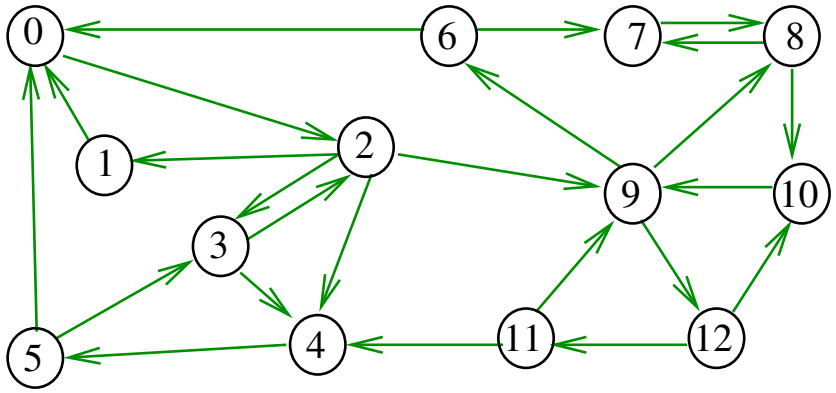
Componentes fortemente conexas

S 19.8
CLRS 22.5

Digrafos fortemente conexos

Um digrafo é **fortemente conexo** se e somente se para cada par {s,t} de seus vértices, existem caminhos de s a t e de t a s

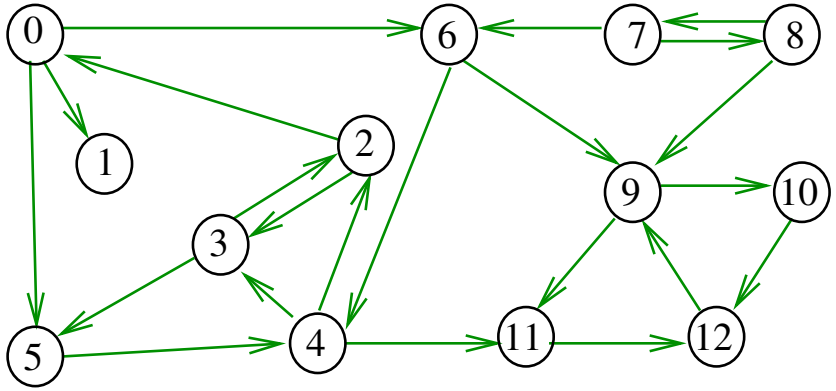
Exemplo: um digrafo fortemente conexo



Componentes fortemente conexas

Uma componente **fortemente conexa** (= *strongly connected*) é um conjunto maximal de vértices W tal que digrafo induzido por W é fortemente conexo

Exemplo: 4 componentes fortemente conexas



Exemplo: 4 componentes fortemente conexas

Relações de equivalência

Dada uma relação binária $\Rightarrow$ no conjunto $\mathcal{C}$, seja $\Rightarrow^*$ seu fecho reflexivo e transitivo. Defina, para $a, b \in \mathcal{C}$

$$a \Leftrightarrow b \quad \text{sse} \quad a \Rightarrow^* b \quad \text{e} \quad b \Rightarrow^* a$$

claro que $\Leftrightarrow$ é um relação de equivalência.
Caso típico: $\Rightarrow$ é alguma transformação de dados.

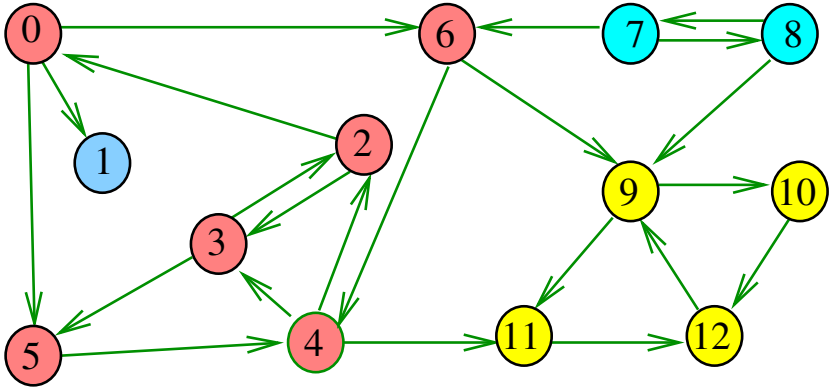
Problema: *Determinar as classes de equivalência.*

