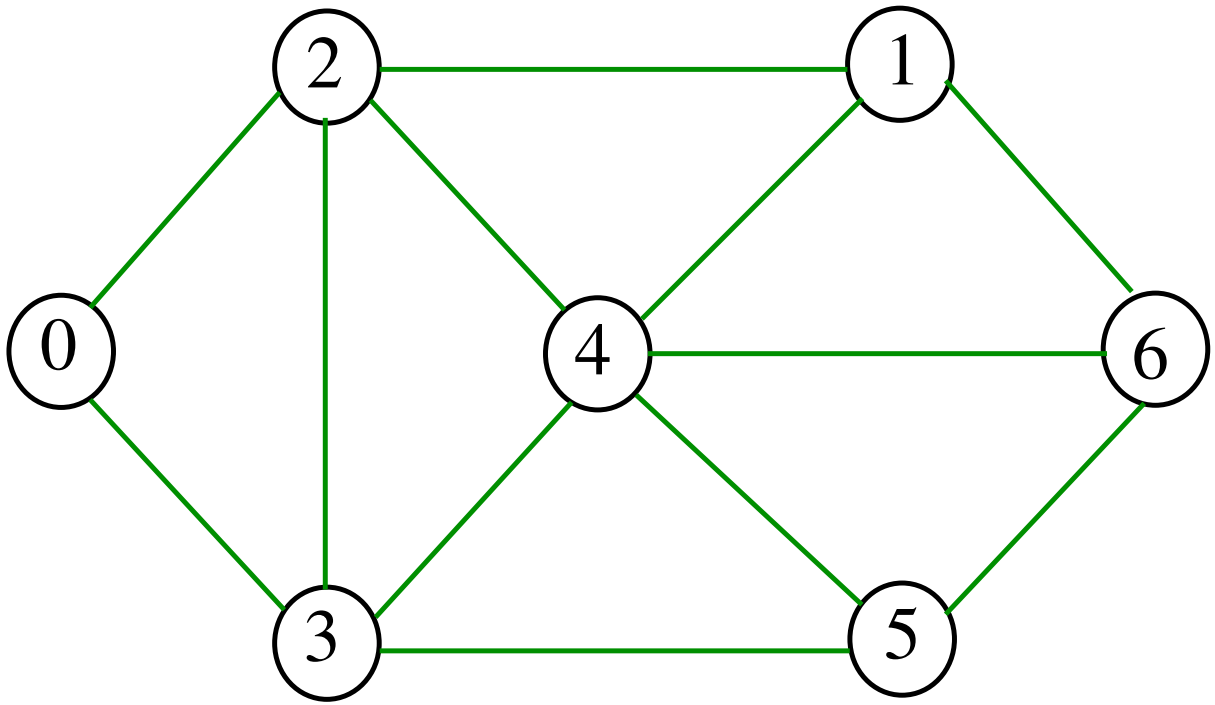
Árvores geradoras de grafos

Árvores geradoras

Uma **árvore geradora** (= *spanning tree*) de um grafo é qualquer subárvore que contenha **todos** os vértices

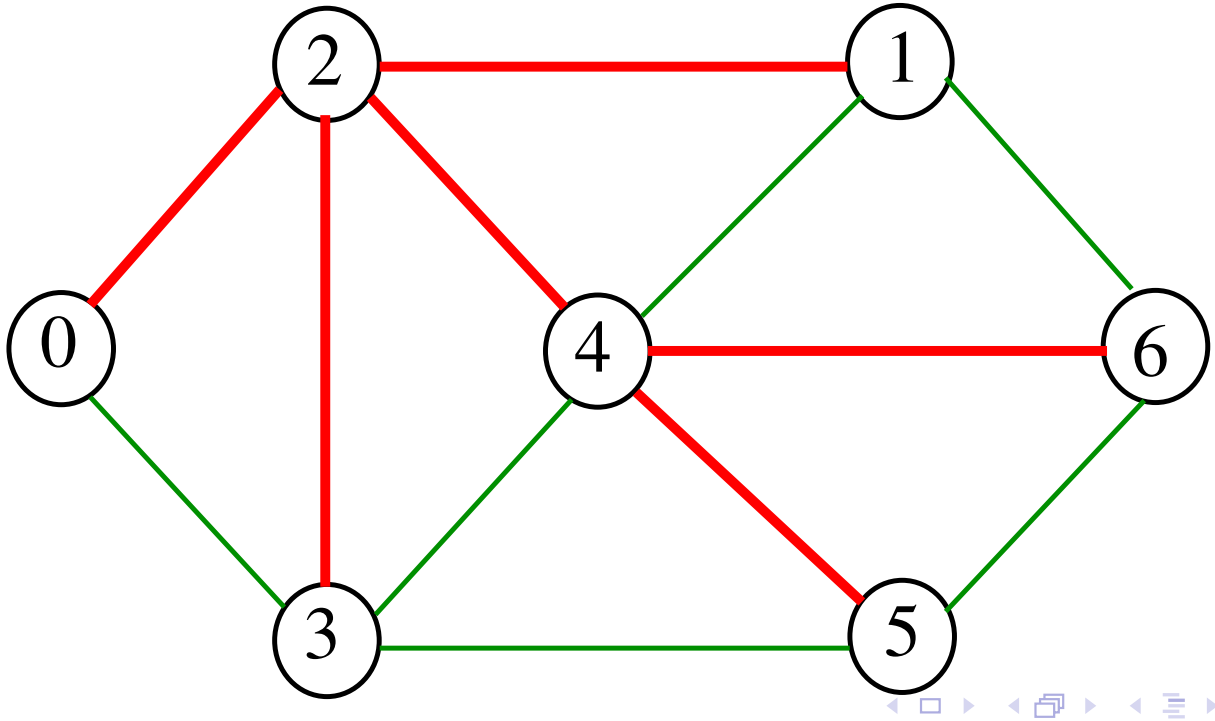
Exemplo:



Árvores geradoras

Uma **árvore geradora** (= *spanning tree*) de um grafo é qualquer subárvore que contenha **todos** os vértices

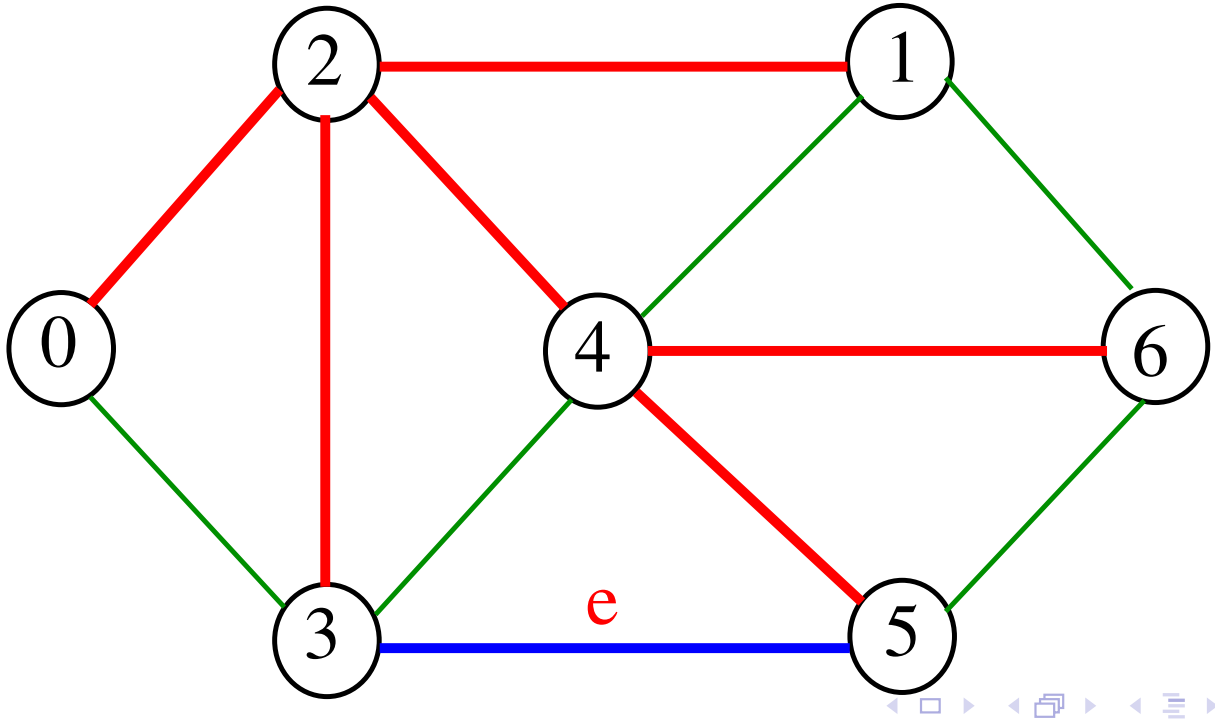
Exemplo: as arestas em vermelho formam uma árvore geradora



Primeira propriedade da troca de arestas

Seja T uma árvore geradora de um grafo G
Para qualquer aresta e de G que não esteja em T, T+e tem um **único ciclo** não-trivial, o **ciclo fundamental** $C(T, e)$.

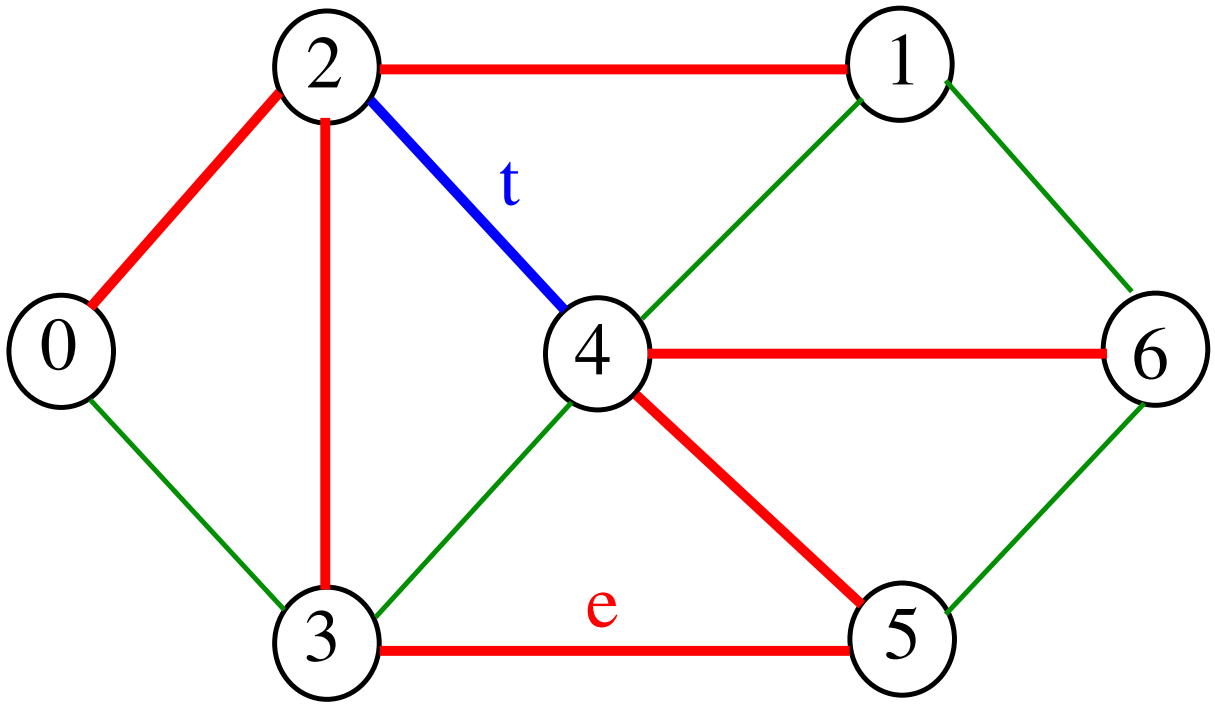
Exemplo: T+e



Primeira propriedade da troca de arestas

Seja T uma árvore geradora de um grafo G Para qualquer aresta t $\in C(T, e)$, T+e-t é uma **árvore geradora**

