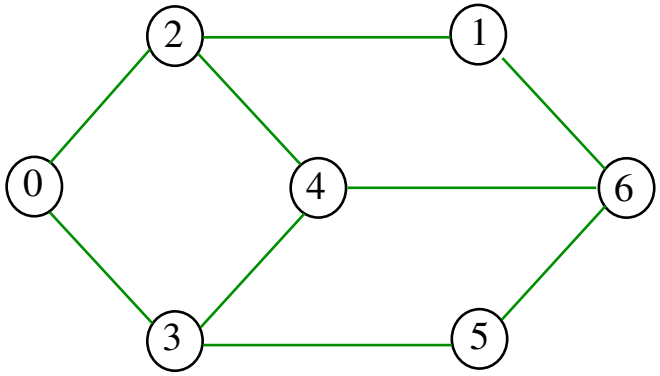
Grafos bipartidos e ciclos ímpares

S 18.5

Bipartição

Um grafo é **bipartido** (= *bipartite*) se existe uma divisão do seu conjunto de vértices em duas partes (uma *bipartição*) tal que cada aresta tem uma ponta em uma das partes da bipartição e a outra ponta na outra parte.Exemplo:



Florestas e bipartições

Teorema 1.
Toda floresta é um grafo bipartido.

Prova: Basta mostrar que toda árvore é.

Escolha um vértice v, e, para todo vértice w, faça:

$$\texttt{cor}[\texttt{w}] = \mathit{dist}(\texttt{v}, \texttt{w}) \bmod 2.$$

Se u e w são adjacentes, o caminho de v ao mais distante passa pelo mais mais próximo e usa a aresta. Assim,as distâncias a v diferem de 1, e eles têm cores diferentes.

GRAPHtwocolor

Problema: Decidir se um grafo dado é bipartido.

Idéia: Colorir uma floresta maximal (por exemplo, usando DFS). Se der certo, deu; se não...

Quem sabe aparece um certificado de que não é bipartido.

GRAPHtwocolor

Supomos que nossos grafos têm no máximo maxV vértices

```
int color[maxV];
```

A função devolve **1** se o grafo G é bipartido e devolve **0** em caso contrário

Se G é bipartido, a função atribui uma "cor" a cada vértice de G de tal forma que toda aresta tenha pontas de cores diferentes

As cores dos vértices, 0 e 1, são registradas no vetor color indexado pelos vértices

```
int GRAPHtwocolor (Graph G);
```


GRAPHtwocolor

```
   int GRAPHtwocolor (Graph G) {
   Vertex v ;
1  for (v = 0; v < G->V; v++)
2      color[v] = -1;
3  for (v = 0; v < G->V; v++)
4      if (color[v] == -1)
5          if (dfsRclr(G,v,0)== 0)
6              return 0;
7  return 1;
   }
```


dfsRclr

```
   int dfsRclr(Graph G, Vertex v, int c){
   link p;
1  color[v] = c;
2  for (p = G->adj[v]; p; p = p->next) {
3      Vertex w = p->w;
4      if (color[w] == c ||  /*ciclo ímpar*/
5        color[w]==-1 && !dfsRclr(G,w,1-c))
6        return 0;
   }
7  return 1;
   }
```


Consumo de tempo

O consumo de tempo da função GRAPHtwocolor para vetor de listas de adjacência é $O(V + A)$.

Conclusão

Para todo grafo G, vale uma e apenas umas das seguintes afirmações:

- G possui um ciclo ímpar
- G é bipartido

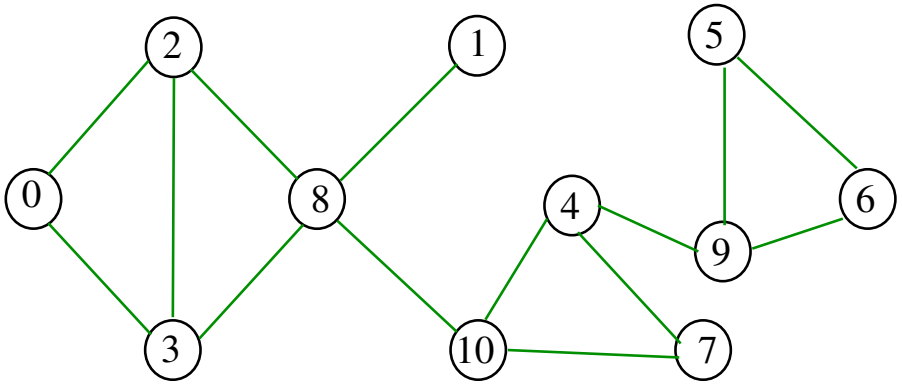
Pontes em grafos e aresta-biconexão

S 18.6

Pontes em grafos

Uma aresta de um grafo é uma **ponte** (= *bridge* = *separation edge*) se ela é a única aresta que atravessa algum corte do grafo.