Mesma coisa que achar as componentes fortemente conexas do
grafo com vértices $\mathcal{C}$ e arcos dados por $\Rightarrow$.

Determinando componentes f.c.

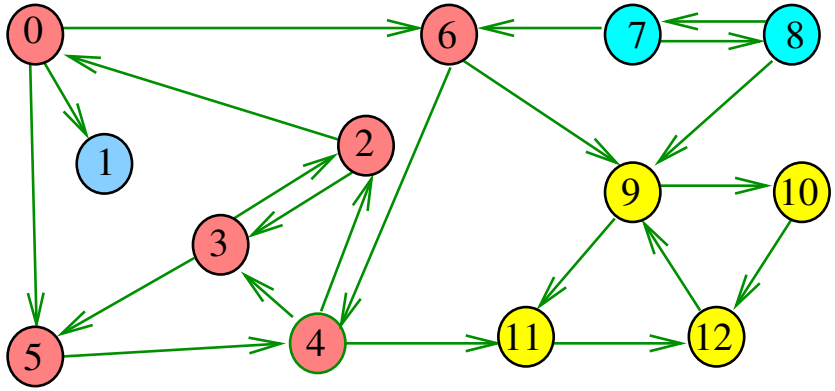
Problema: determinar as componentes fortemente conexas

Exemplo: 4 componentes fortemente conexas



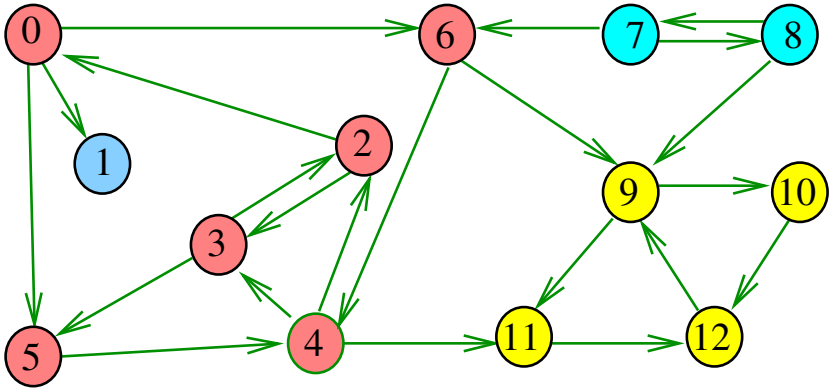
Exemplo

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
sc[v]	2	1	2	2	2	2	2	3	3	0	0	0	0



Exemplo

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
sc[v]	2	1	2	2	2	2	2	3	3	0	0	0	0



strongreach

```
int
strongreach(Digraph G,Vertex s,Vertex t)
{
   return sc[s]==sc[t];
}
```

Força Bruta

```
   int DIGRAPHsc1 (Digraph G) {
    Vertex v , w ; int n ;
    Graph H = GRAPHinit(G->V);
1   for (v = 0; v < G->V; v++)
2       for (v = w+1; v < G->V; v++)
3           if (DIGRAPHpath(G,v,w)==1
                  && DIGRAPHpath(G,w,v)==1)
4               GRAPHinsertE(H,v,w);
5   n = GRAPHcc(H);
6   for (v = 0; v < G->V; v++)
7       sc[v]=cc[v];
8   return n ;
```