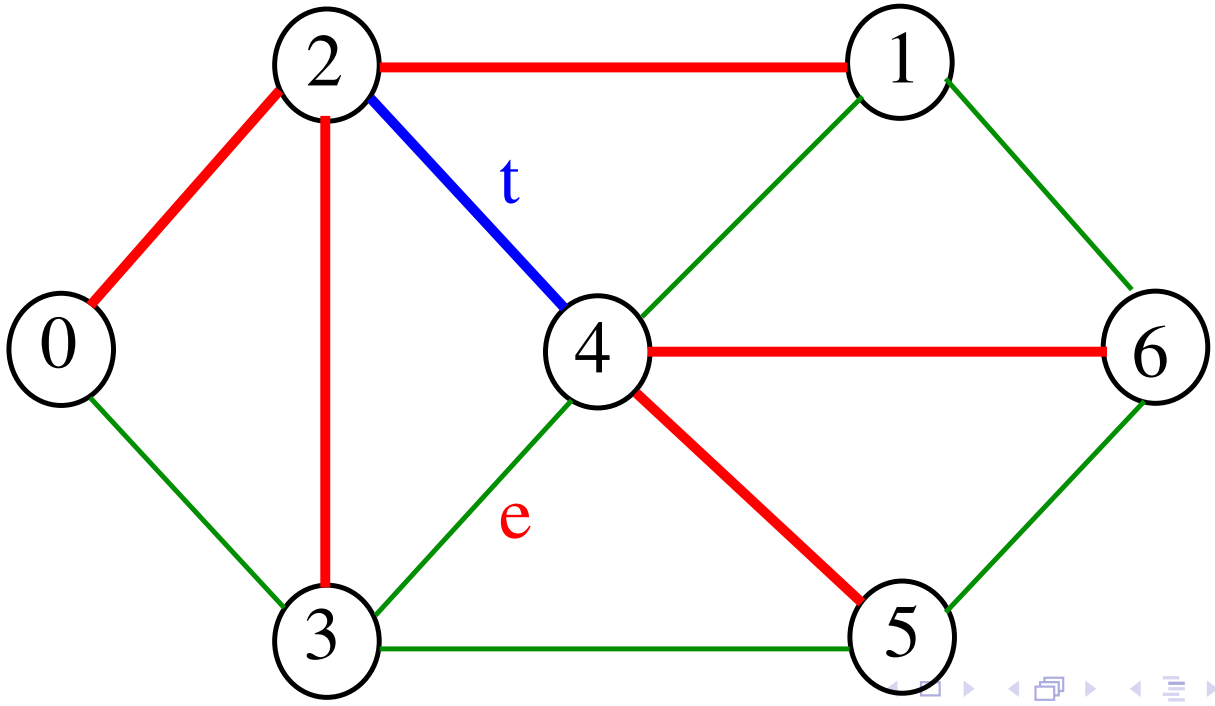
Exemplo: T+e-t



Segunda propriedade da troca de arestas

Seja T uma árvore geradora de um grafo G
Para qualquer aresta t de T, T-t tem duas componentes. O corte em G que separa essas componentes é o **corte fundamental** $D(T, t)$.

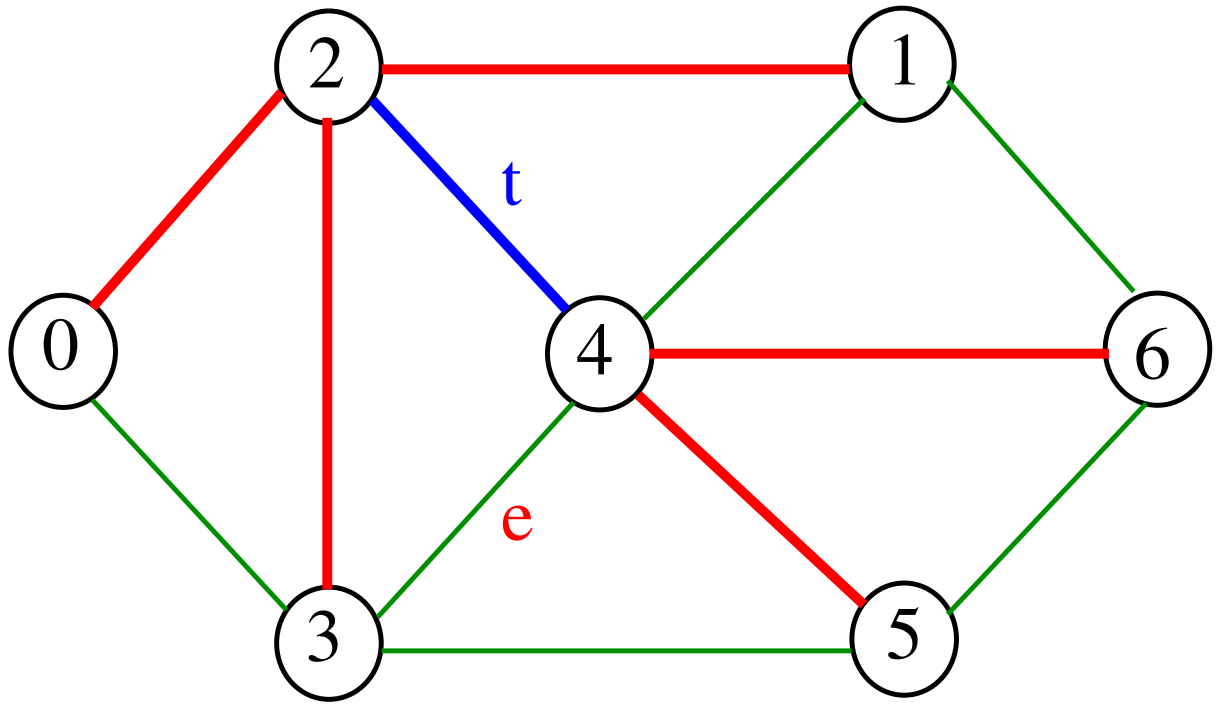
Exemplo: T-t $\quad \{0,1,2,3\} \xrightarrow{D(T,t)} \{4,5,6\}$



Segunda propriedade da troca de arestas

Seja T uma árvore geradora de um grafo G
Para qualquer aresta t de T, se $e \in D(T, t)$ então
$T - t + e$ é uma árvore geradora.

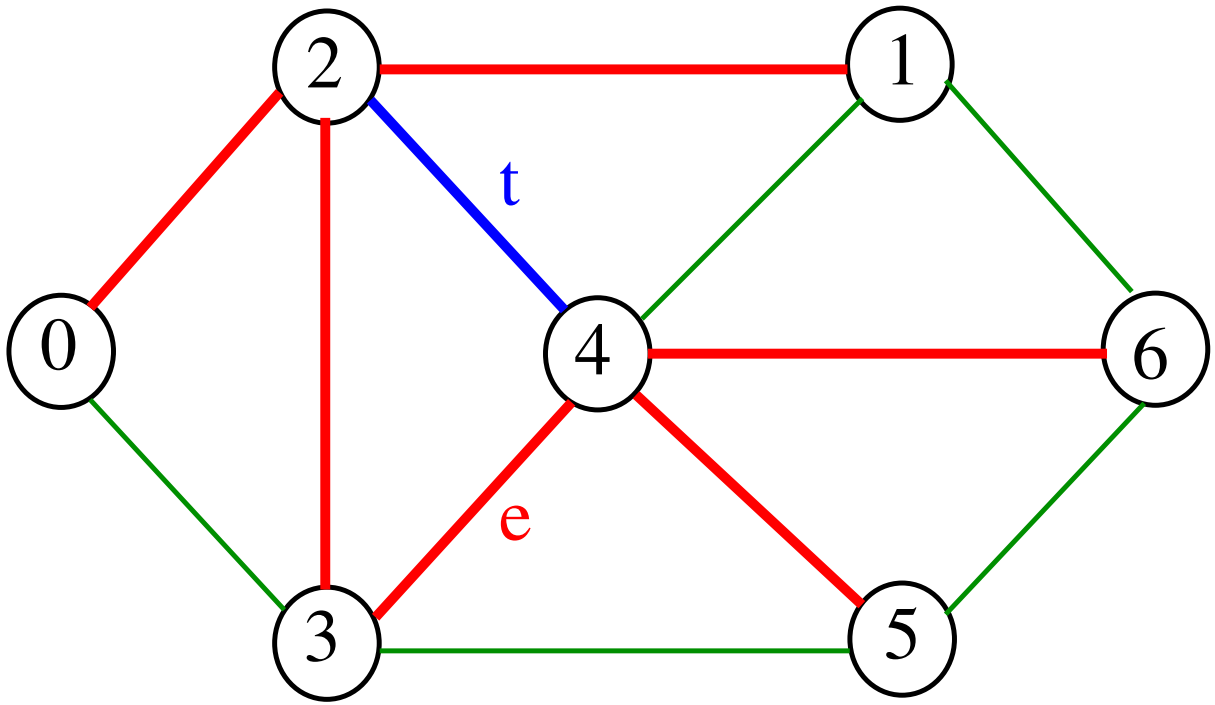
Exemplo: T-t



Segunda propriedade da troca de arestas

Seja T uma árvore geradora de um grafo G
Para qualquer aresta t de T, se $e \in D(T, t)$ então
$T - t + e$ é uma árvore geradora.

Exemplo: T-t+e



Propriedade fundamental

Se T é árvore geradora de G, t é uma aresta de T e e é uma aresta fora de T, então

Propriedade fundamental

Se T é árvore geradora de G, t é uma aresta de T e e é uma aresta fora de T, então

$$t \in C(T, e) \iff e \in D(T, t).$$

Propriedade fundamental

Se T é árvore geradora de G, t é uma aresta de T e e é uma aresta fora de T, então

$$t \in C(T, e) \iff e \in D(T, t).$$

Dem: São equivalentes

- $t \in C(T, e)$
- t está no caminho em T que liga as pontas de e
- $T - t$ não tem caminho entre as pontas de e
- $e \in D(T, t)$.

