Digrafos com custos nos arcos

Muitas aplicações associam um número a cada arco de um digrafo

Diremos que esse número é o custo da arco

Vamos supor que esses números são do tipo **double**

```
typedef struct {
    Vertex v;
    Vertex w;
    double cst;
} Arc;
```

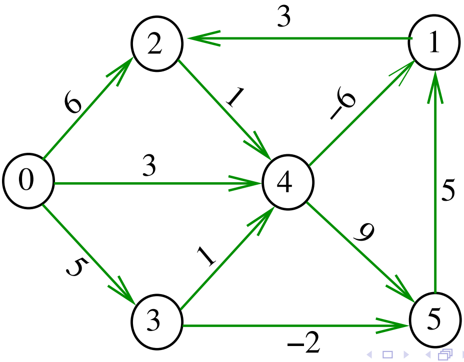
Custo de um caminho

Custo de um caminho é soma dos custos de seus arcos

Custo do caminho 0-2-4-5 é 16.

Custo do caminho 0-2-4-1-2-4-5 é 14.

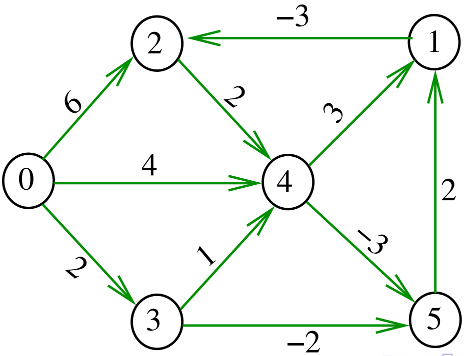
Custo do caminho 0-2-4-1-2-4-1-2-4-5 é 12.



Caminho mínimo

Um caminho `P` tem **custo mínimo** se o custo de `P` é menor ou igual ao custo de todo caminho com a mesma origem e término

O caminho `0-3-4-5-1-2` é mínimo, tem custo -1



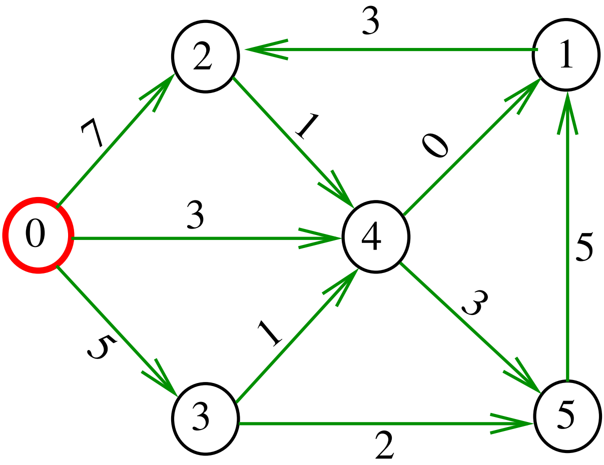
Problema

Problema dos Caminhos Mínimos com Origem Fixa
(*Single-source Shortest Paths Problem*):

> *Dado um vértice s de um digrafo com custos* ***não-negativos*** *nos arcos, encontrar, para cada vértice t que pode ser alcançado a partir de s, um* ***caminho mínimo simples*** *de s a t.*

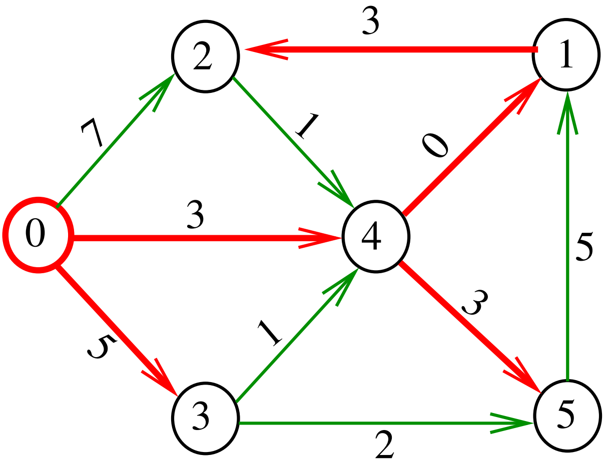
Exemplo

Entra:



Exemplo

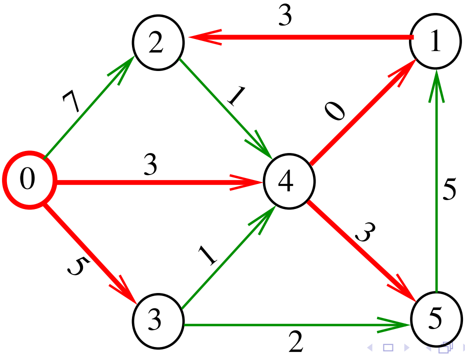
Sai:



Arborescência de caminhos mínimos

Uma arborescência com raiz s é de **caminhos mínimos** (= *shortest-paths tree* = *SPT*) se para todo vértice t que pode ser alcançado a partir de s,

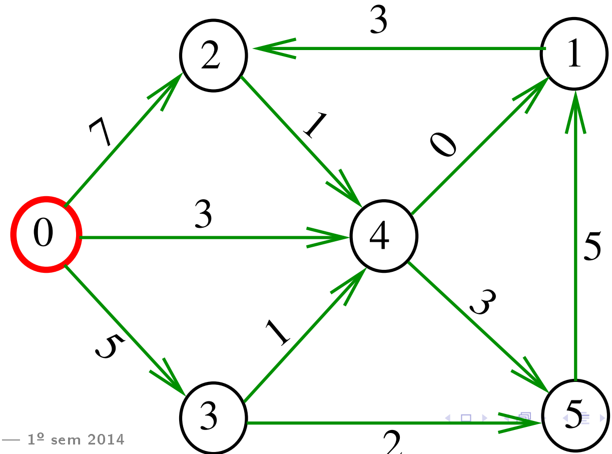
> *o único caminho de s a t na arborescência é um caminho mínimo*



Problema da SPT

Problema: Dado um vértice s de um digrafo com custos não-negativos nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s

