

S 17.1

Esta versão para assim que encontra t

```
static int lbl[maxV];
int DIGRAPHpath (Digraph G, Vertex s, Vertex t)
{
    Vertex v;
1   for (v = 0; v < G->V; v++)
2       lbl[v] = 0;
3   return pathR(G, s, t);
}
```

pathR

Para assim que encontra t

```
int pathR (Digraph G, Vertex v, Vertex t) {
    Vertex w;
0   lbl[v] = 1;
1   if (v == t) return 1;
2   for (w = 0; w < G->V; w++)
3       if (G->adj[v][w] && !lbl[w])
4           if (pathR(G, w, t))
5               return 1;
6   return 0;
}
```

Problema

Como alterar `DIGRAPHpath` para devolver um caminho, quando existir?

Qual a ED para devolver o caminho?

Seria o caso de alterar `DIGRAPHpath` para computar um pouco mais de informação?

E o que fazer quando não há caminho: como convencer alguém?

Certificados

Cortes e arborescências

S páginas 84,91,92, 373

Certificados

Como é possível 'verificar' a resposta?

Como é possível 'verificar' que **existe** caminho?

Como é possível 'verificar' que **não existe** caminho?

Veremos questões deste tipo freqüentemente

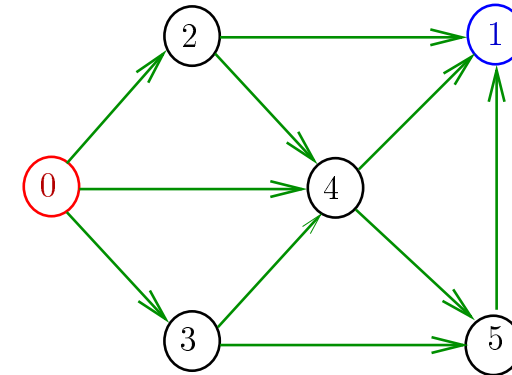
Elas terão um papel **suuuper** importante no final de [MAC0338 Análise de Algoritmos](#)

Elas estão relacionadas com o **Teorema da Dualidade** visto em [MAC0315 Programação Linear](#)

Procurando um caminho

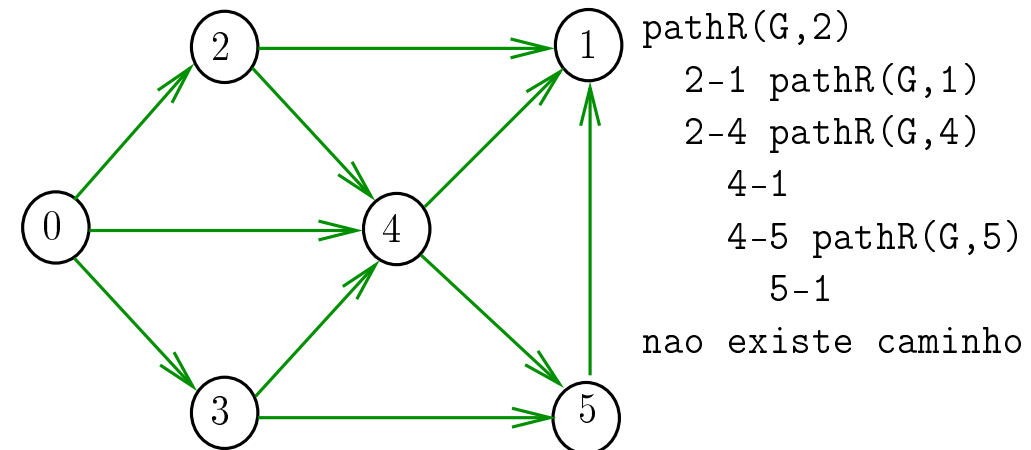
Problema: dados um digrafo G e dois vértices s e t decidir se existe um caminho de s a t