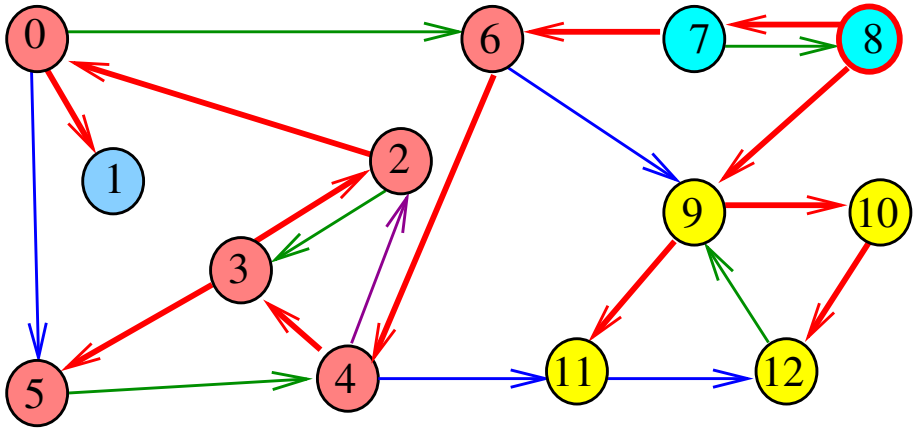

Consumo de tempo

O consumo de tempo da função DIGRAPHsc1 para vetor de listas de adjacência é $O(V^2(V+A))$.

O consumo de tempo da função DIGRAPHsc1 para matriz de adjacência é $O(V^4)$.

Propriedade

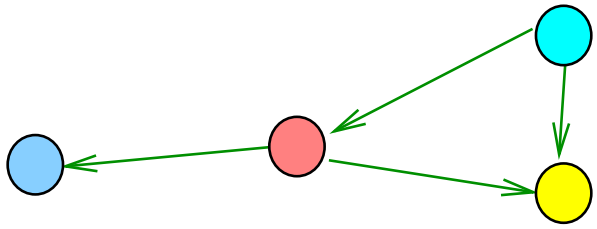
Os vértices de uma componente fortemente conexa induzem uma **subarborescência** em uma floresta DFS



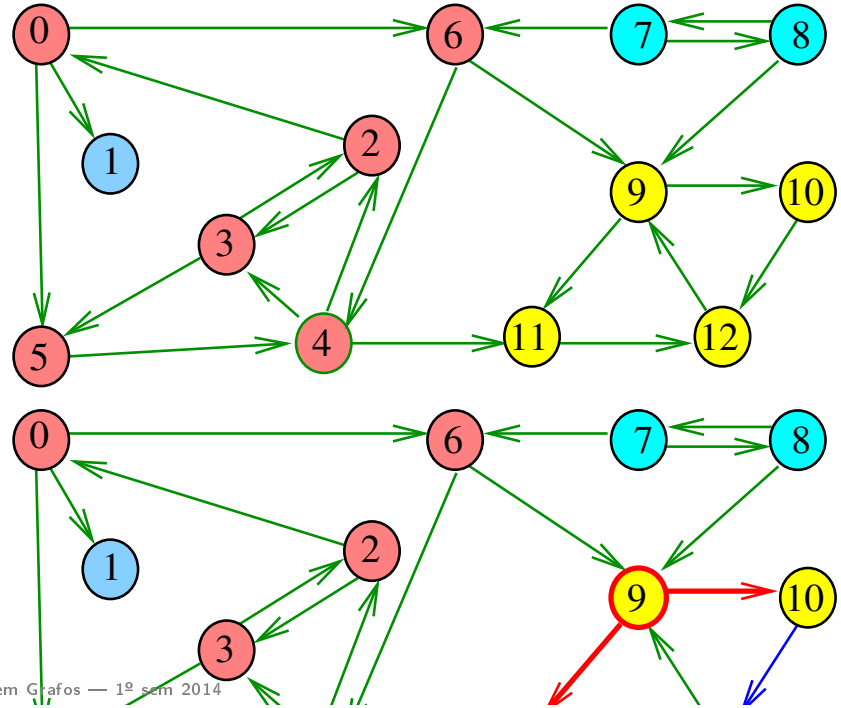
Digrafo das componentes

O **digrafo das componentes** de G tem um vértice para cada componente fortemente conexa e um arco U-W se G possui um arco com ponta inicial em U e ponta final em W