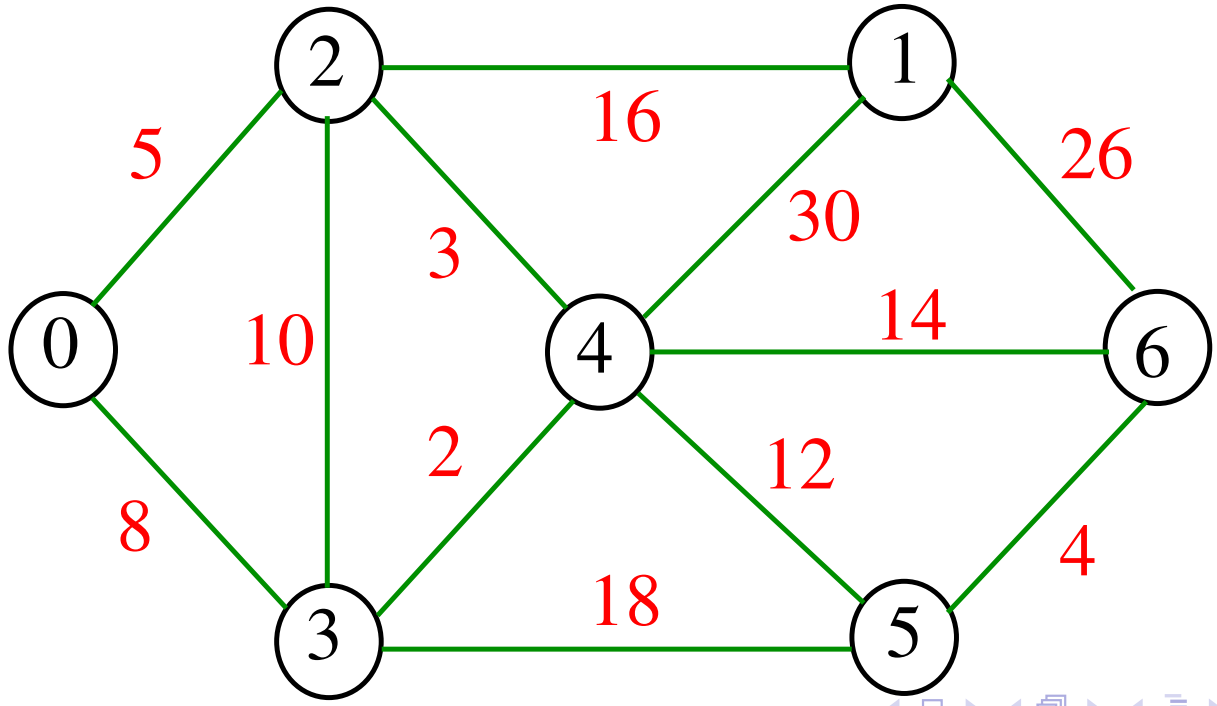
Árvores geradoras de custo mínimo

S 20.1 e 20.2

Árvores geradoras mínimas

Uma **árvore geradora mínima** (= *minimum spanning tree*), ou MST, de um grafo com custos nas arestas é qualquer árvore geradora do grafo que tenha custo mínimo

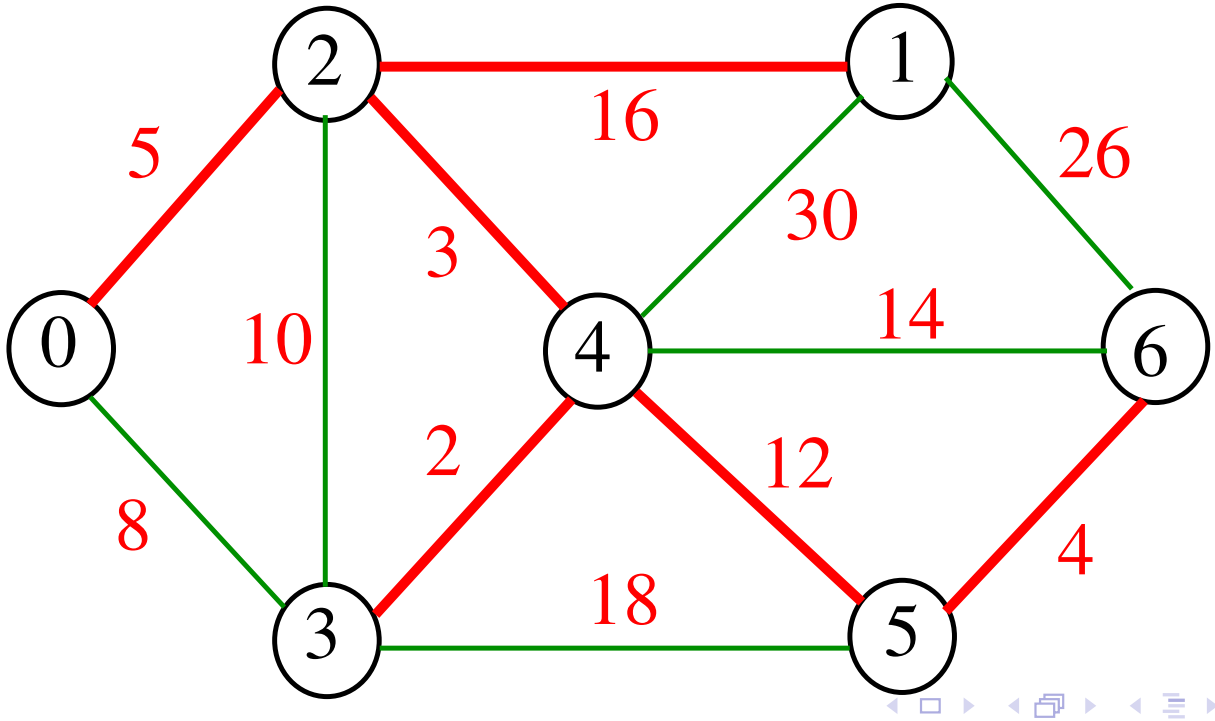
Exemplo: um grafo com custos nas arestas



Árvores geradoras mínimas

Uma **árvore geradora mínima** (= *minimum spanning tree*), ou MST, de um grafo com custos nas arestas é qualquer árvore geradora do grafo que tenha custo mínimo

Exemplo: MST de custo 42

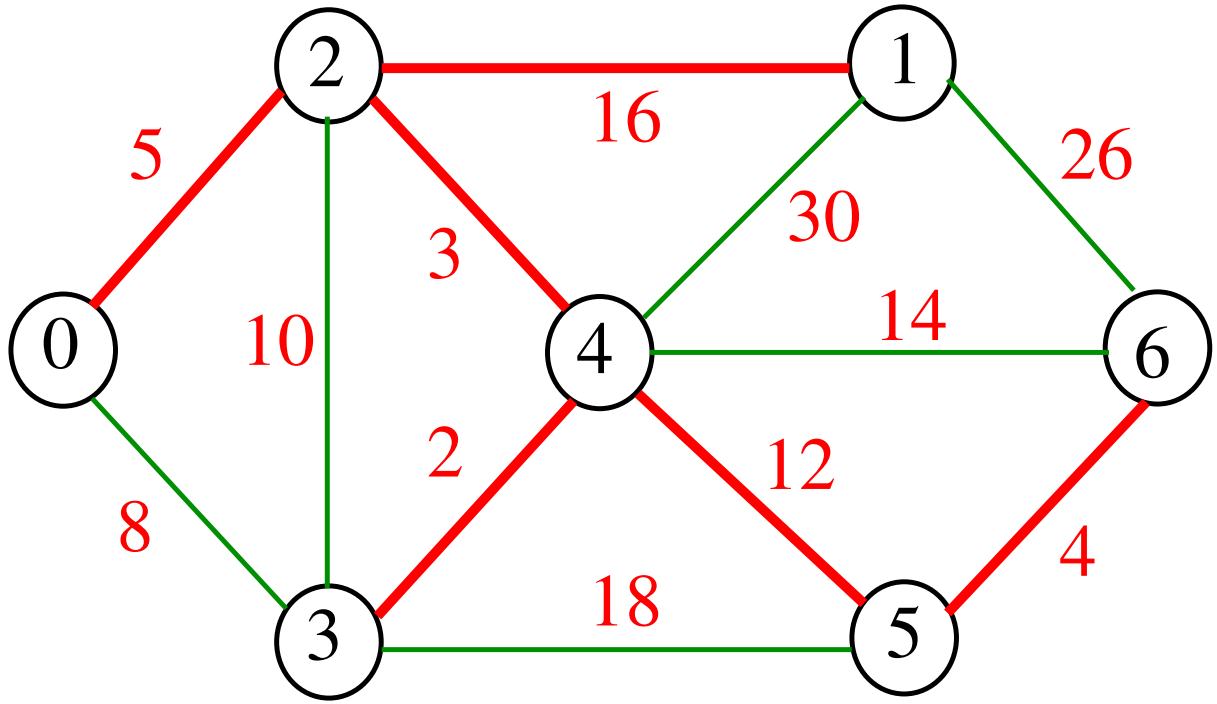


Problema MST

Problema: Encontrar uma MST de um grafo G com custos nas arestas

O problema tem solução se e somente se o grafo G é conexo

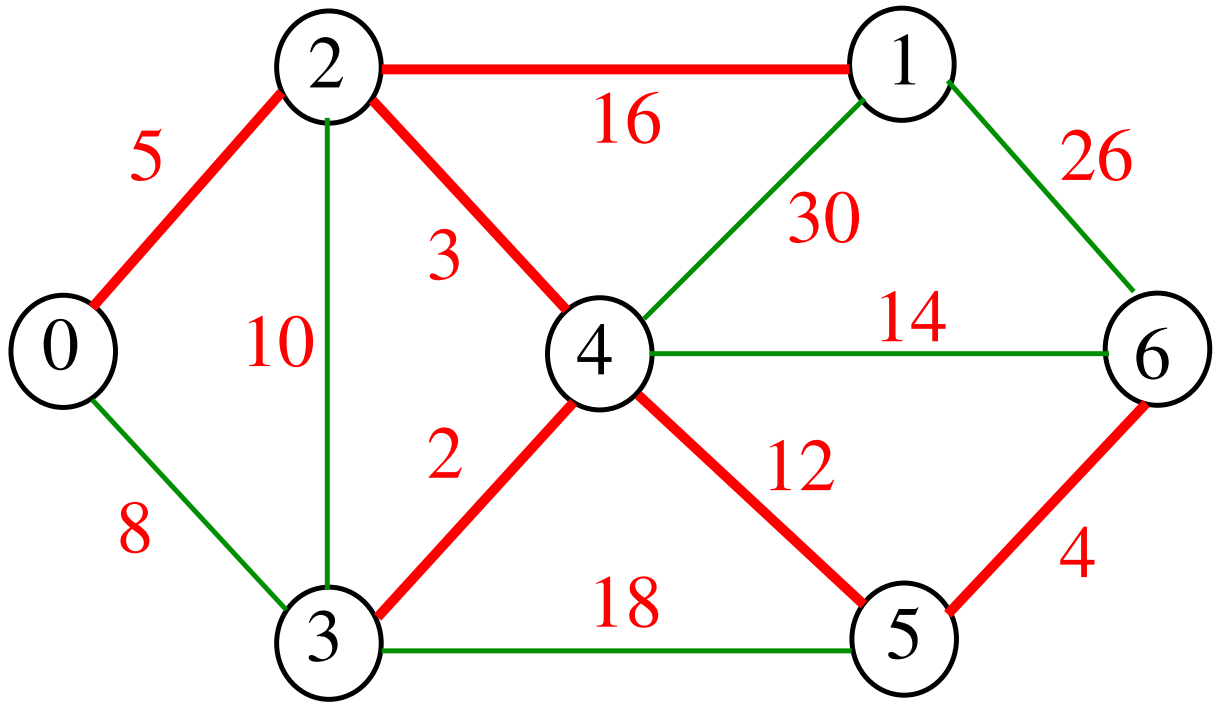
Exemplo: MST de custo 42



Propriedade dos ciclos

Condição de Otimalidade: Se T é uma MST então toda aresta e fora de T tem custo máximo dentre as arestas do ciclo fundamental T, e.

