Digrafos com custos nos arcos

Muitas aplicações associam um número a cada arco de um digrafo

Diremos que esse número é o custo da arco

Vamos supor que esses números são do tipo **double**

```
typedef struct {
    Vertex v;
    Vertex w;
    double cst;
} Arc;
```

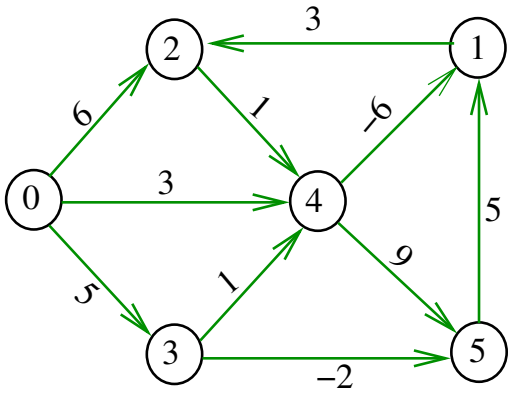

Custo de um caminho

Custo de um caminho é soma dos custos de seus arcos

Custo do caminho 0-2-4-5 é 16.

Custo do caminho 0-2-4-1-2-4-5 é 14.

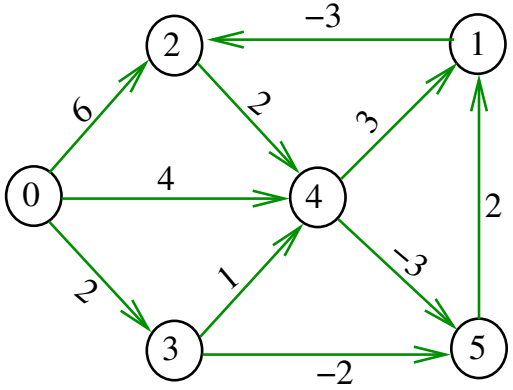
Custo do caminho 0-2-4-1-2-4-1-2-4-5 é 12.



Caminho mínimo

Um caminho P tem **custo mínimo** se o custo de P é menor ou igual ao custo de todo caminho com a mesma origem e término

O caminho 0-3-4-5-1-2 é mínimo, tem custo −1



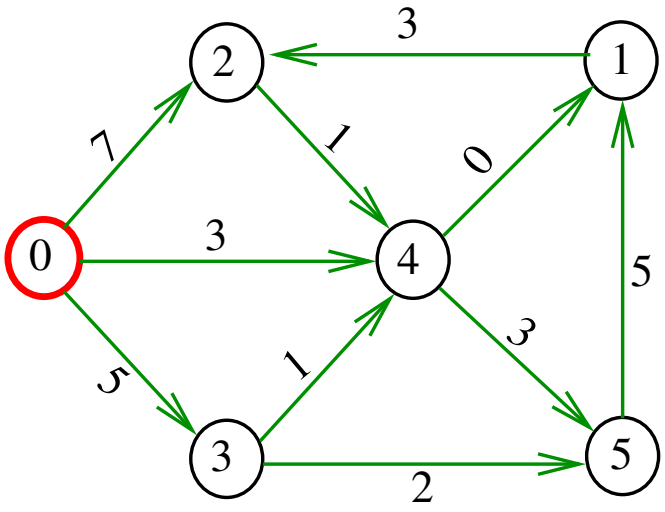
Problema

Problema dos Caminhos Mínimos com Origem Fixa (*Single-source Shortest Paths Problem*):

> *Dado um vértice s de um digrafo com custos* ***não-negativos*** *nos arcos, encontrar, para cada vértice t que pode ser alcançado a partir de s, um* ***caminho mínimo simples*** *de s a t.*

Exemplo

Entra:

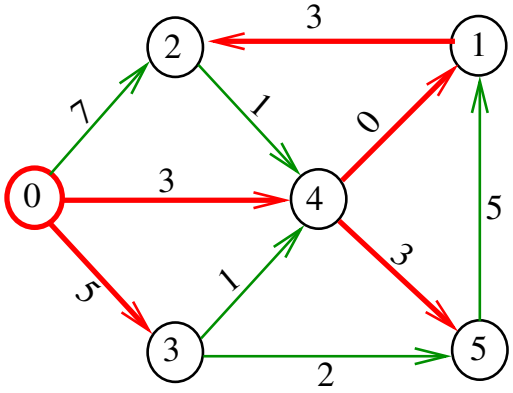


Sai:

Arborescência de caminhos mínimos

Uma arborescência com raiz s é de **caminhos mínimos** (= *shortest-paths tree* = *SPT*) se para todo vértice t que pode ser alcançado a partir de s,

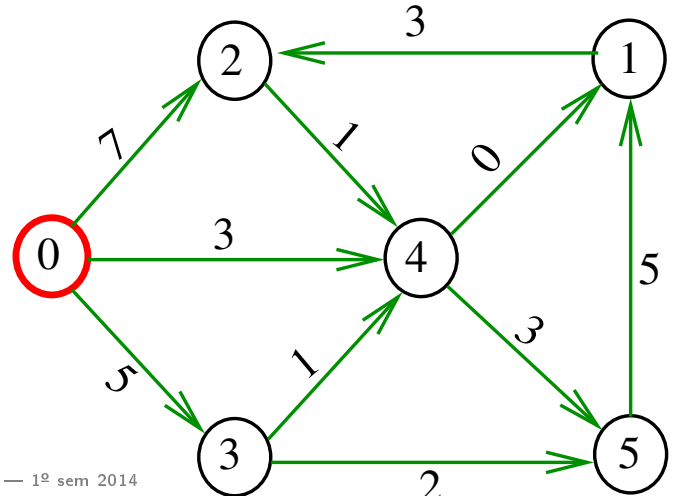
o único caminho de s a t na arborescência é um caminho mínimo



Problema da SPT

Problema: Dado um vértice s de um digrafo com custos não-negativos nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s

Entra:



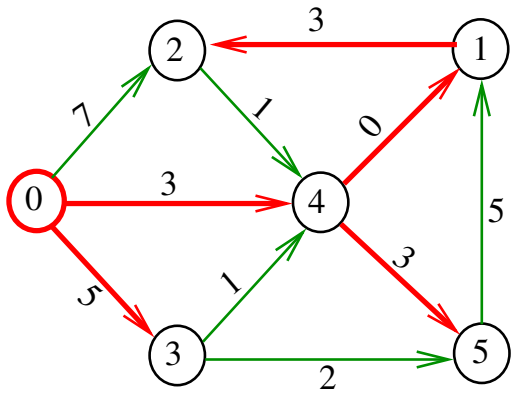
Algoritmo de Dijkstra

S 21.1 e 21.2

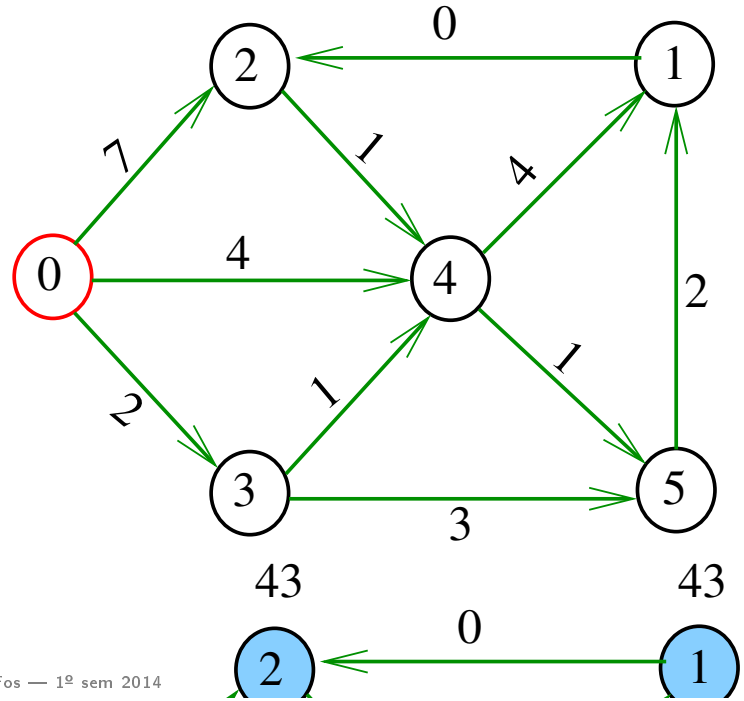
Problema

O algoritmo de Dijkstra resolve o problema da SPT:

Dado um vértice s de um digrafo com custos não-negativos nos arcos, encontrar uma SPT com raiz s



Simulação



dijkstra

Recebe digrafo G com custos não-negativos nos arcos e um vértice s

Calcula uma arborescência de caminhos mínimos com raiz s.