Digrafo das componente é um DAG

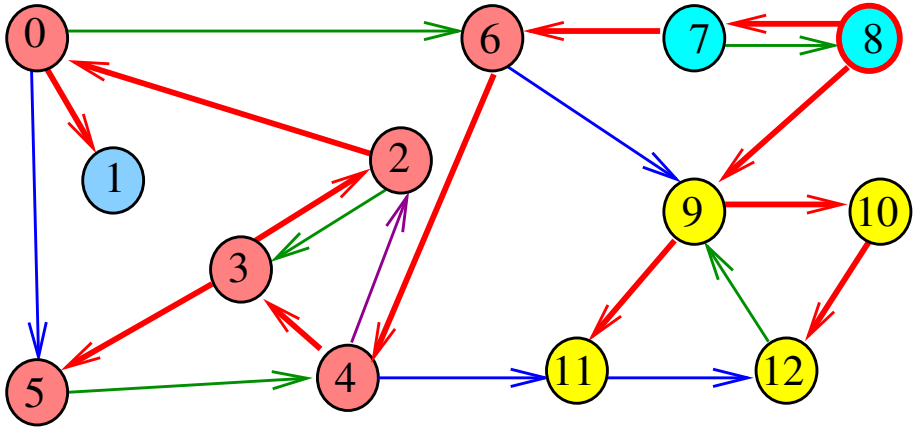


Idéia . . . G e DFS



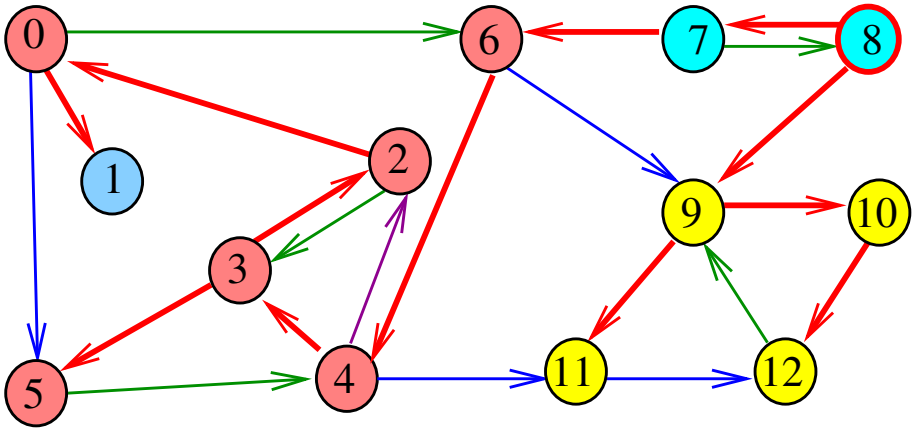
Numeração pós-ordem (finalização)

pos[v] = numeração pós-ordem de v
sop[i] = vértice de numeração pós-ordem i
pos[W] = maior numeração pós-ordem de um vértice em W