Exemplo: MST de custo 42



Demonstração da recíproca

Seja T uma árvore geradora satisfazendo a condição de otimalidade.

Vamos mostrar que T é uma MST.

Seja M uma MST tal que o número de arestas comuns entre T e M seja máximo.

Se $T = M$ não há o que demonstrar.

Suponha que $T \neq M$ e seja e uma aresta de custo mínimo dentre as arestas que estão em M mas não estão em T.

Seja d uma aresta qualquer que **não está** em M mas **está** no ciclo fundamental $C(T, e)$.

Demonstração da recíproca

Seja T uma árvore geradora satisfazendo a condição de otimalidade.

Vamos mostrar que T é uma MST.

Seja M uma MST tal que o número de arestas comuns entre T e M seja máximo.

Se $T = M$ não há o que demonstrar.

Suponha que $T \neq M$ e seja e uma aresta de custo mínimo dentre as arestas que estão em M mas não estão em T.

Seja d uma aresta qualquer que **não está** em M mas **está** no ciclo fundamental $C(T, e)$.

Continuação

Logo, $\texttt{custo}(\texttt{d}) \leq \texttt{custo}(\texttt{e})$ (1).
Seja $\texttt{f}$ uma aresta qualquer em $C(\texttt{M}, \texttt{d}) - \texttt{T}$.
Como $\texttt{M}$ é uma MST, $\texttt{custo}(\texttt{f}) \leq \texttt{custo}(\texttt{d})$ (2).
Pela escolha de $\texttt{e}$, $\texttt{custo}(\texttt{e}) \leq \texttt{custo}(\texttt{f})$ (3).
Juntando (1), (2) e (3), vem que

$$\texttt{custo}(\texttt{d}) = \texttt{custo}(\texttt{f}) = \texttt{custo}(\texttt{e})$$

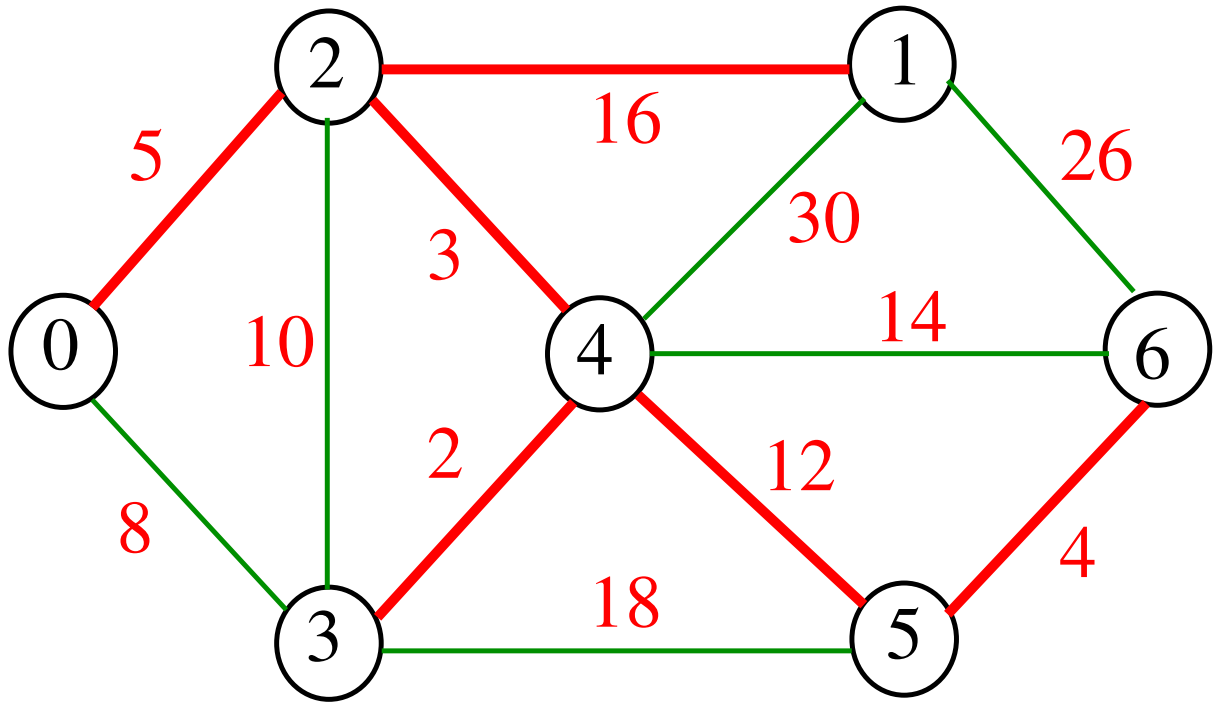
Mas então, $\texttt{M}-\texttt{f}+\texttt{d}$ é uma MST que tem o mesmo custo que $\texttt{M}$, logo é mínima. Por outro lado, tem uma aresta a mais em comum com $\texttt{T}$ do que $\texttt{M}$. Isso contradiz a escolha de $\texttt{M}$.

Portanto, $\texttt{T} = \texttt{M}$, o que mostra que $\texttt{T}$ é uma MST.

Propriedade dos cortes

Condição de Otimalidade: `T` é uma MST se e somente se cada aresta `t` de `T` é uma aresta mínima no corte fundamental `T`, `t`.