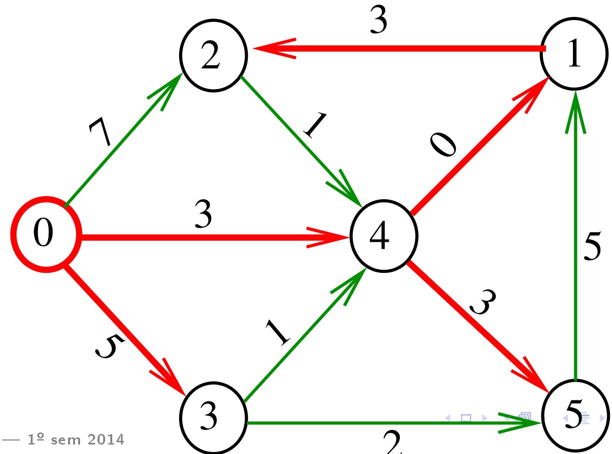
Entra:



Problema da SPT

Problema: Dado um vértice s de um digrafo com custos não-negativos nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s

Sai:



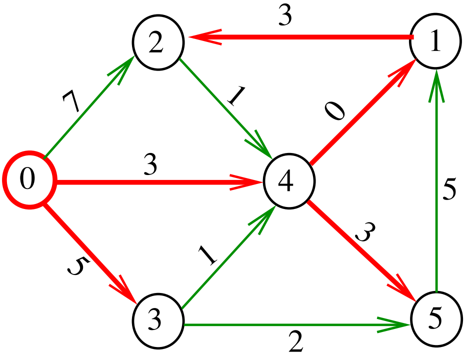
Algoritmo de Dijkstra

S 21.1 e 21.2

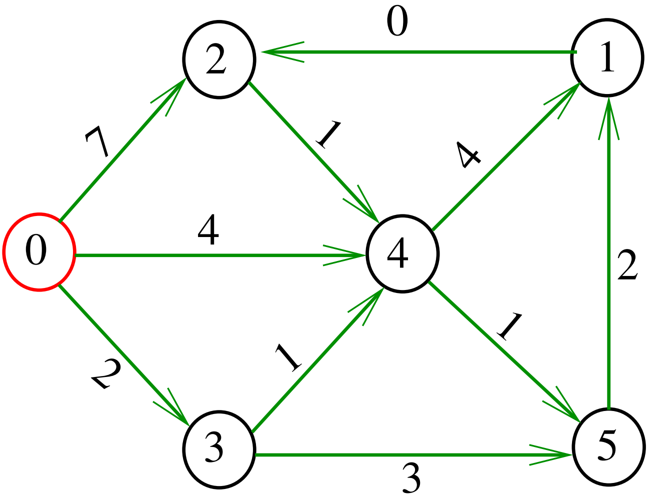
Problema

O algoritmo de Dijkstra resolve o problema da SPT:

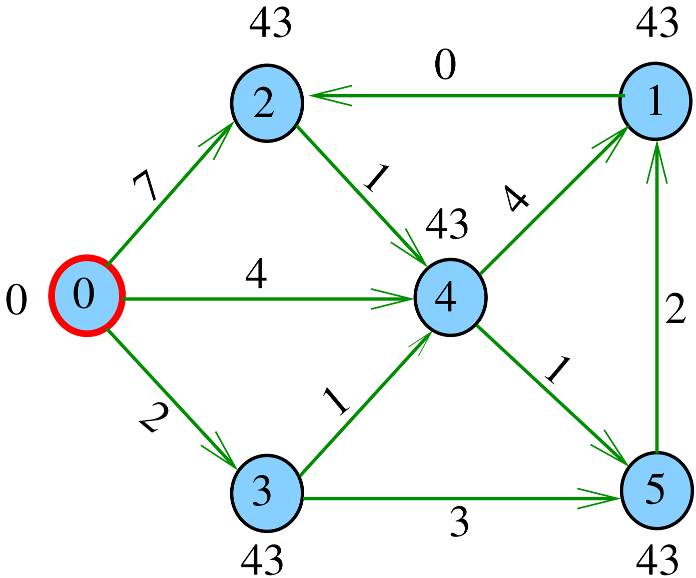
> *Dado um vértice s de um digrafo com custos não-negativos nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s*