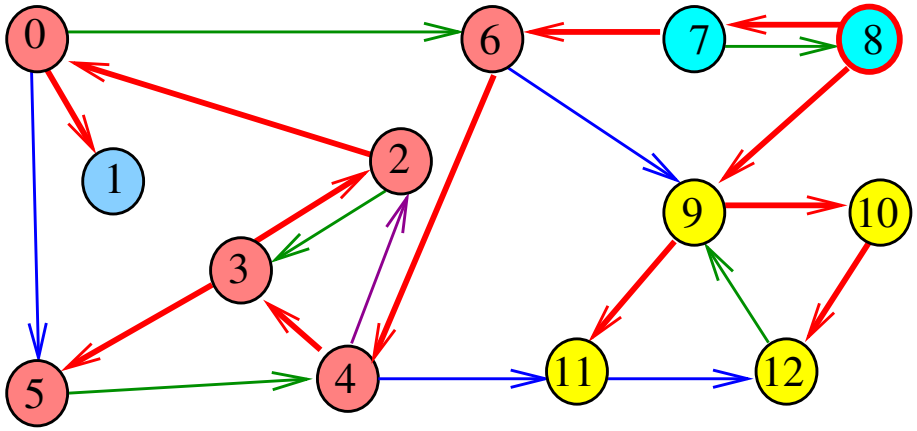
Exemplo

v	0	**1**	2	3	4	5	**6**	7	**8**	**9**	10	11	12
pos[v]	6	5	7	8	9	4	10	11	12	3	1	2	0



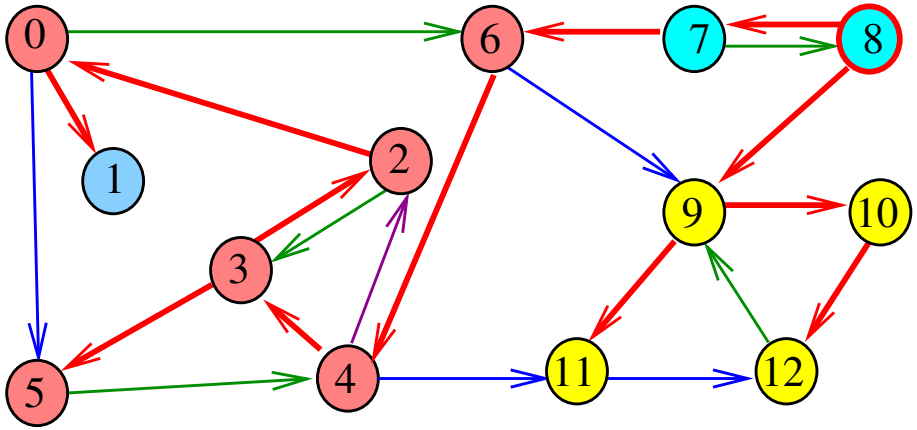
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
sop[i]	12	10	11	**9**	5	**1**	0	2	3	4	**6**	7	**8**



Exemplo

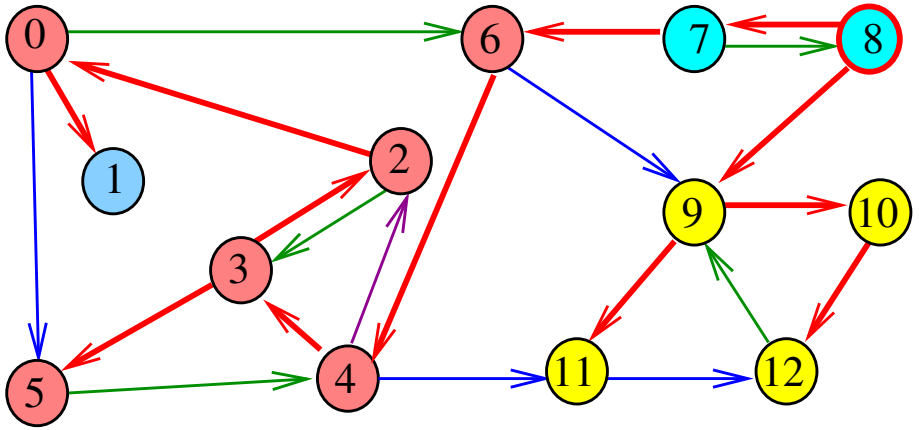
$\texttt{pos}[\{7, \mathbf{8}\}] = 12$
$\texttt{pos}[\{0, 2, 3, 4, 5, \mathbf{6}\}] = 10$
$\texttt{pos}[\{\mathbf{1}\}] = 5$
$\texttt{pos}[\{\mathbf{9}, 10, 11, 12\}] = 3$



Numeração pós-ordem e componentes f.c.