A arborescência é armazenada no vetor parnt

As distâncias em relação a s são armazenadas no vetor cst

void

```
dijkstra(Digraph G, Vertex s,
         Vertex parnt[], double cst[]);
```


Fila com prioridades

A função dijkstra usa uma fila com prioridades

A fila é manipulada pelas seguintes funções:

- PQinit(): inicializa uma fila de vértices em que cada vértice v tem prioridade cst[v]
- PQempty(): devolve 1 se a fila estiver vazia e 0 em caso contrário
- PQinsert(v): insere o vértice v na fila
- PQdelmin(): retira da fila um vértice de prioridade mínima.
- PQdec(w): reorganiza a fila depois que o valor de cst[w] foi decrementado.

dijkstra

```
#define INFINITO maxCST
void
dijkstra(Digraph G, Vertex s ,
       Vertex parnt[], double cst[]);
{
1   Vertex v , w ; link p ;
2   for (v = 0; v < G->V ; v++) {
3       cst[v] = INFINITO;
4       parnt[v] = -1;
    }
5   PQinit(G->V);
6   cst[s] = 0;
7   parnt[s] = s ;
```


dijkstra

```
8   PQinsert(s);
9   while (!PQempty()) {
10      v = PQdelmin();
11      for(p = G->adj[v];p; p = p->next)
12          if (cst[w=p->w]==INFINITO) {
13              cst[w] = cst[v] + p->cst;
14              parnt[w]=v ;
15              PQinsert(w);
            }
```


dijkstra

```
16          else
17          if(cst[w] > cst[v]+p->cst)
18              cst[w]=cst[v]+p->cst
19              parnt[w] = v ;
20              PQdec(w);
            }
21  PQfree();
    }
}
```


Consumo de tempo

linha	número de execuções da linha
2–4	$\Theta(V)$
5	$= 1$ `PQinit`
6–7	$= 1$
8	$= 1$ `PQinsert`
9–10	$O(V)$ `PQempty` e `PQdelmin`
11	$O(A)$
12–14	$O(V)$
15	$O(V)$ `PQinsert`
16–19	$O(A)$
20	$O(A)$ `PQdec`
21	$= 1$ `PQfree`
total	$= O(V + A) +$???

Conclusão

O consumo de tempo da função `dijkstra` é $O(V + A)$ mais o consumo de tempo de

1	execução de	`PQinit` e `PQfree`,
$O(V)$	execuções de	`PQinsert`,
$O(V)$	execuções de	`PQempty`,
$O(V)$	execuções de	`PQdelmin`, e
$O(A)$	execuções de	`PQdec`.

Implementação para digrafos densos

```
/* Item.h */
typedef Vertex Item;

/* QUEUE.h */
void PQinit(int);
int PQempty();
void PQinsert(Item);
Item PQdelmin();
void PQdec(Item);
void PQfree();
```


PQinit e PQempty

```
Item *q;
int  inicio, fim;

void PQinit(int maxN) {
   q=(Item*)malloc(maxN*sizeof(Item));
   inicio = 0;
   fim = 0;
}

int PQempty() {
   return inicio==fim;
}
```


PQinsert e PQdelmin

```
void PQinsert(Item item){
   q[fim++] = item;
}

Item PQdelmin() {
   int i , j ; Item x ;
   i = inicio;
   for (j =i+1; j < fim; j++)
       if (cst[q[i]] > cst[q[j]]) i = j ;
   x = q[i];
   q[i] = q[--fim];
   return x ;
}
```

PQdec e PQfree

```
void PQdec(Vertex v) {
/* faz nada */
}

void PQfree() {
  free(q);
}
```


Consumo de tempo

PQinit	$\Theta(1)$
PQempty	$\Theta(1)$
PQinsert	$\Theta(1)$
PQdelmin	$O(V)$
PQdec	$\Theta(1)$
PQfree	$\Theta(1)$

Conclusão

O consumo de tempo da função dijkstra é $O(V^2)$.

Este consumo de tempo é ótimo para **digrafos densos**.

Consumo de tempo Min-Heap

	heap	d-heap	fibonacci heap
PQinsert	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(1)$
PQdelmin	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(\lg V)$
PQdec	$O(\lg V)$	$O(\log_D V)$	$O(1)$
dijkstra	$O(A \lg V)$	$O(A \log_D V)$	$O(A + V \lg V)$