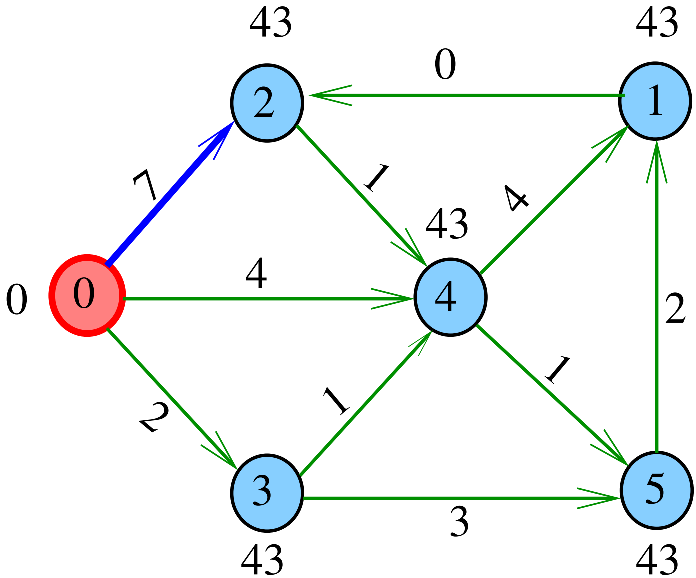
Simulação



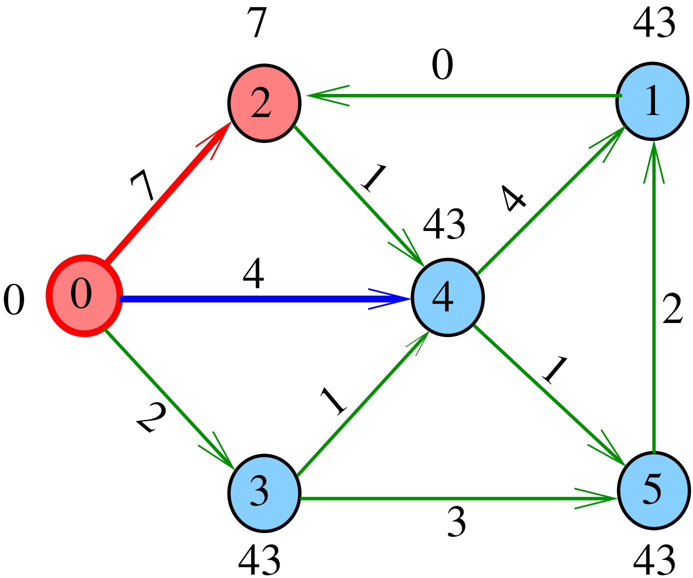
Simulação



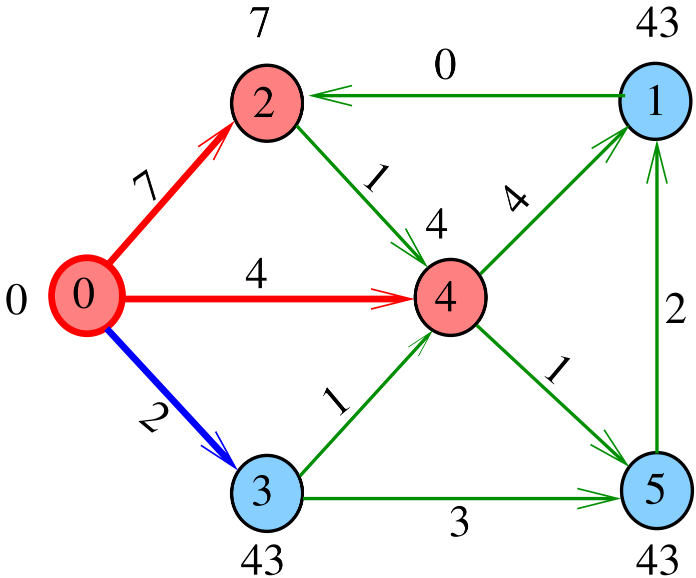
Simulação



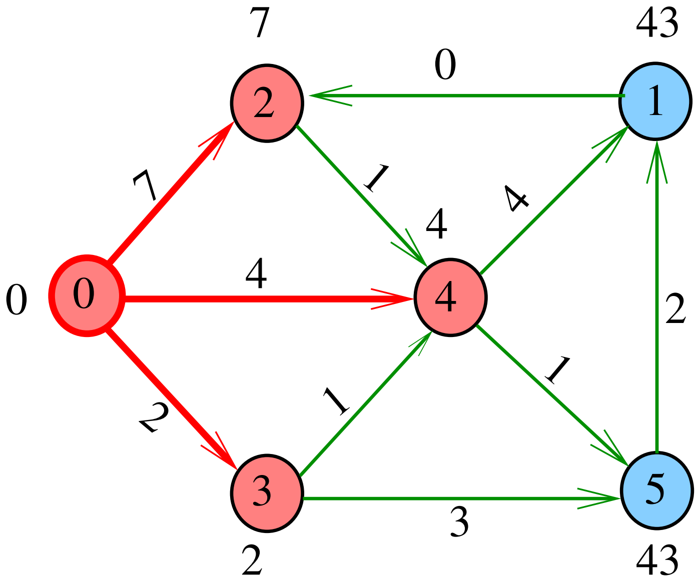
Simulação



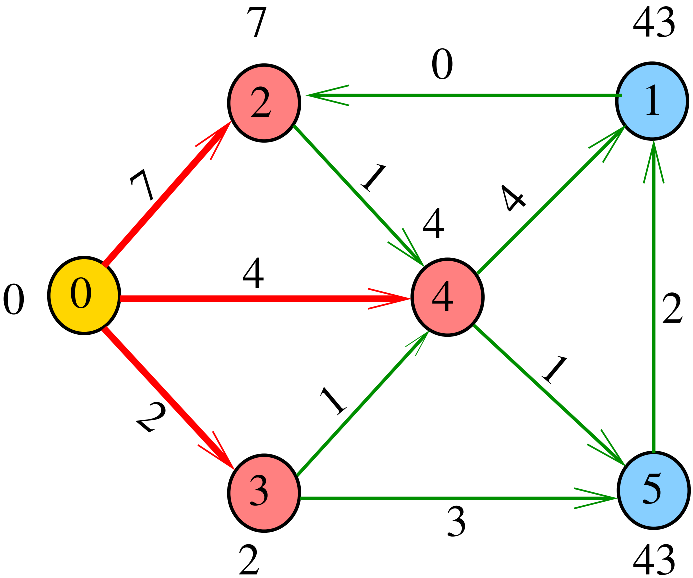
Simulação



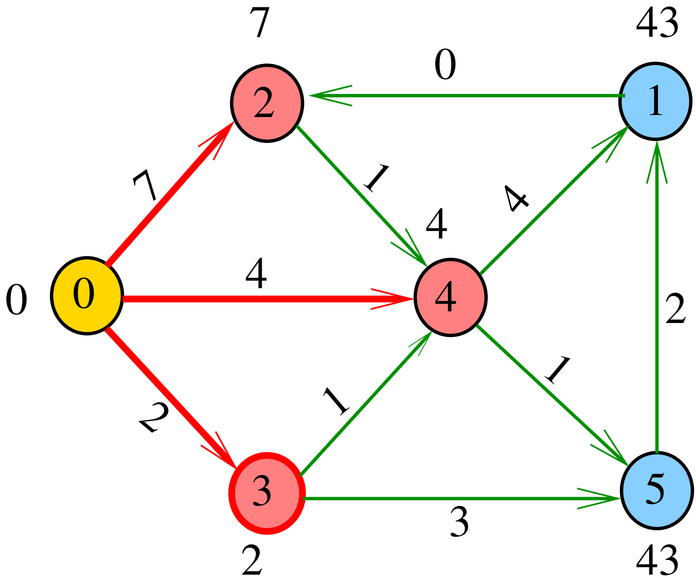
Simulação



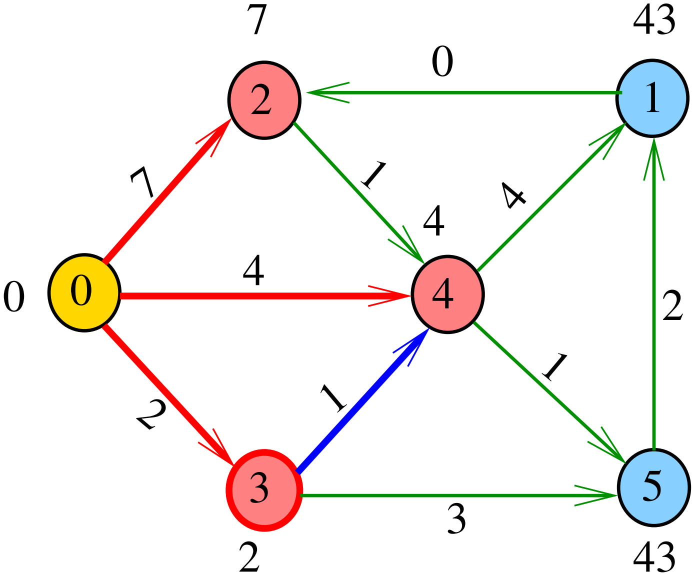
Simulação



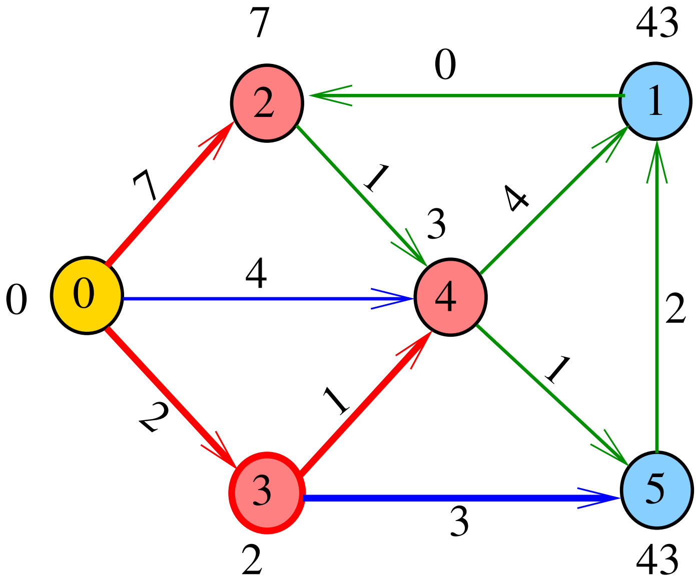
Simulação



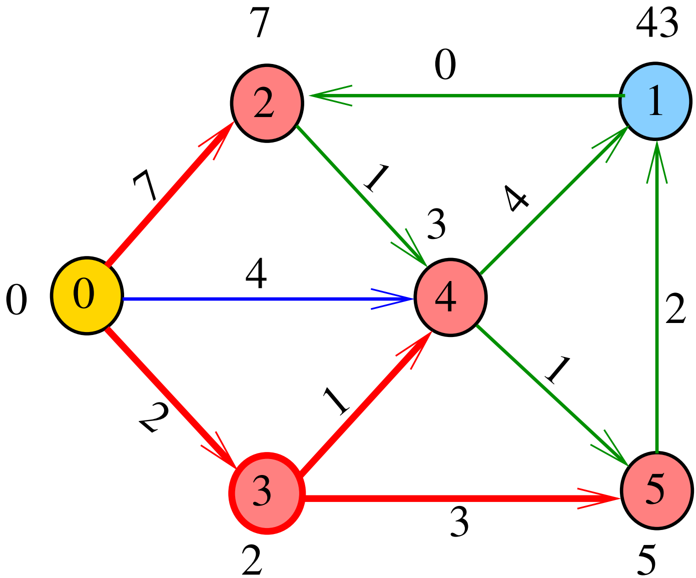
Simulação



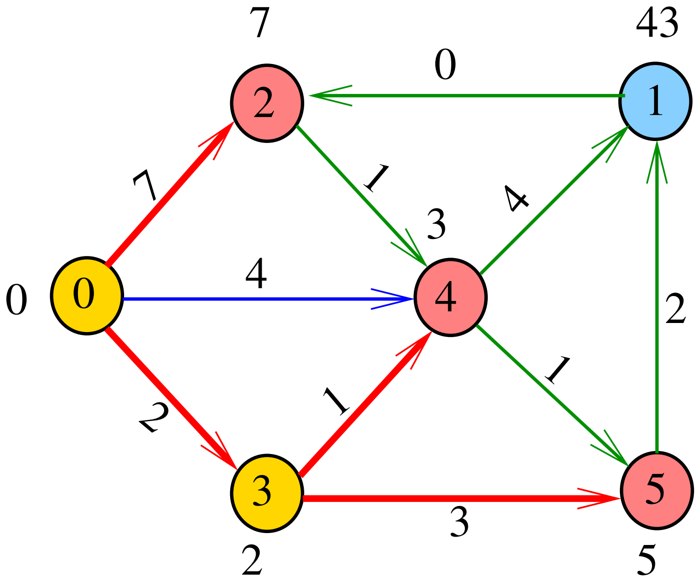
Simulação



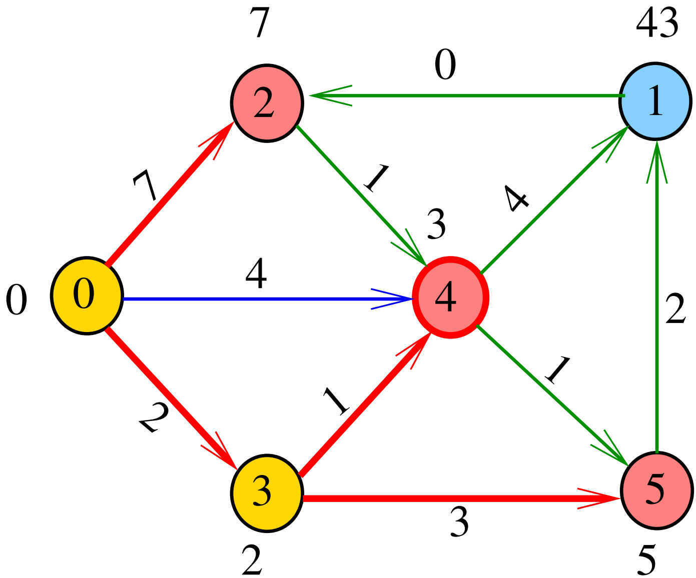
Simulação



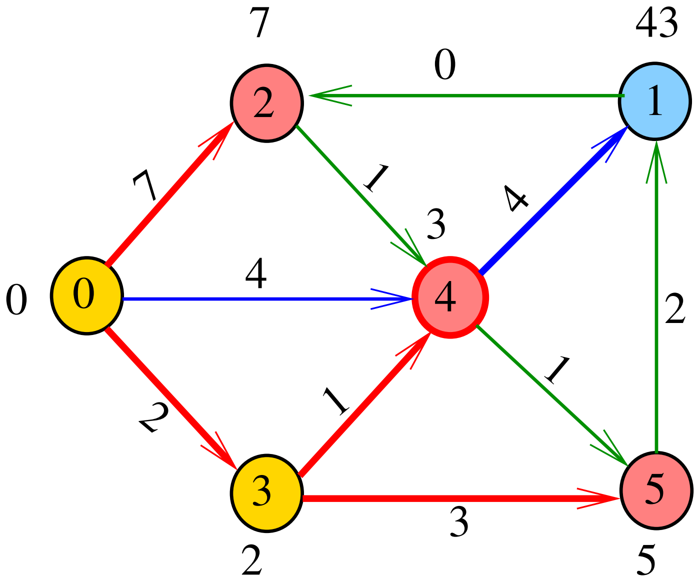
Simulação



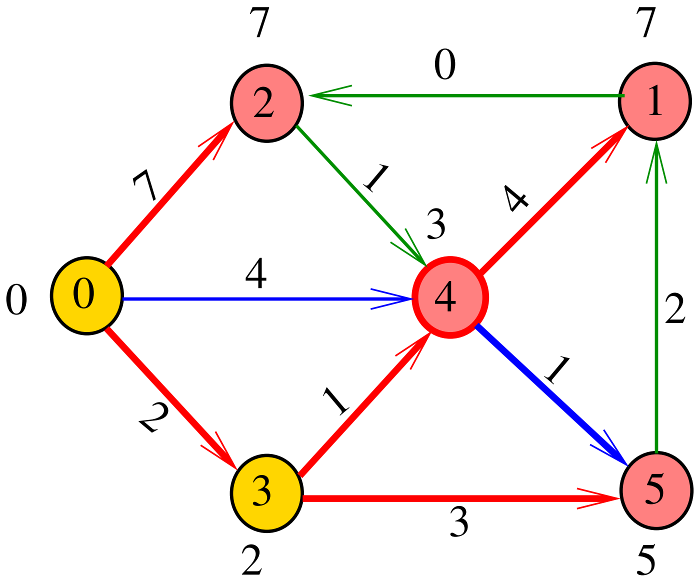
Simulação



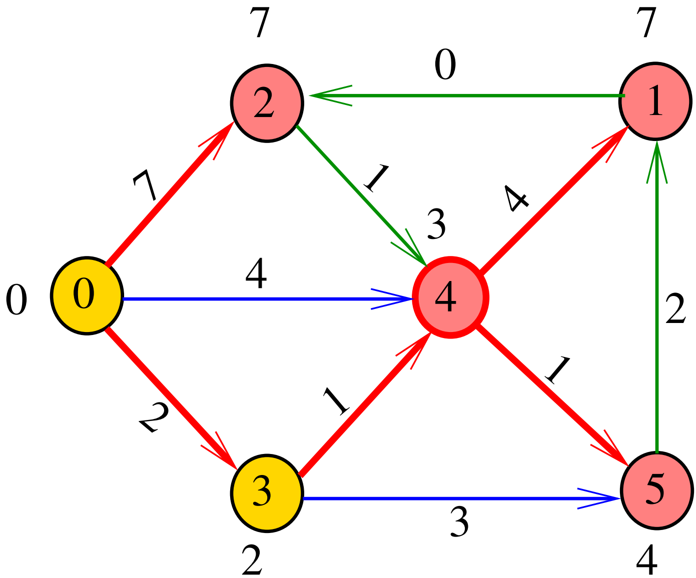
Simulação



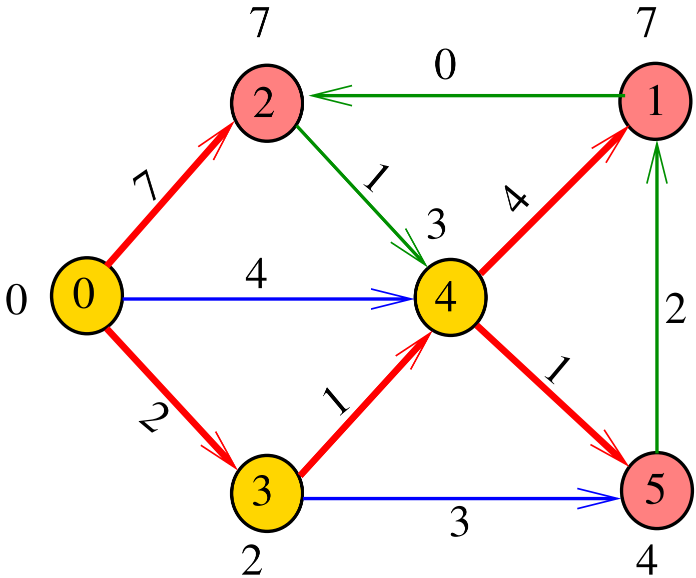
Simulação