Exemplo: para $s = 0$ e $t = 1$ a resposta é SIM

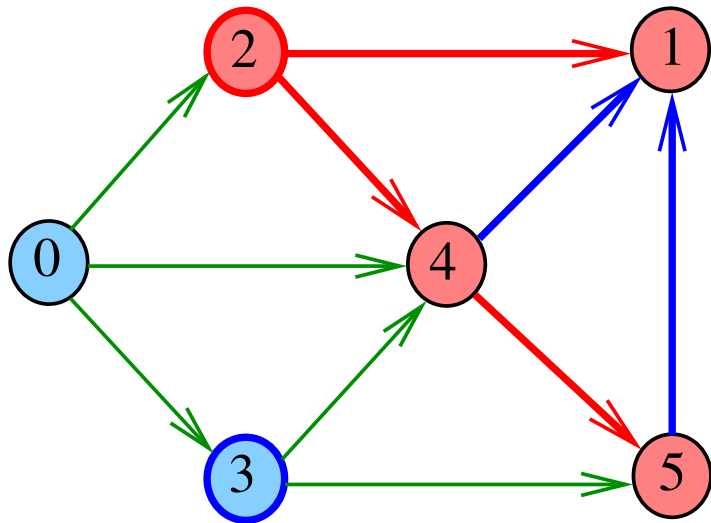


Certificado de inexistência

Como é possível demonstrar que o problema não tem solução?



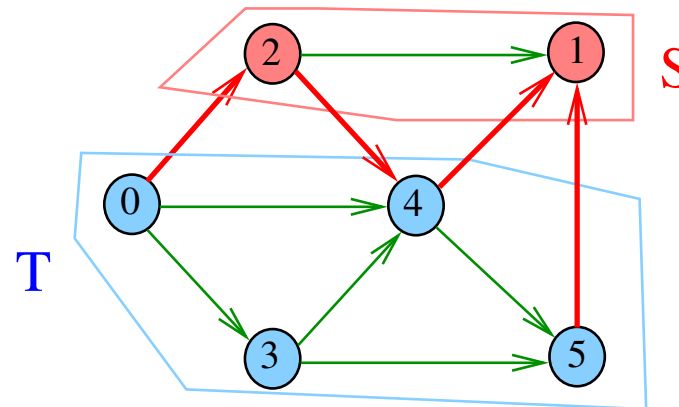
DIGRAPH_{path}(G, 2, 3)



Cortes (= cuts)

Um **corte** é uma bipartição do conjunto de vértices
Um arco **pertence** ou **atravessa** um corte (S, T) se tiver uma ponta em S e outra em T

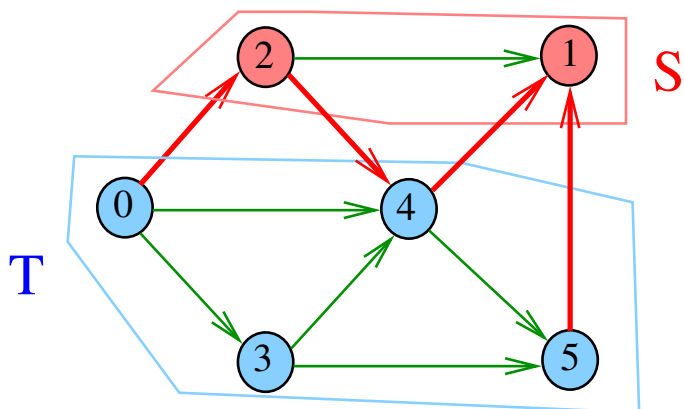
Exemplo 1: arcos em **vermelho** estão no corte (S, T)



st-Cortes (= st-cuts)

Um corte (S, T) é um **st-corte** se
 s está em S e t está em T

Exemplo: (S, T) é um 1-3-corte um 2-5-corte ...