Se U e W são componentes f.c. e existe arco com ponta inicial em U e ponta final em W, então

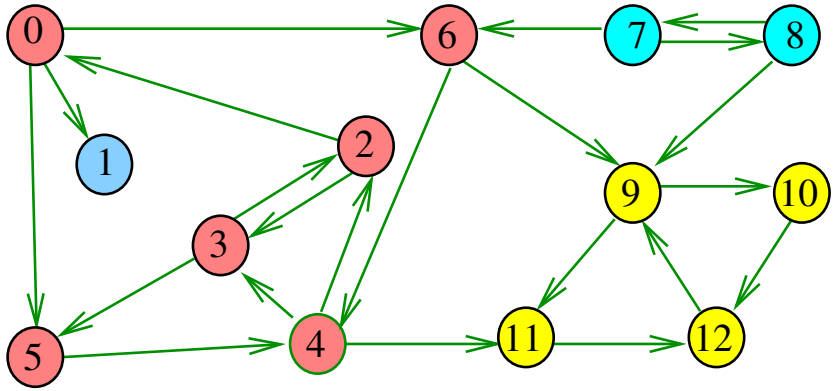
$$\texttt{pos}[\texttt{U}] > \texttt{pos}[\texttt{W}]$$



Propriedade

Um digrafo G e seu digrafo reverso R têm as mesmas componentes fortemente conexas

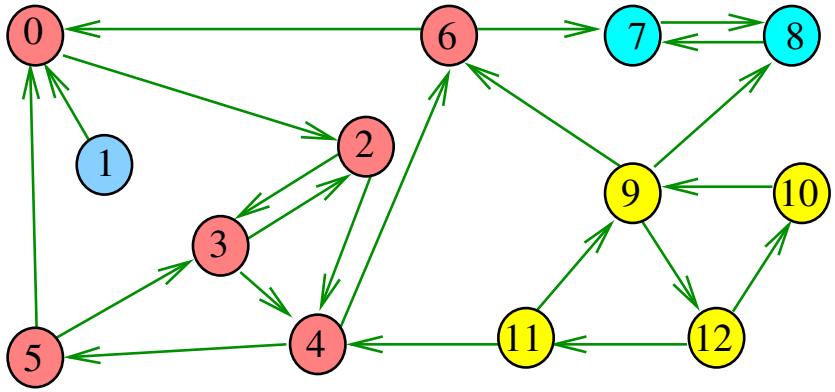
Exemplo: Digrafo G



Exemplo: Digrafo reverso R de G

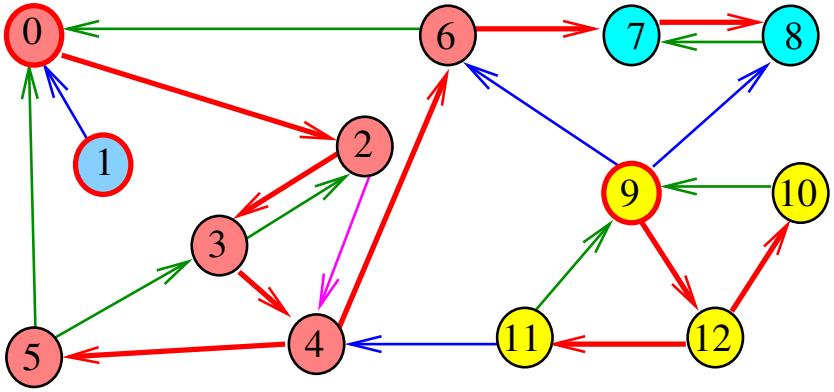
Digrafo reverso R

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
sc[v]	2	1	2	2	2	2	2	3	3	0	0	0	0