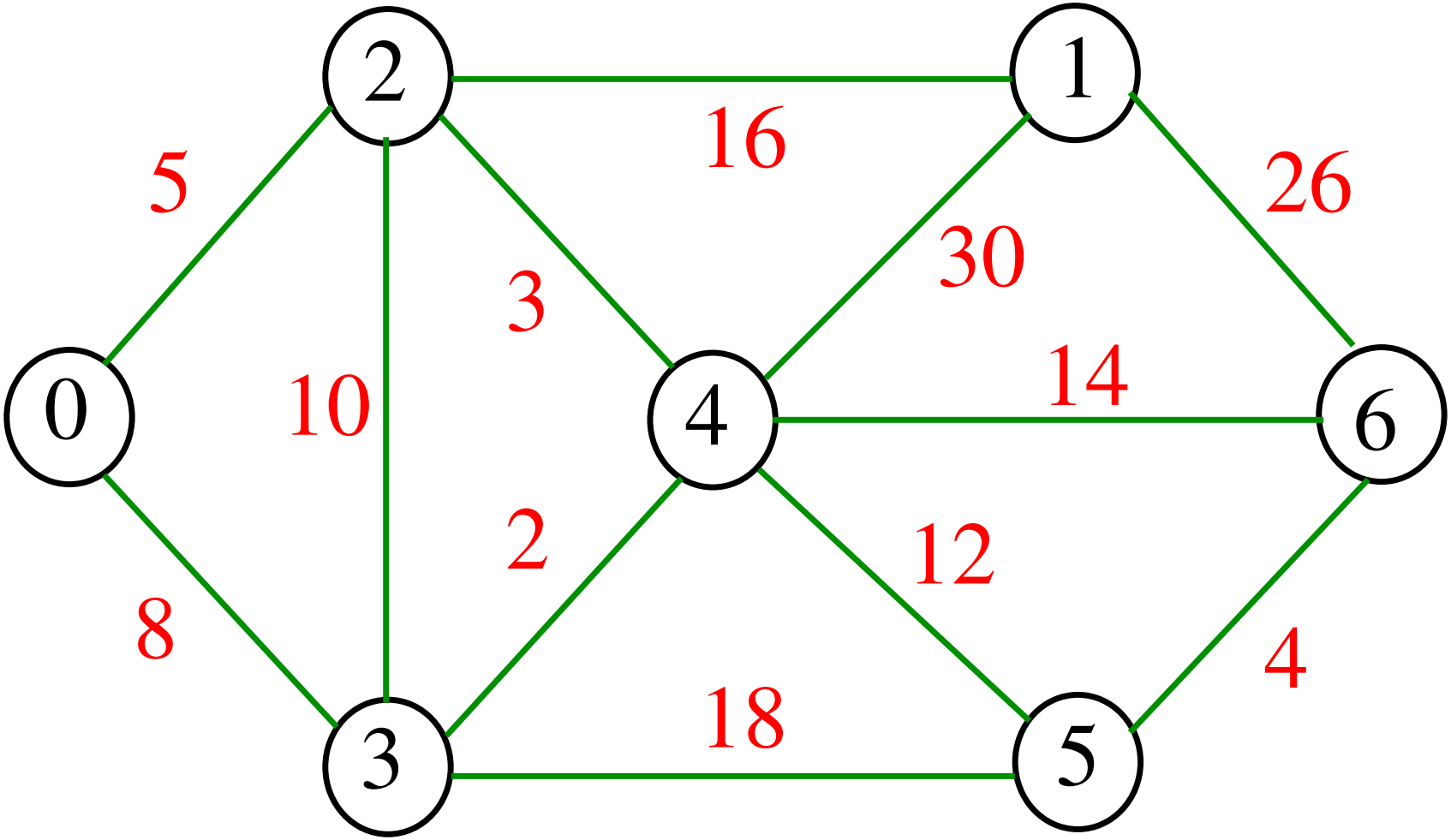
Exemplo: MST de custo 42



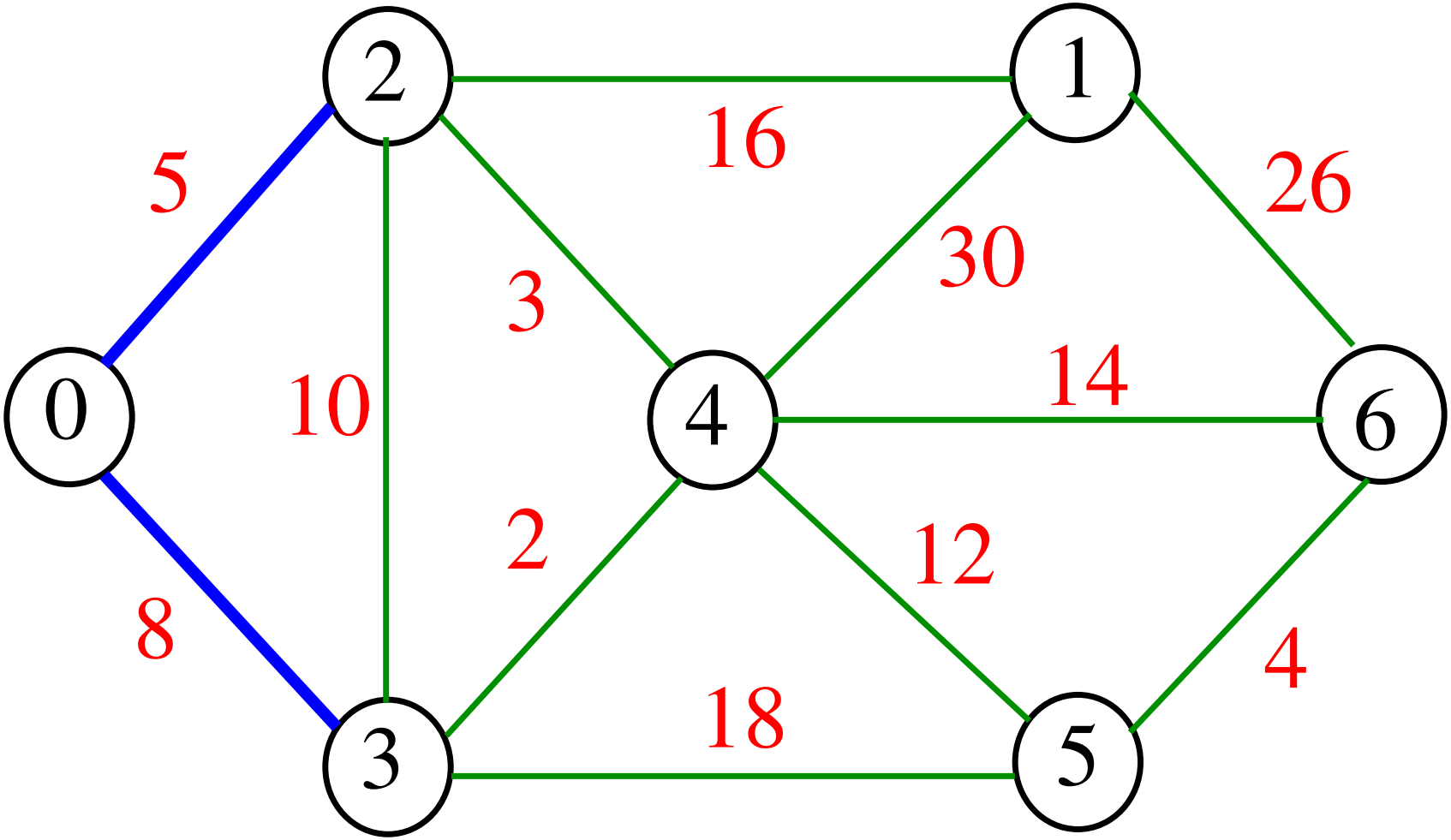
Algoritmo de Prim

S 20.3

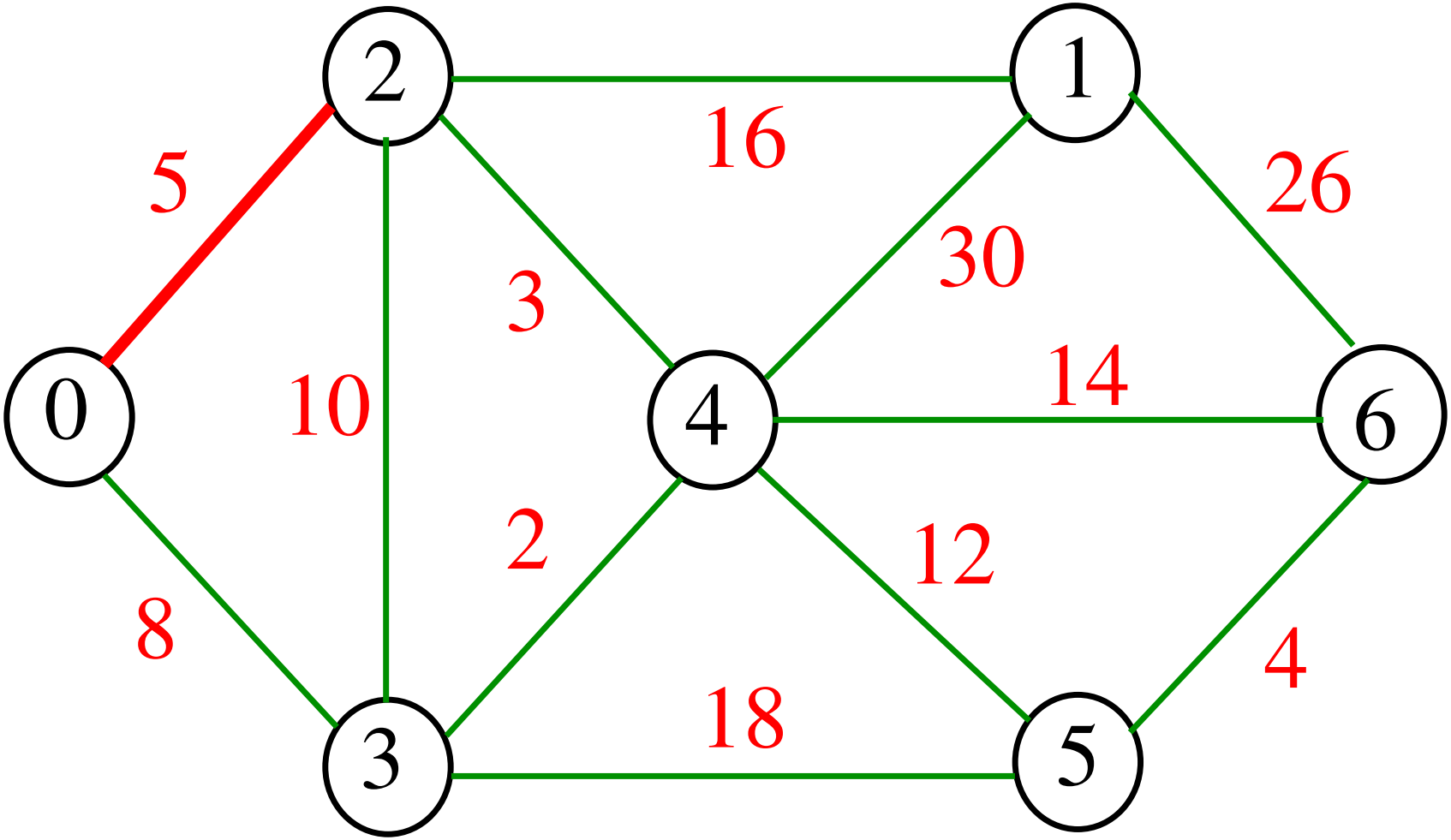
Simulação