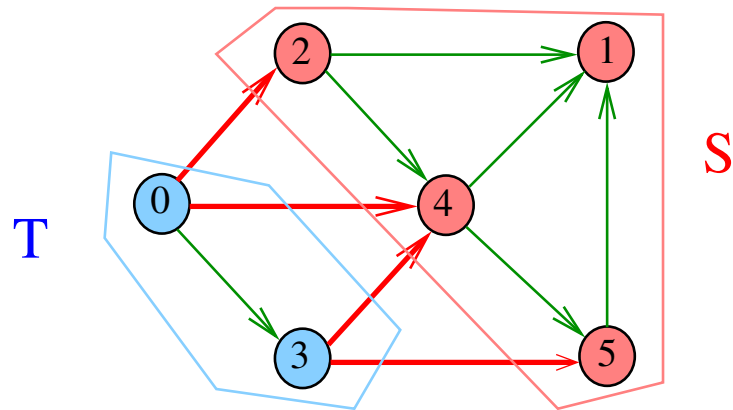
Certificado de inexistência

Para demonstrarmos que **não existe** um caminho de s a t basta exibirmos um **st-corte** (S, T) em que

todo arco no corte tem ponta inicial em T e ponta final em S

Certificado de inexistência

Exemplo: certificado de que não há caminho de 2 a 3



st_corte

Verifica se `lbl` descreve mesmo um `st`-corte.

Recebe um digrafo `G` e vértices `s` e `t`, além do vetor `lbl` computado pela chamada

```
DIGRAPHpath(G, s, t);
```

A função devolve `1` se

$$S = \{v : lbl[v] = 1\}$$
$$T = \{v : lbl[v] = 0\}$$

formam `st`-corte (S, T) em que todo arco no corte tem ponta inicial em `T` e ponta final em `S` ou devolve `0` em caso contrário

```
int st_corte (Digraph G, Vertex s, Vertex t);
```

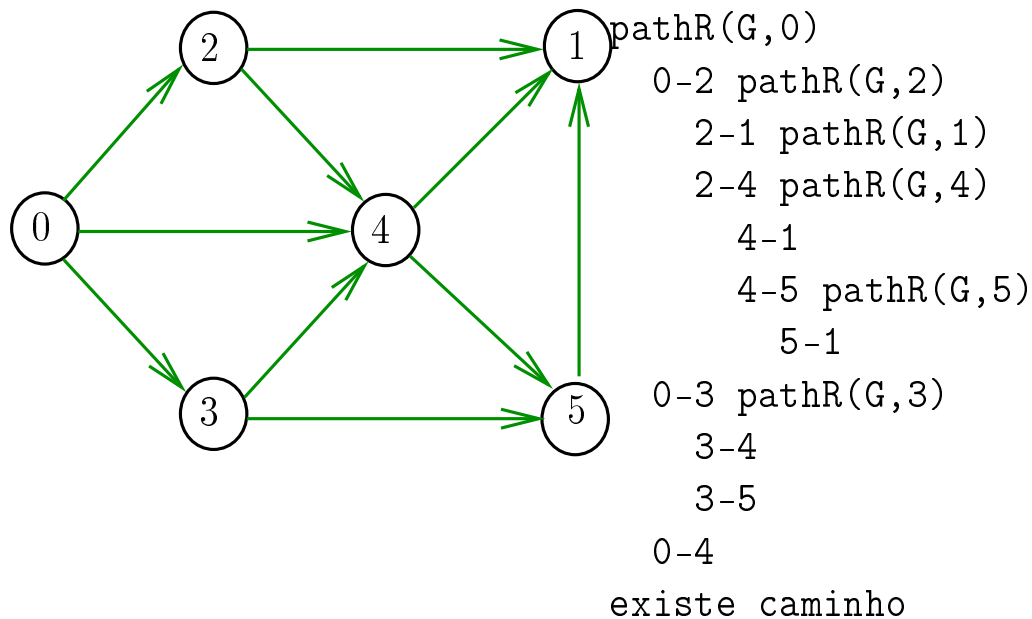
st_corte

```
int
st_corte (Digraph G, Vertex s, Vertex t) {
    Vertex v, w;
1  if (!lbl[s] || lbl[t])
2      return 0;
3  for (v = 0; v < G->V; v++)
4      for (w = 0; w < G->V; w++)
5          if (G->adj[v][w] &&
6              lbl[v] && !lbl[w])
7              return 0;
8  return 1;
}
```