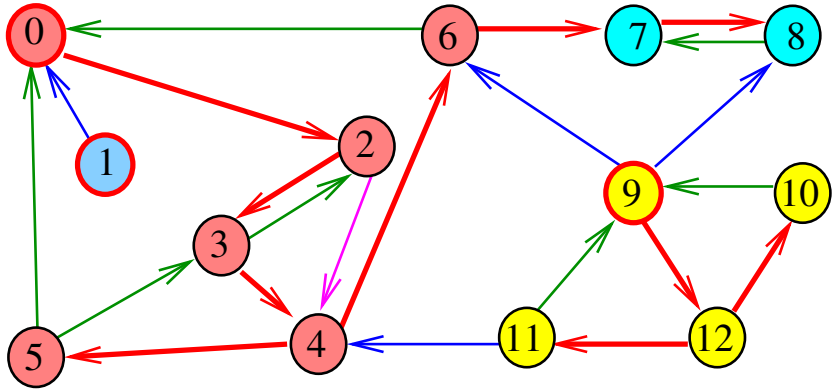
Digrafo reverso R e DFS

v	**0**	**1**	2	3	4	5	6	**7**	8	**9**	10	11	12
pos[v]	7	8	6	5	4	3	2	1	0	12	9	10	11



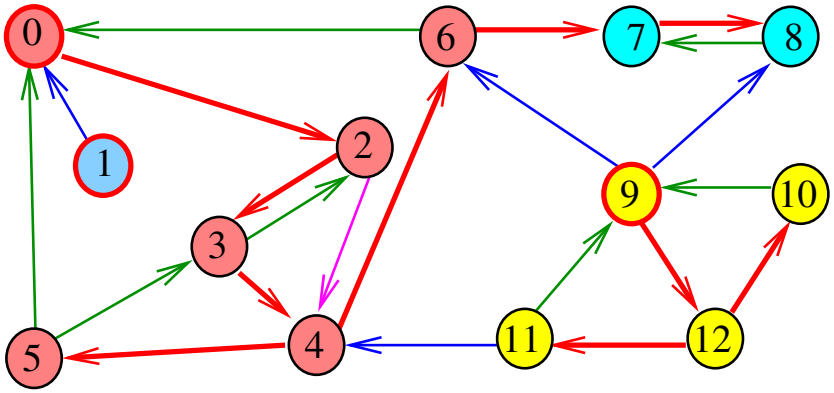
Digrafo reverso R e DFS

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
sop[i]	8	**7**	6	5	4	3	2	**0**	**1**	10	11	12	**9**



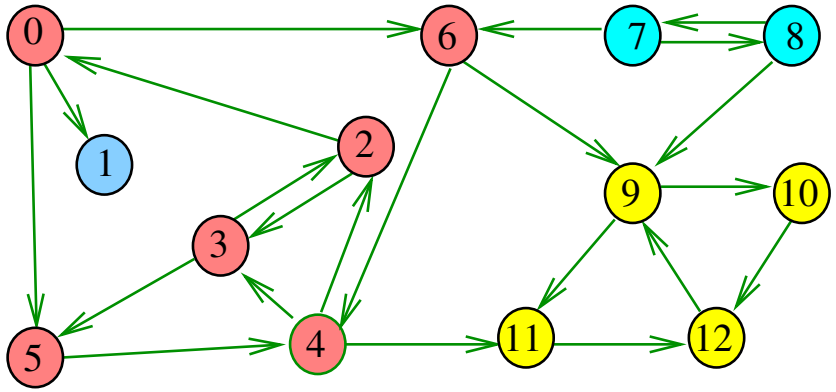
Digrafo reverso R e DFS

i	0	**1**	2	3	4	5	6	**7**	**8**	9	10	11	**12**
sop[i]	8	7	6	5	4	3	2	0	1	10	11	12	9