Exemplo:



Exemplo: as arestas em vermelho são pontes

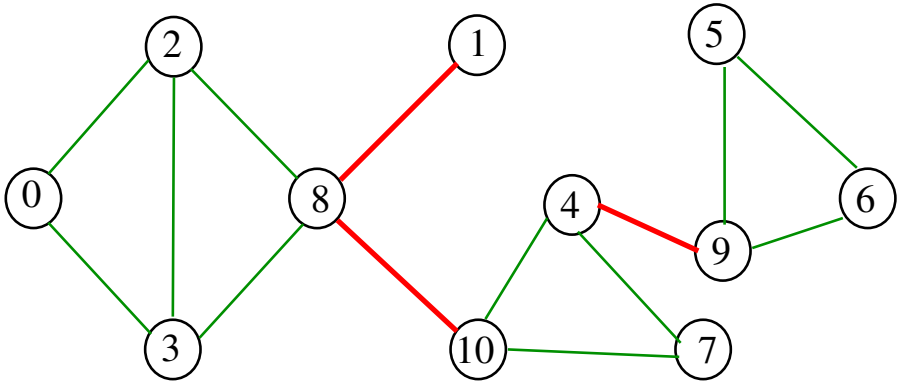
Pontes em grafos

Uma aresta é ponte se e só se não está em nenhum ciclo não trivial.

Procurando pontes

Problema: encontrar as pontes de um grafo dado

Exemplo: as arestas em vermelho são pontes



all_bridges1

Recebe um grafo G e calcula o número bcnt de pontes do grafo G e imprime todas as pontes.

void all_bridges1 (Graph G);

Primeiro algoritmo

```
void all_bridges1 (Graph G) {
    Vertex v, w; link p;
 1   for (v = 0; v < G->V; v++)
 2       for(p = G->adj[v]; p; p = p->next){
 3           w = p ->w;
 4           if (v < w) {  /* cada aresta uma vez */
 5               GRAPHremoveA(G,w,v);
 6               if( !DIGRAPHpath(G,w,v)) {
 7                   bcnt++;
 8                   output(v, w);
                 }
 9               GRAPHinsertA(G,w,v);
           }
       }
    }
}
```


Consumo de tempo

O consumo de tempo da função all_bridges1 é A/2 vezes o consumo de tempo da função DIGRAPHpath.

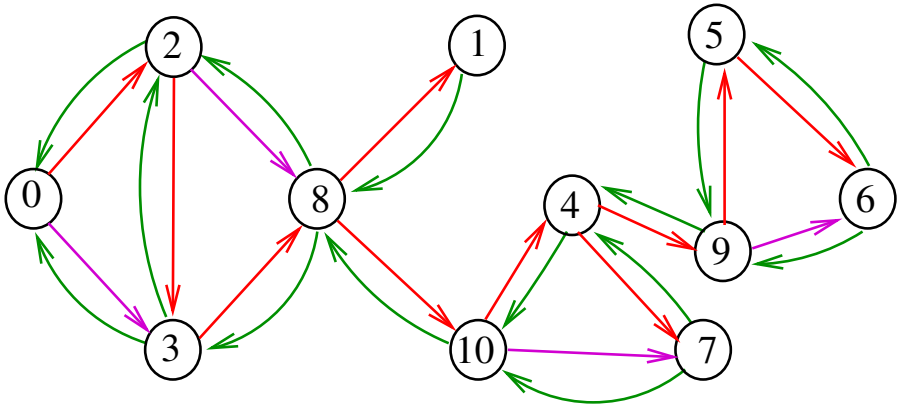
O consumo de tempo da função all_bridges1 para vetor de listas de adjacência é $O(A(V + A))$.

O consumo de tempo da função all_bridges1 para matriz de adjacência é $O(AV^2)$.

Pontes e busca em profundidade

Em uma floresta DFS, um dos dois arcos de cada ponte será um arco da arborescência

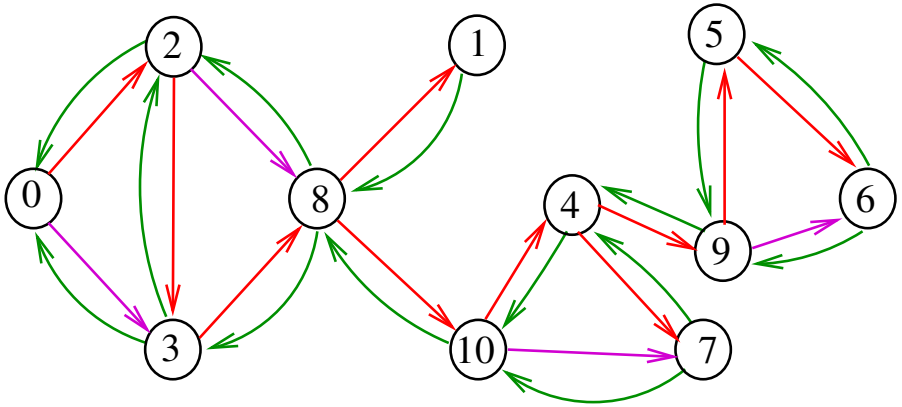
Exemplo: arcos em vermelho são da arborescência