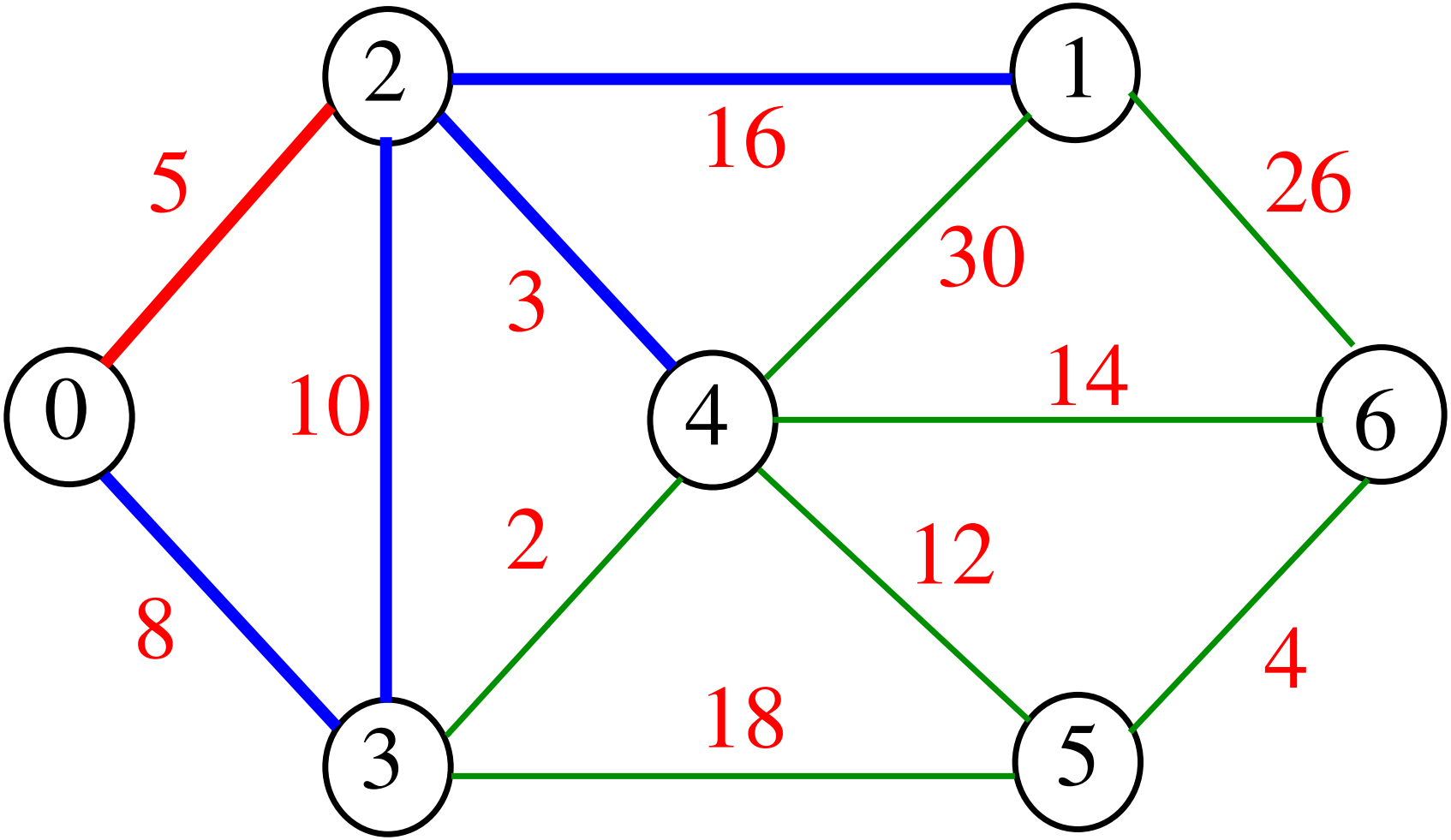
Simulação



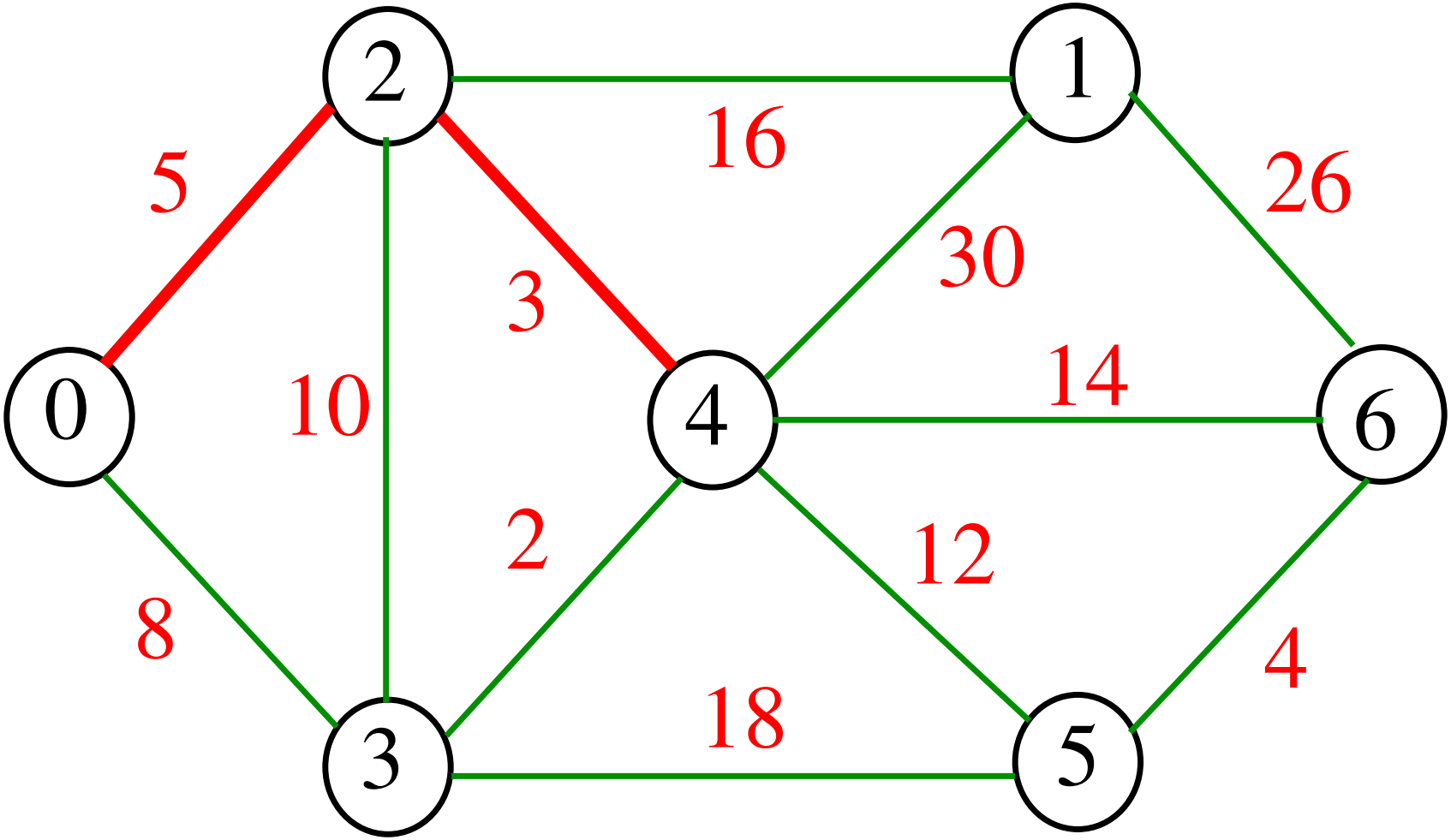
Simulação



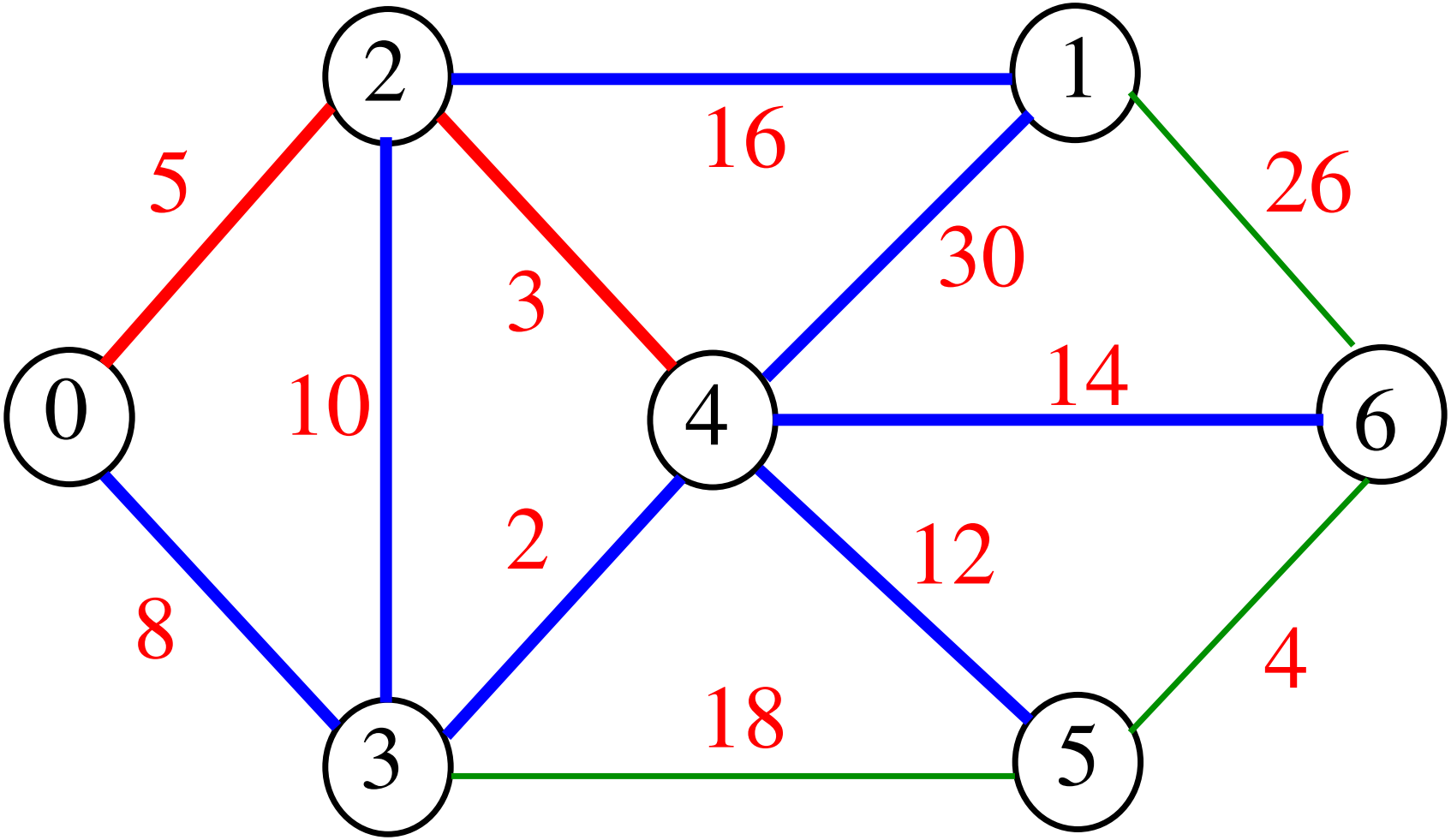
Simulação