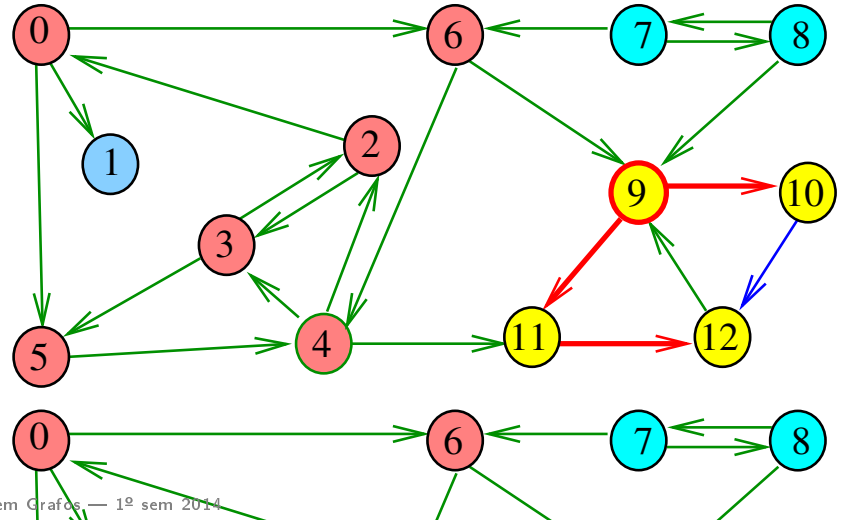
Digrafo G e DFS

i	0	**1**	2	3	4	5	6	**7**	**8**	9	10	11	**12**
sop[i]	8	7	6	5	4	3	2	0	1	10	11	12	9



Digrafo G e DFS

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
sop[i]	8	7	6	5	4	3	2	0	1	10	11	12	9



Algoritmo de Kosaraju

A função devolve o número de componentes fortemente conexas do digrafo G

```
static int sc[maxV];
static Vertex sop[maxV], sopR[maxV];
static int cnt, id;
```

Além disso, ela armazena no vetor sc o número da componente a que o vértice pertence: se o vértice v pertence à k-ésima componente então sc[v] == k-1

```
int DIGRAPHsc (Graph G)
```


DIGRAPHsc

```
int DIGRAPHsc (Digraph G) {
  Vertex v;
  int id, i;
1 Digraph R = DIGRAPHreverse(G);
2 cnt = 0;
3 for (v = 0; v < R->V; v++) sc[v]=-1;
4 for (v = 0; v < R->V; v++)
5     if (sc[v] == -1)
6         dfsRsc(R, v, 0);
```


DIGRAPHsc

```
 7 for (i = 0; i < G->V; i++)
 8     sopR[i] = sop[i];
 9 cnt = id = 0;
10 for (v = 0; v < G->V; v++) sc[v]=-1;
11 for (i = G->V-1; i > 0; i--)
12     if (sc[sopR[i]] == -1)
13         dfsRsc(G, sopR[i], id++);
14 DIGRAPHdestroy(R);
15 return id;
}
```

dfsRsc

```
   void dfsRsc(Digraph G,Vertex v,int id){
    link p;
1   sc[v] = id;
2   for (p =G->adj[v]; p; p = p->next)
3       if (sc[p->w] == -1)
4           dfsRsc(G, p->w, id);
5   pos[v] = cnt; /* não precisa */
6   sop[cnt++] = v;
   }
```


DIGRAPHreverse

```
   Digraph DIGRAPHreverse (Digraph G) {
1   Vertex v; link p;
2   Digraph R = DIGRAPHinit(G->V);
3   for (v =0; v < G->V; v++)
4       for (p =G->adj[v]; p; p = p->next)
5           DIGRAPHinsertA(G,p->w,v);
6   return R;
   }
```


Consumo de tempo

O consumo de tempo da função DIGRAPHsc é $O(V + A)$.