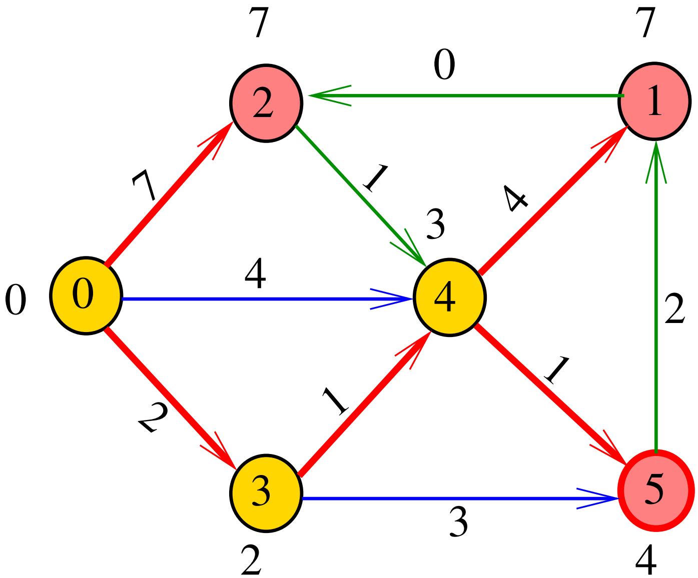
Simulação



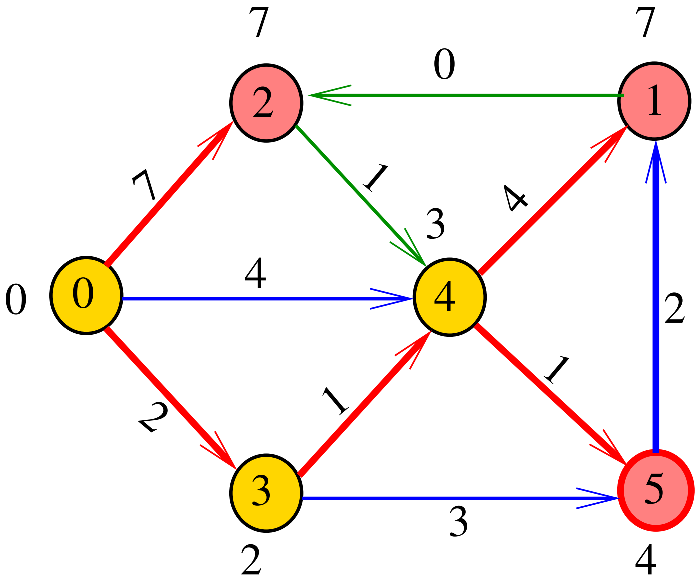
Simulação



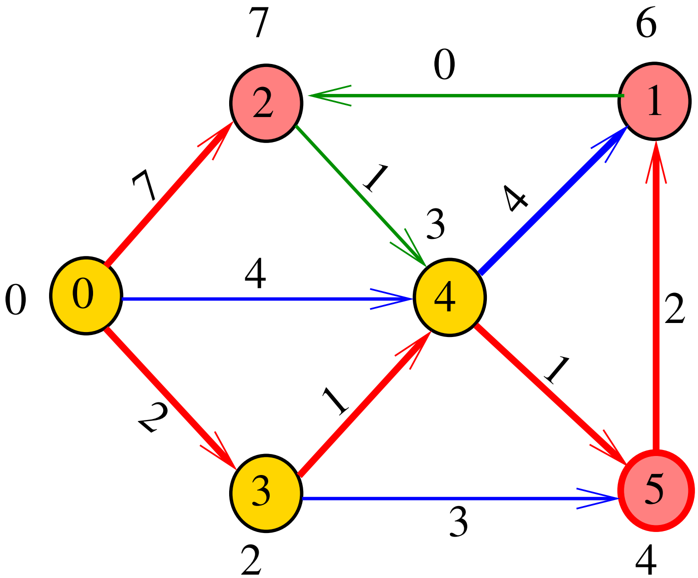
Simulação



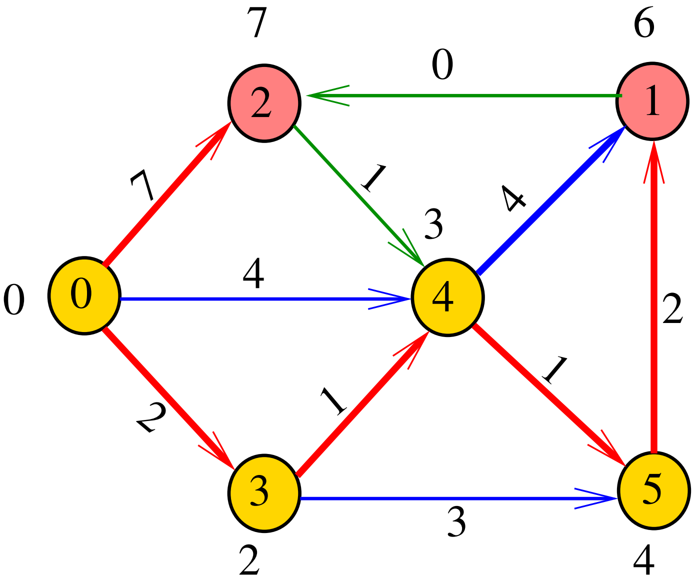
Simulação



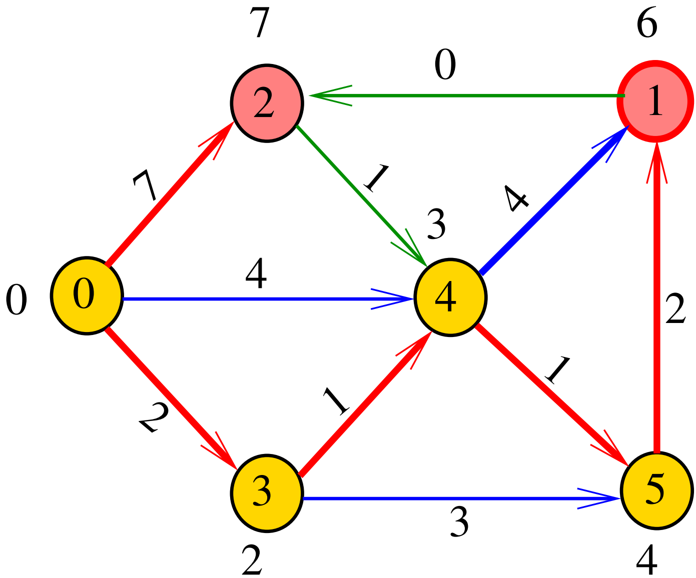
Simulação



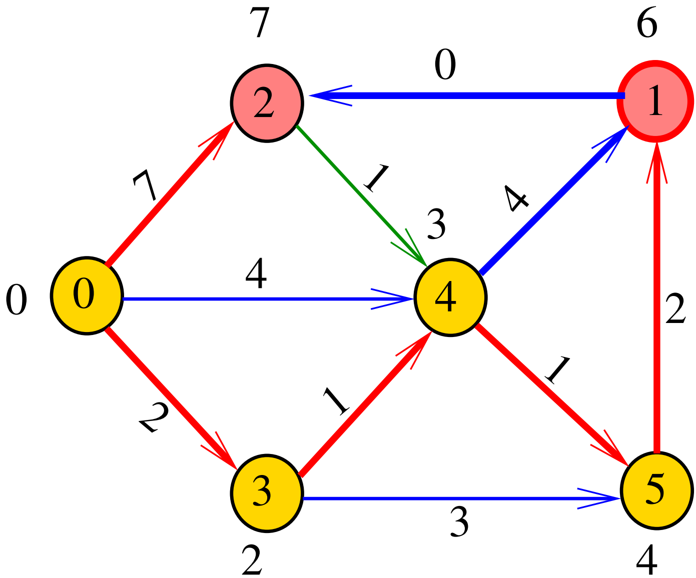
Simulação



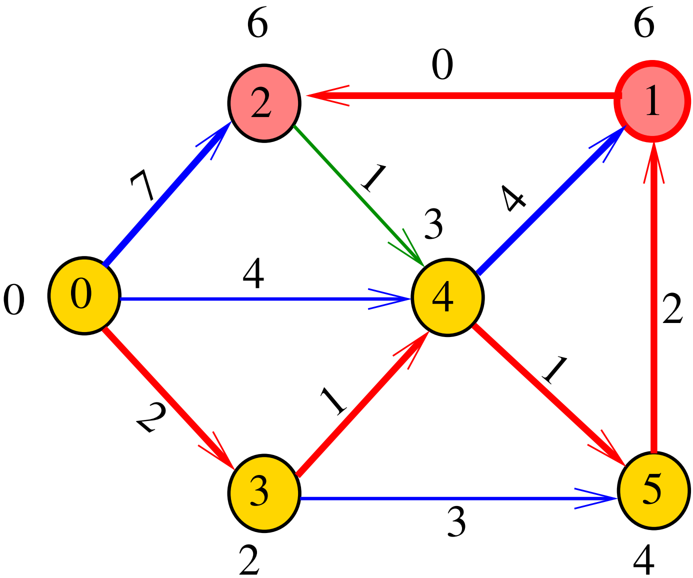
Simulação



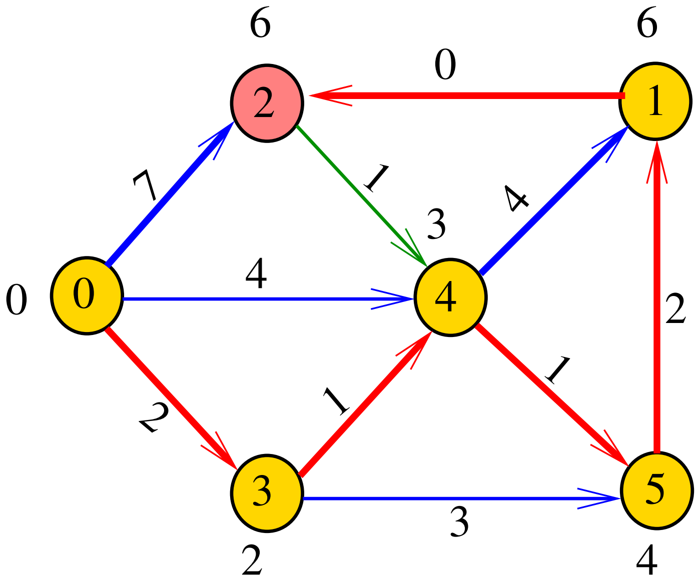
Simulação



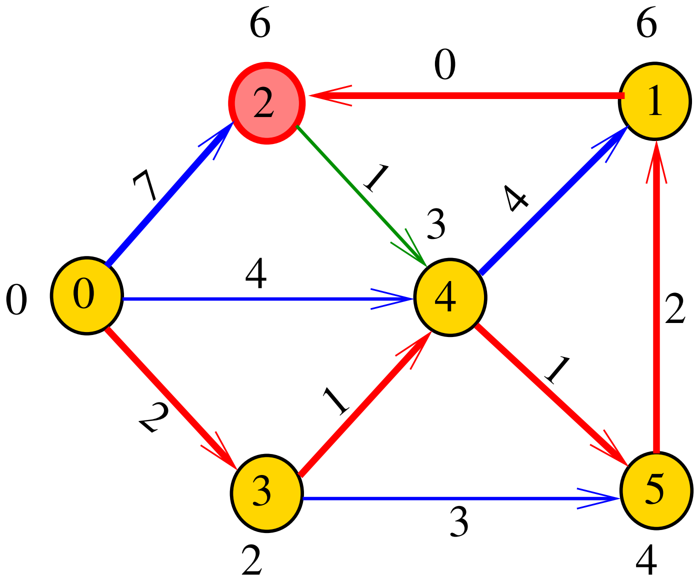
Simulação



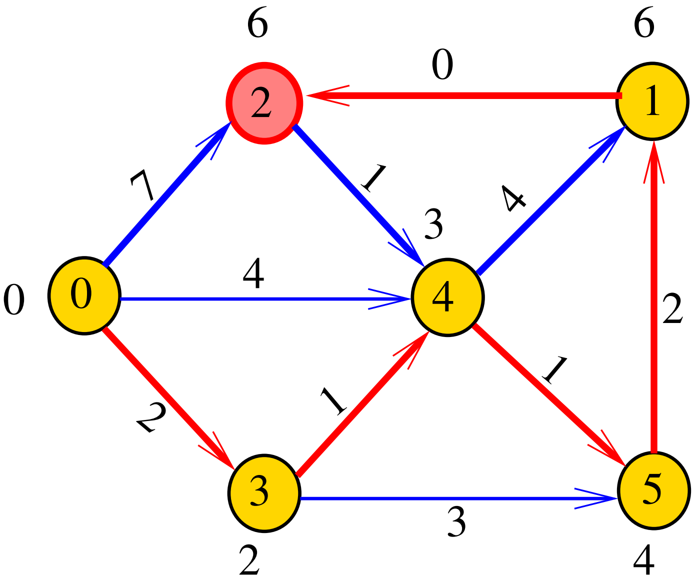
Simulação



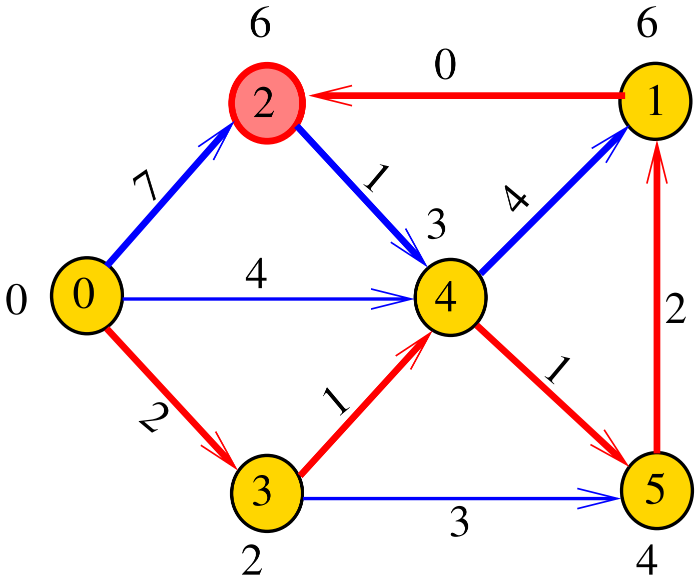
Simulação



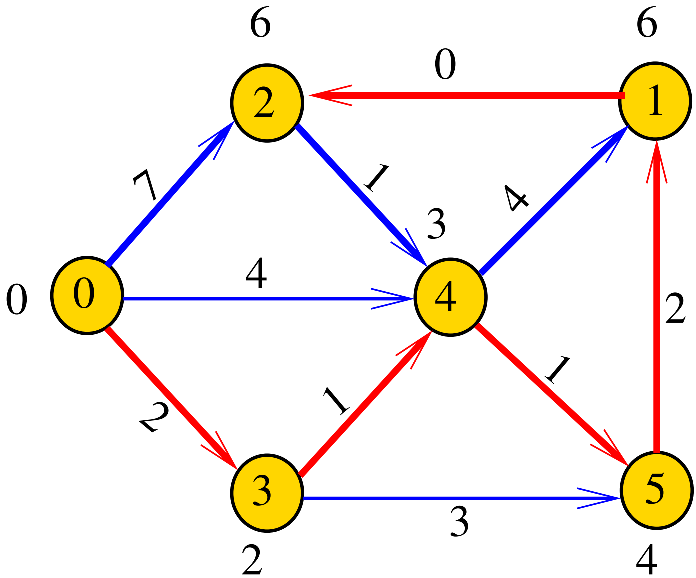
Simulação



Simulação



Simulação



dijkstra

Recebe digrafo G com custos não-negativos nos arcos e um vértice s
Calcula uma arborescência de caminhos mínimos com raiz s.