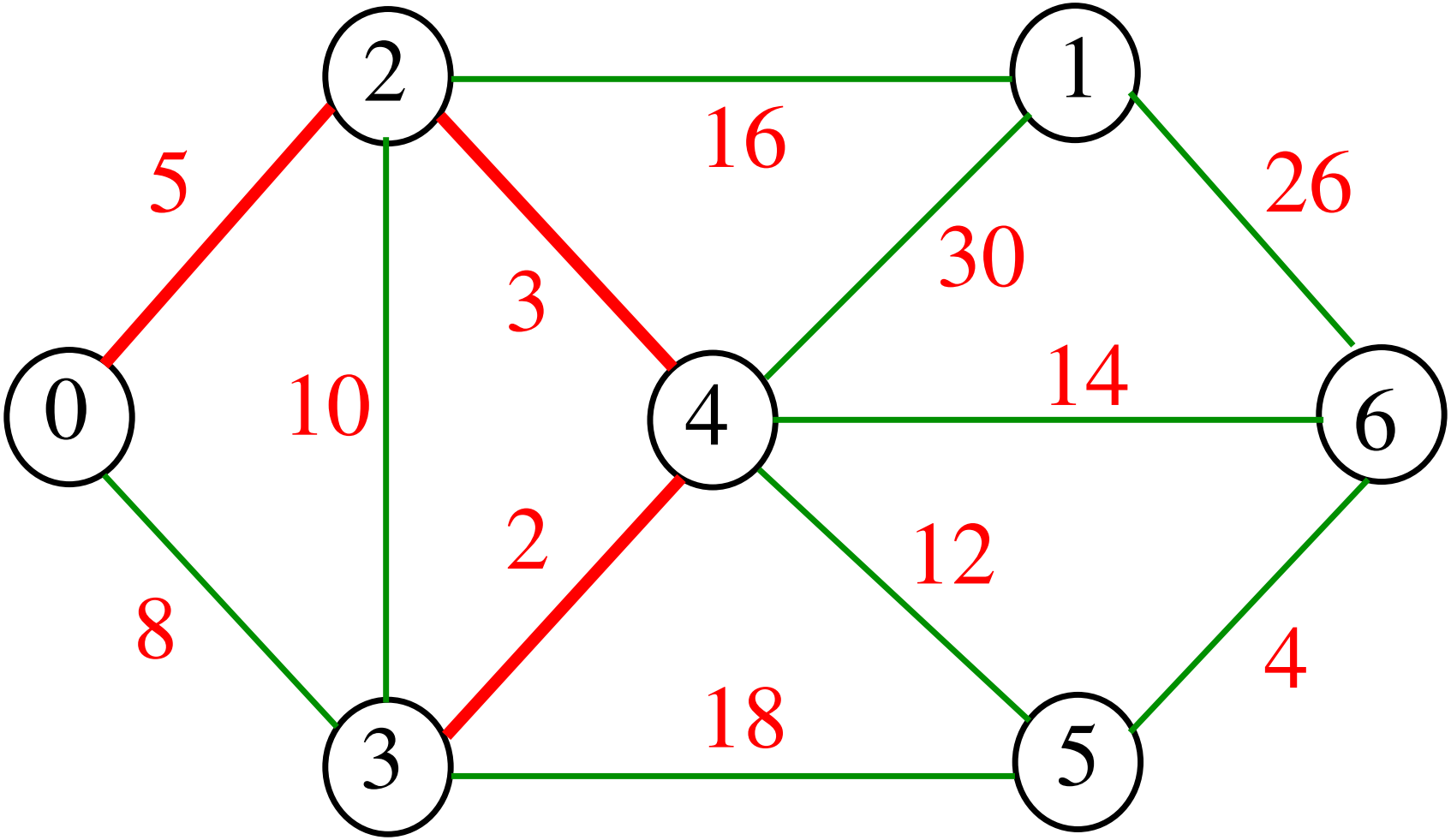
Simulação



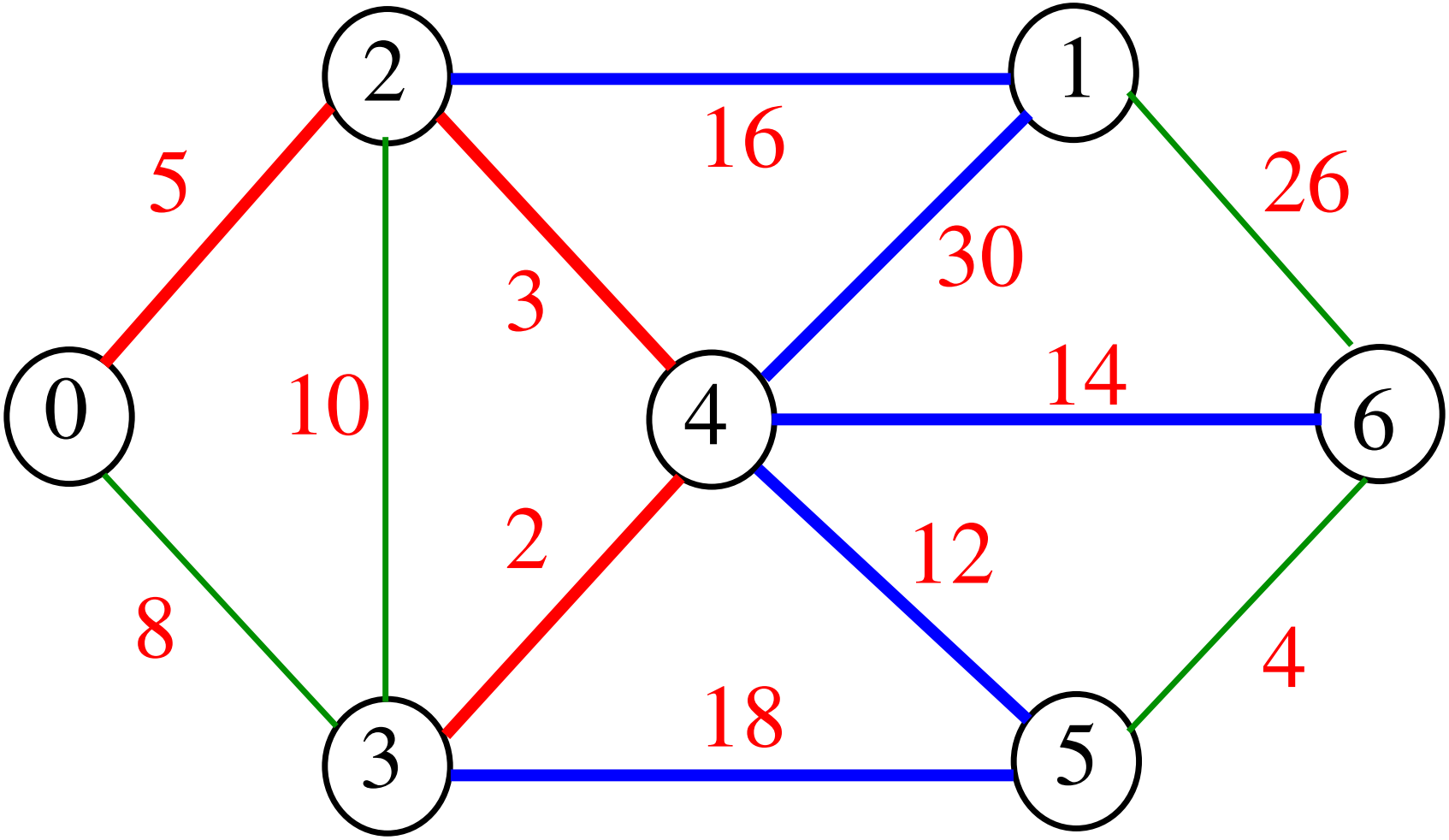
Simulação



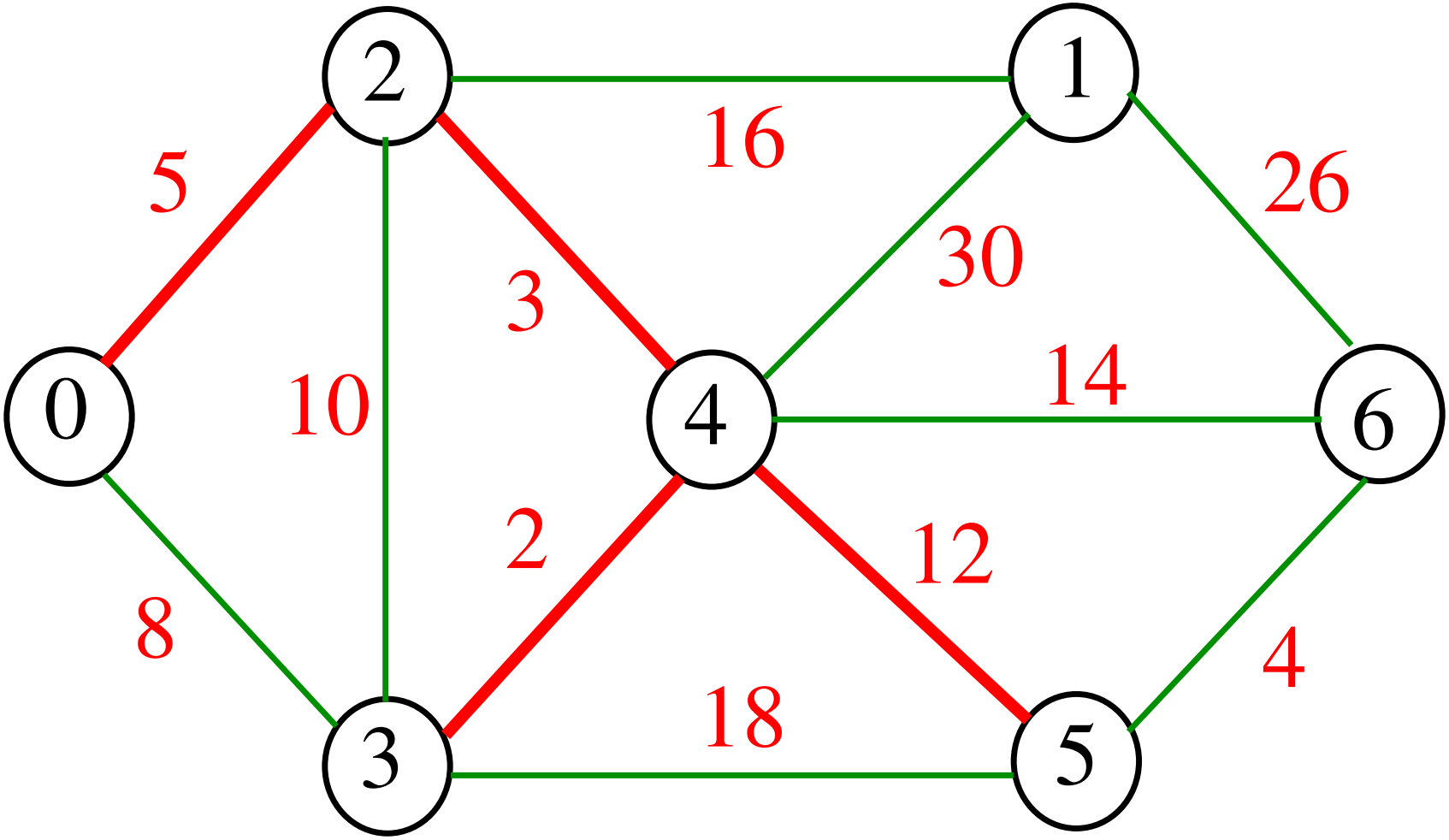
Simulação



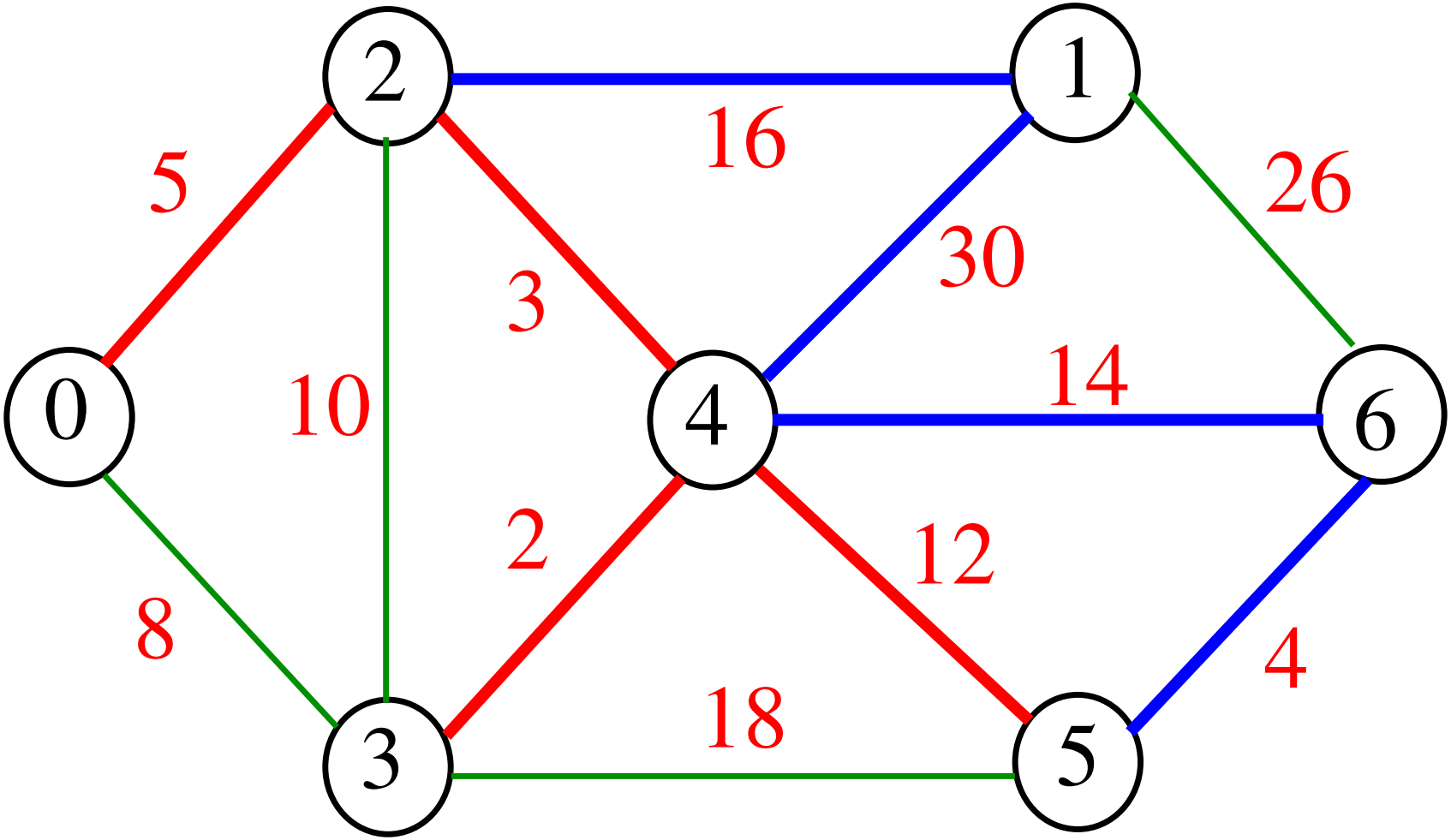