Exemplo: arcos em vermelho são da arborescência

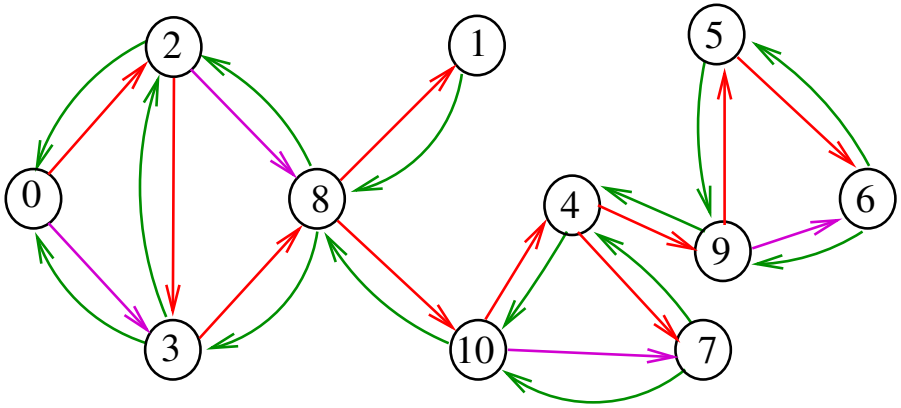
Propriedade

Um arco v-w da floresta DFS faz parte (juntamente com w-v) de uma ponte se e somente se não existe arco de retorno que ligue um descendente de w a um ancestral de v



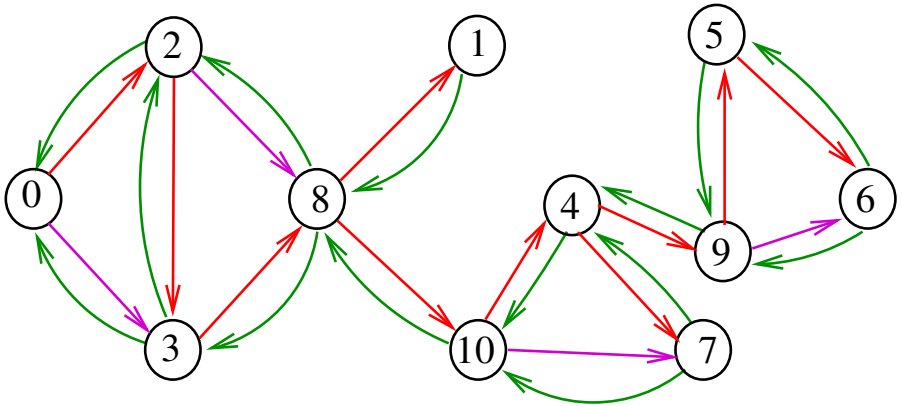
Numeração em ordem de descoberta (pré-ordem)

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
pre[v]	0	**4**	1	2	6	8	9	10	3	**7**	**5**



Lowest Preorder Number

O menor **número de pré-ordem** que pode ser alcançado por v utilizando arcos da arborescência e **até um** arco de retorno ("arco-pai" não vale) será denotado por low[v]



Observações

Para todo vértice v,

$$\texttt{low[v]} \leq \texttt{pre[v]}$$

Para todo arco v-w do grafo

- se v-w é um arco de **arborescência** então

$$\texttt{low[v]} \leq \texttt{low[w]};$$

- se v-w é uma arco de **retorno**, então

$$\texttt{low[v]} \leq \texttt{pre[w]}.$$

Cálculo de low[v]

Para todo vértice v,

low[v] é o mínimo de

- pre[w], v-w é um arco de **retorno**
- low[w], w é descendente de v v–w está na arborescência da DFS

Algoritmo das pontes

Em qualquer floresta de busca em profundidade de um grafo, um arco de arborescência v-w faz parte de uma ponte se e somente se low[w] == pre[w]

```
static int cnt, pre[maxV], bcnt, low[maxV];
static int parnt[maxV];
```

A função abaixo calcula o número bcnt de pontes do grafo G e imprime todas as pontes

```
void all_bridges (Graph G);
```


all_bridges

```
   void all_bridges (Graph G) {
   Vertex v;
1  cnt = bcnt = 0;
2  for (v = 0; v < G->V; v++)
3      pre[v] = -1;
4  for (v = 0; v < G->V; v++)
5      if (pre[v] == -1) {
6          parnt[v] = v;
7          bridgeR(G, v);
       }
   }
```

bridgeR

```
    void bridgeR (Graph G, Vertex v) {
    link p; Vertex u;
 1   pre[v] = cnt++;
 2   low[v] = pre[v];
 3   for (p = G->adj[v]; p; p = p->next)
 4       if (pre[u = p->w] == -1) {
 5           parnt[u] = v;
 6           bridgeR(G, u);
 7           if (low[v] > low[u]) low[v] = low[u];
 9           else if (low[u] == pre[u]) {
10               bcnt++;
11               output(v, w);
             }
        }
12      else if (u != parnt[v] && low[v] > pre[u])
13              low[v] = pre[u];
    }
```


Consumo de tempo

O consumo de tempo da função `all_bridges` é $O(V + A)$.