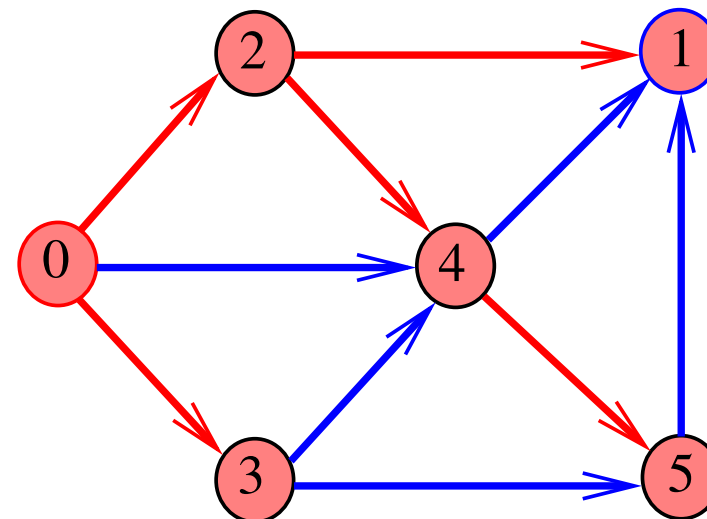
Consumo de tempo

O consumo de tempo da função `st_corte` para matriz de adjacência é $O(V^2)$.

Certificado de existência



DIGRAPH $\text{path}(G, 0, 1)$



Caminhos no computador

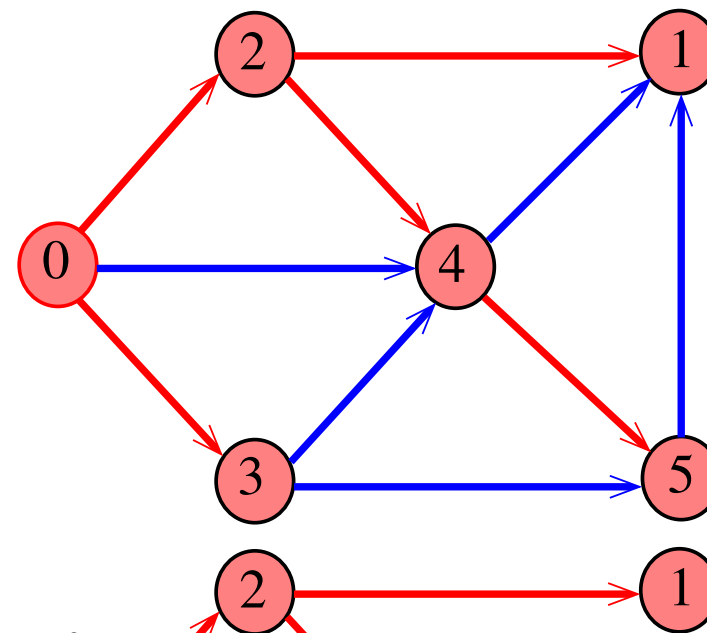
Como representar **caminhos** no computador?
 Uma maneira **compacta** de representar caminhos de um vértice a outros é uma arborescência

Uma **arborescência** é um digrafo em que

- existe exatamente um vértice com grau de entrada 0, a **raiz** da arborescência
- não existem vértices com grau de entrada maior que 1,
- cada um dos vértices é término de um caminho com origem no vértice **raiz**.

