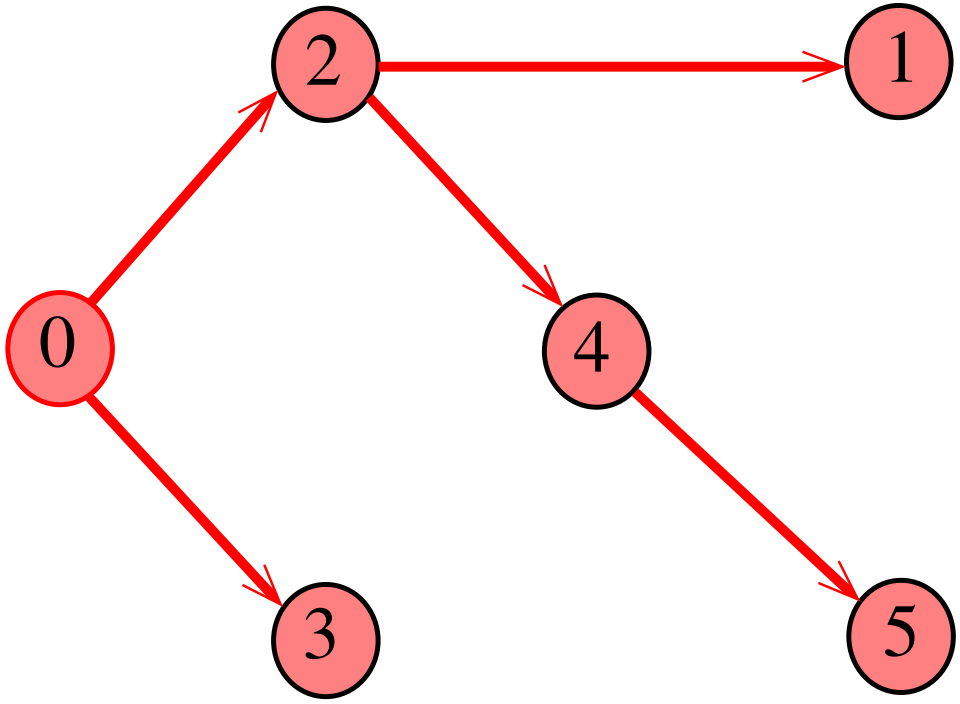
Todo vértice `w`, exceto a raiz, tem uma **pai**: o único vértice `v` tal que `v-w` é um arco



Arborescências no computador

Um arborência pode ser representada através de um **vetor de pais**: `parnt[w]` é o pai de `w`

Se `r` é a raiz, então `parnt[r]=r`



vértice	`parnt`
0	0
1	2
2	0
3	0
4	2
5	4

Caminho

Dado o vetor de pais, `parnt`, de uma arborescência, é fácil determinar o caminho que leva da raiz a um dado vértice `v`: basta inverter a seqüência impressa pelo seguinte fragmento de código:

```
    Vertex x;
1   for (x = v; parnt[x] != x; x = parnt[x])
2       printf("%d-", x);
3   printf("%d", x);
```

Caminho

Dado o vetor de pais, `parnt`, de uma arborescência, é fácil determinar o caminho que leva da raiz a um dado vértice `v`: basta inverter a seqüência impressa pelo seguinte fragmento de código:

```
    Vertex x;
1   for (x = v; parnt[x] != x; x = parnt[x])
2       printf("%d-", x);
3   printf("%d", x);
```

DIGRAPHpath

```
static int lbl[maxV], parnt[maxV];
int DIGRAPHpath (Digraph G, Vertex s, Vertex t)
{
    Vertex v;
1   for (v = 0; v < G->V; v++) {
2       lbl[v] = 0;
3       parnt[v] = -1;
4   }
5   parnt[s] = s;
6   pathR(G,s)
7   return lbl[t];
}
```

pathR

```
void pathR (Digraph G, Vertex v)
{
    Vertex w;
1   lbl[v] = 1;
2   for (w = 0; w < G->V; w++)
3       if (G->adj[v][w] && !lbl[w]) {
4               parnt[w] = v;
5               pathR(G, w);
6       }
}
```

st_caminho

Recebe um digrafo G e vértices s e t, além do vetor parnt computado pela chamada

```
DIGRAPHpath(G, s,t);
```

A função devolve **1** se

```
t-parnt[t]-parnt[parnt[t]]-...
```

é o reverso de um caminho de s a t em G ou devolve **0** em caso contrário

```
int st_caminho (Digraph G, Vertex s, Vertex t);
```

st_caminho

```
int
st_caminho (Digraph G, Vertex s, Vertex t) {
    Vertex v, w;
1   if (parnt[t] == -1 || parnt[s] != s)
2       return 0;
3   for (w = t; w != s; w= v) {
4       v= parnt[w];
5       if (!G->adj[v][w]) return 0;
    }
6   return 1;
}
```

Consumo de tempo

Qual é o consumo de tempo da função `st_caminho`?

linha	número de execuções da linha	
1	$= 1$	$= \Theta(1)$
2	≤ 1	$= \mathrm{O}(1)$
3	$\leq \mathrm{V}$	$= \mathrm{O}(\mathrm{V})$
4	$\leq \mathrm{V}$	$= \mathrm{O}(\mathrm{V})$
5	$\leq \mathrm{V}$	$= \mathrm{O}(\mathrm{V})$
6	≤ 1	$= \mathrm{O}(1)$
total	$= \Theta(1) + 2\,\mathrm{O}(1) + 3\,\mathrm{O}(\mathrm{V})$	
	$= \mathrm{O}(\mathrm{V})$	

Consumo de tempo

Qual é o consumo de tempo da função `st_caminho`?

linha	número de execuções da linha	
1	$= 1$	$= \Theta(1)$
2	≤ 1	$= \mathrm{O}(1)$
3	$\leq \mathtt{V}$	$= \mathrm{O}(\mathtt{V})$
4	$\leq \mathtt{V}$	$= \mathrm{O}(\mathtt{V})$
5	$\leq \mathtt{V}$	$= \mathrm{O}(\mathtt{V})$
6	≤ 1	$= \mathrm{O}(1)$

$$\begin{aligned} \text{total} &= \Theta(1) + 2\,\mathrm{O}(1) + 3\,\mathrm{O}(\mathtt{V}) \\ &= \mathrm{O}(\mathtt{V}) \end{aligned}$$

Consumo de tempo

O consumo de tempo da função `st_caminho` é $O(V)$.

Conclusão

Para quaisquer vértices s e t de um digrafo, vale uma e apenas umas das seguintes afirmações:

- existe um caminho de s a t
- existe st-corte (S, T) em que todo arco no corte tem ponta inicial em T e ponta final em S.