A arborescência é armazenada no vetor parnt
As distâncias em relação a s são armazenadas no vetor cst

```
void
dijkstra(Digraph G, Vertex s,
         Vertex parnt[], double cst[]);
```

Fila com prioridades

A função `dijkstra` usa uma fila com prioridades
A fila é manipulada pelas seguintes funções:

- `PQinit()`: inicializa uma fila de vértices em que cada vértice v tem prioridade `cst[v]`
- `PQempty()`: devolve 1 se a fila estiver vazia e 0 em caso contrário
- `PQinsert(v)`: insere o vértice `v` na fila
- `PQdelmin()`: retira da fila um vértice de prioridade mínima.
- `PQdec(w)`: reorganiza a fila depois que o valor de `cst[w]` foi decrementado.

dijkstra

```
#define INFINITO maxCST
void
dijkstra(Digraph G, Vertex s ,
        Vertex parnt[], double cst[]);
{
    Vertex v , w ; link p ;
    for (v = 0; v < G->V ; v++) {
        cst[v] = INFINITO;
        parnt[v] = -1;
    }
    PQinit(G->V);
    cst[s] = 0;
    parnt[s] = s ;
```

dijkstra

```
PQinsert(s);
while (!PQempty()) {
    v = PQdelmin();
    for(p = G->adj[v];p; p = p->next)
        if (cst[w =p->w]==INFINITO) {
            cst[w] = cst[v] + p->cst;
            parnt[w]=v ;
            PQinsert(w);
        }
```

dijkstra

```
            else
            if(cst[w] > cst[v]+p->cst)
                cst[w]=cst[v]+p->cst
                parnt[w] = v ;
                PQdec(w);
            }
    PQfree();
    }
}
```

Consumo de tempo

linha	número de execuções da linha
2–4	$\Theta(V)$
5	$= 1$ PQinit
6–7	$= 1$
8	$= 1$ PQinsert
9–10	$O(V)$ PQempty e PQdelmin
11	$O(A)$
12–14	$O(V)$
15	$O(V)$ PQinsert
16–19	$O(A)$