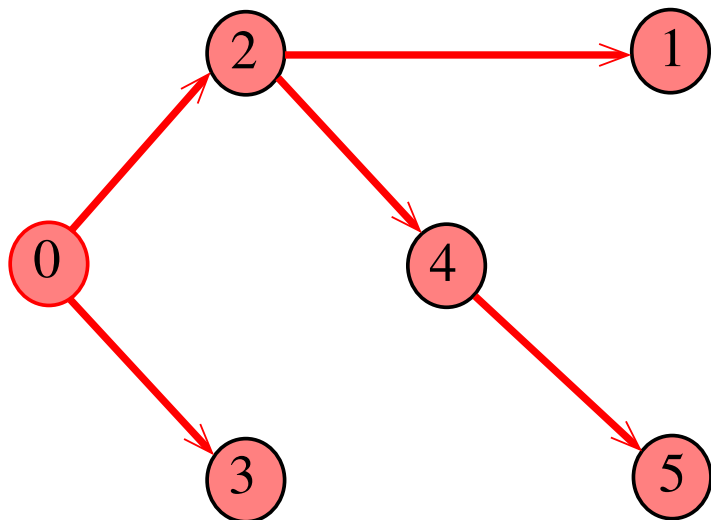
Arborescências

Exemplo: a raiz da arborescência é 0



Arborescências

Propriedade: para todo vértice v , existe exatamente um **caminho** da raiz a v



Todo vértice w , exceto a raiz, tem uma **pai**: o único

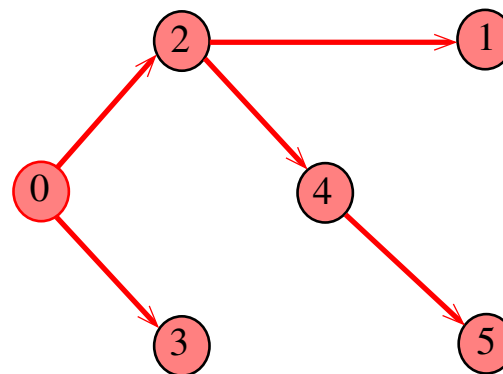
Caminho

Dado o vetor de pais, **parnt**, de uma arborescência, é fácil determinar o caminho que leva da **raiz** a um dado vértice v : **basta inverter** a seqüência impressa pelo seguinte fragmento de código:

```
Vertex x;  
1 for (x = v; parnt[x] != x; x = parnt[x])  
2     printf("%d-", x);  
3 printf("%d", x);
```

Arborescências no computador

Um arborência pode ser representada através de um **vetor de pais**: $\text{parnt}[w]$ é o pai de w
Se r é a raiz, então $\text{parnt}[r]=r$



vértice	parnt
0	0
1	2
2	0
3	0
4	2
5	4

DIGRAPHpath

```
static int lbl[maxV], parnt[maxV];  
int DIGRAPHpath (Digraph G, Vertex s, Vertex t)  
{  
    Vertex v;  
    1 for (v = 0; v < G->V; v++) {  
    2     lbl[v] = 0;  
    3     parnt[v] = -1;  
    4 }  
    5 parnt[s] = s;  
    6 pathR(G, s)  
    7 return lbl[t];  
}
```

pathR

```

void pathR (Digraph G, Vertex v)
{
    Vertex w;
    1  lbl[v] = 1;
    2  for (w = 0; w < G->V; w++)
    3      if (G->adj[v][w] && !lbl[w]) {
    4          parnt[w] = v;
    5          pathR(G, w);
    6      }
}

```

st_caminho

Recebe um digrafo G e vértices s e t , além do vetor `parnt` computado pela chamada

```
DIGRAPHpath(G, s, t);
```

A função devolve **1** se

```
t-parnt[t]-parnt[parnt[t]]-...
```

é o reverso de um caminho de s a t em G ou devolve **0** em caso contrário

```
int st_caminho (Digraph G, Vertex s, Vertex t);
```

st_caminho

```

int
st_caminho (Digraph G, Vertex s, Vertex t) {
    Vertex v, w;
    1  if (parnt[t] == -1 || parnt[s] != s)
    2      return 0;
    3  for (w = t; w != s; w = v) {
    4      v = parnt[w];
    5      if (!G->adj[v][w]) return 0;
    6  }
    7  return 1;
}

```

Consumo de tempo

Qual é o consumo de tempo da função `st_caminho`?

linha	número de execuções da linha	
1	= 1	= $\Theta(1)$
2	≤ 1	= $O(1)$
3	$\leq V$	= $O(V)$
4	$\leq V$	= $O(V)$
5	$\leq V$	= $O(V)$
6	≤ 1	= $O(1)$

```

total =  $\Theta(1) + 2 O(1) + 3 O(V)$ 
        =  $O(V)$ 

```

O consumo de tempo da função `st_caminho` é $O(V)$.

Para quaisquer vértices `s` e `t` de um digrafo, vale uma e apenas uma das seguintes afirmações:

- existe um caminho de `s` a `t`
- existe `st`-corte (S, T) em que todo arco no corte tem ponta inicial em `T` e ponta final em `S`.