20	$O(A)$ PQdec
21	$= 1$ PQfree
total	$= O(V + A) + ???$

Conclusão

O consumo de tempo da função `dijkstra` é $O(V + A)$ mais o consumo de tempo de

1	execução de	`PQinit` e `PQfree`,
$O(V)$	execuções de	`PQinsert`,
$O(V)$	execuções de	`PQempty`,
$O(V)$	execuções de	`PQdelmin`, e
$O(A)$	execuções de	`PQdec`.

Implementação para digrafos densos

```
/* Item.h */
typedef Vertex Item;

/* QUEUE.h */
void PQinit(int);
int PQempty();
void PQinsert(Item);
Item PQdelmin();
void PQdec(Item);
void PQfree();
```

PQinit e PQempty

```
Item *q;
int  inicio, fim;

void PQinit(int maxN) {
   q=(Item*)malloc(maxN*sizeof(Item));
   inicio = 0;
   fim = 0;
}

int PQempty() {
   return inicio==fim;
}
```

PQinsert e PQdelmin

```
void PQinsert(Item item){
   q[fim++] = item;
}

Item PQdelmin() {
   int i , j ; Item x ;
   i = inicio;
   for (j =i+1; j < fim; j++)
        if (cst[q[i]] > cst[q[j]]) i = j ;
   x = q[i];
   q[i] = q[--fim];
   return x ;
}
```

PQdec e PQfree

```
void PQdec(Vertexv) {
/* faz nada */
}

void PQfree() {
   free(q);
}
```

Consumo de tempo

PQinit	$\Theta(1)$
PQempty	$\Theta(1)$
PQinsert	$\Theta(1)$
PQdelmin	$O(V)$
PQdec	$\Theta(1)$
PQfree	$\Theta(1)$

Conclusão

O consumo de tempo da função `dijkstra` é $O(V^2)$.

Este consumo de tempo é ótimo para **digrafos densos**.

Consumo de tempo Min-Heap

	heap	d-heap	fibonacci heap
PQinsert	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(1)$
PQdelmin	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(\lg V)$
PQdec	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(1)$
dijkstra	$O(A \lg V)$	$O(A \log_D V)$	$O(A + V \lg V)$