Simulação



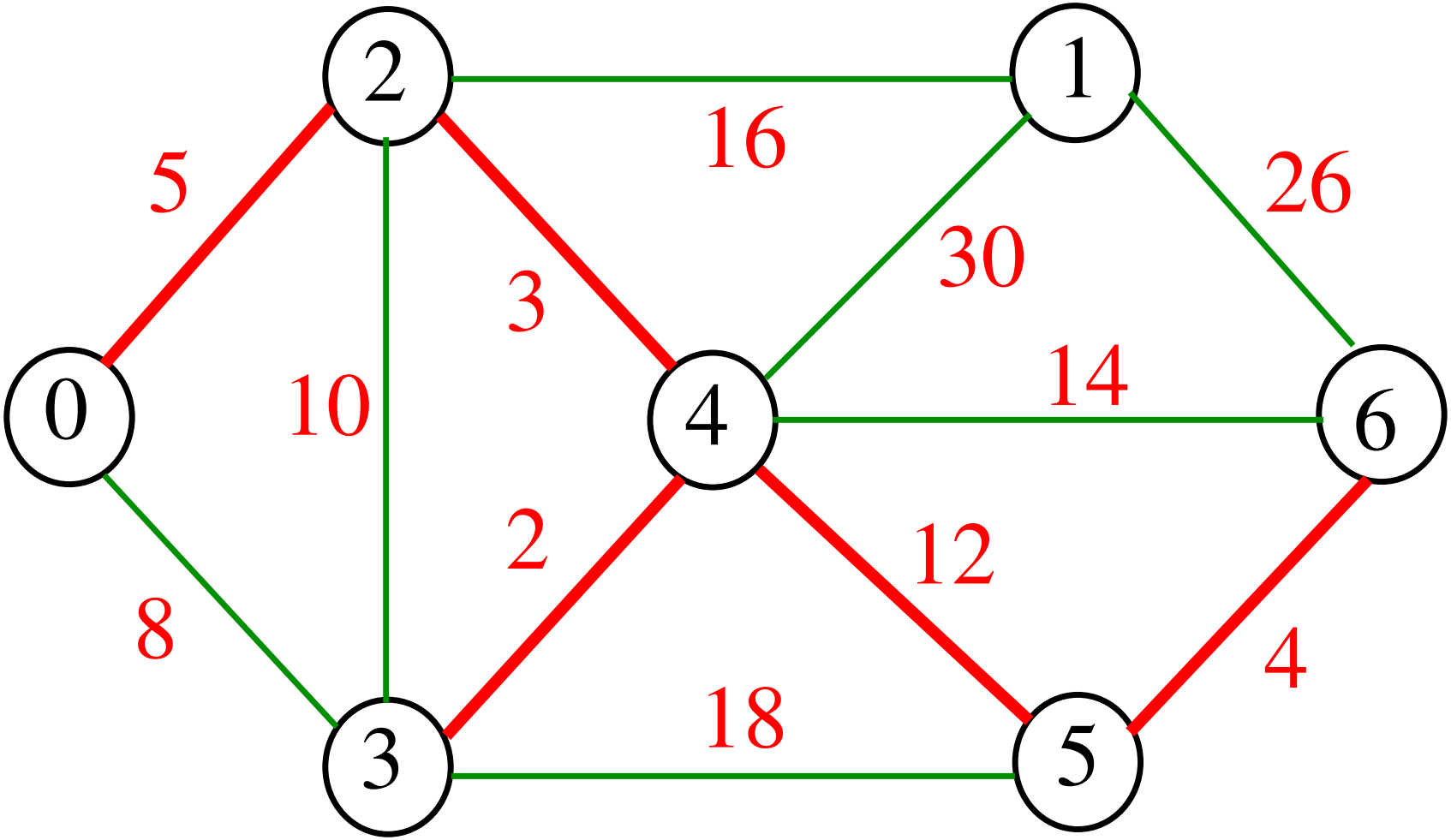
Simulação



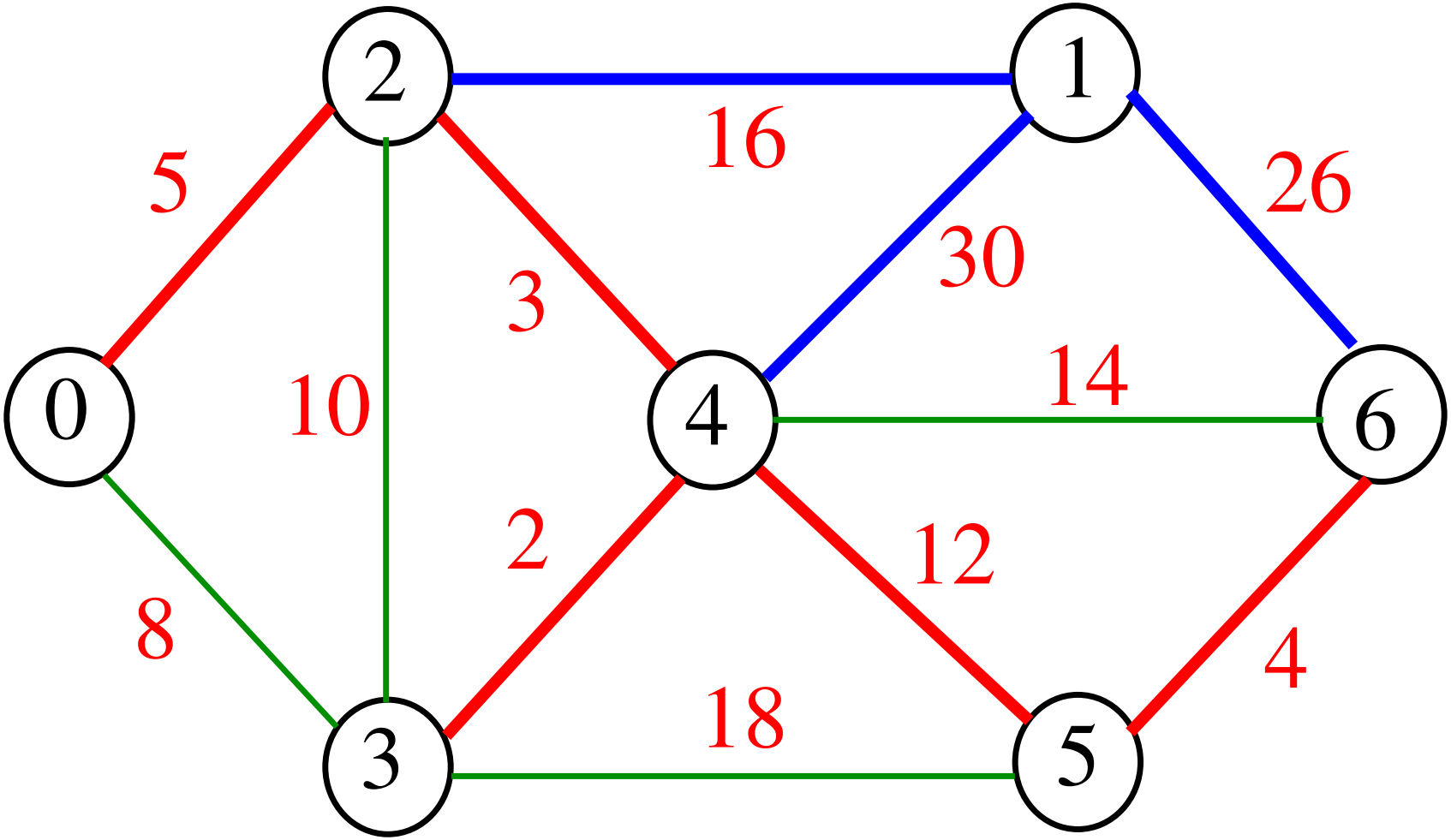
Simulação



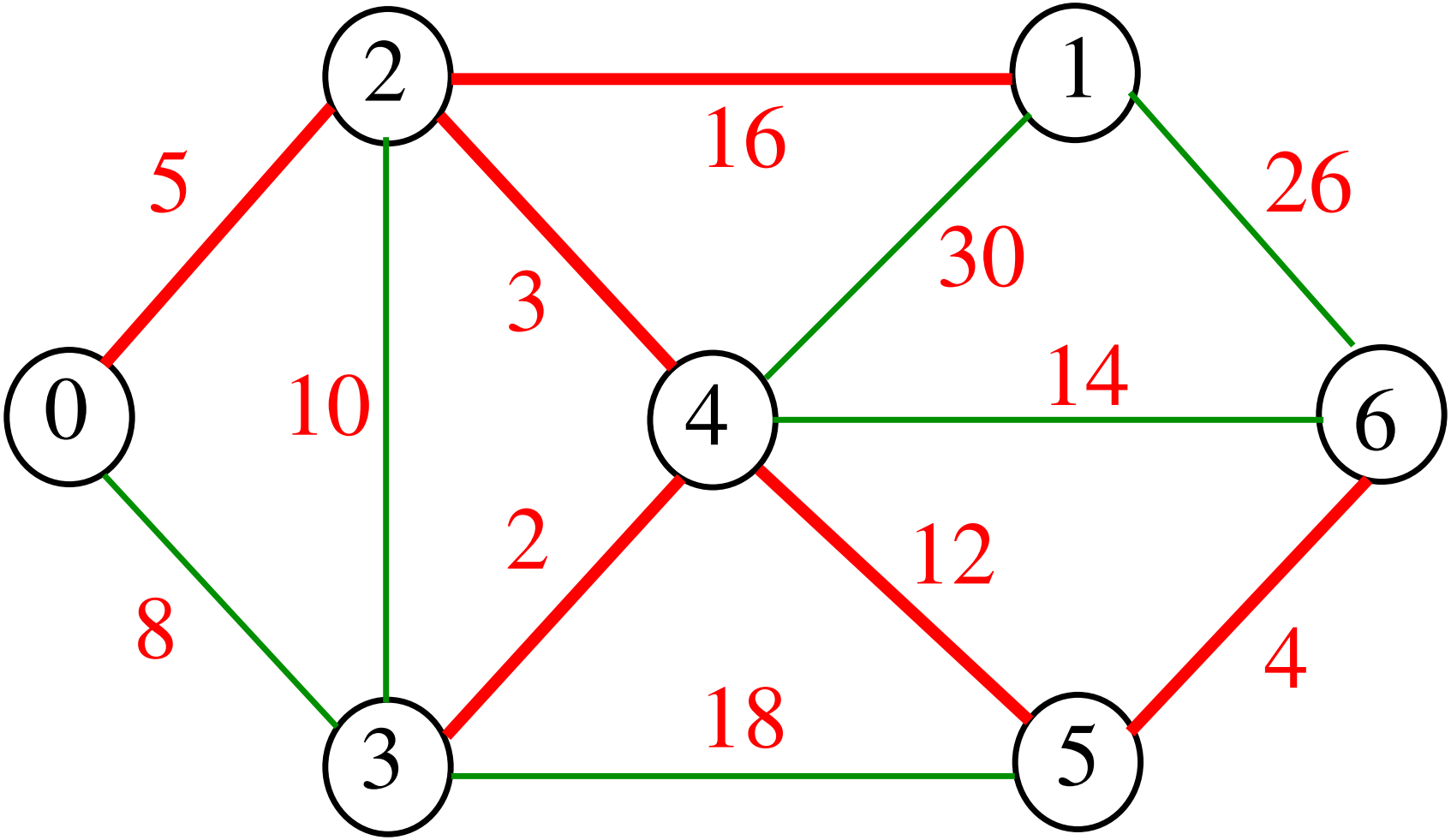
Simulação



Simulação



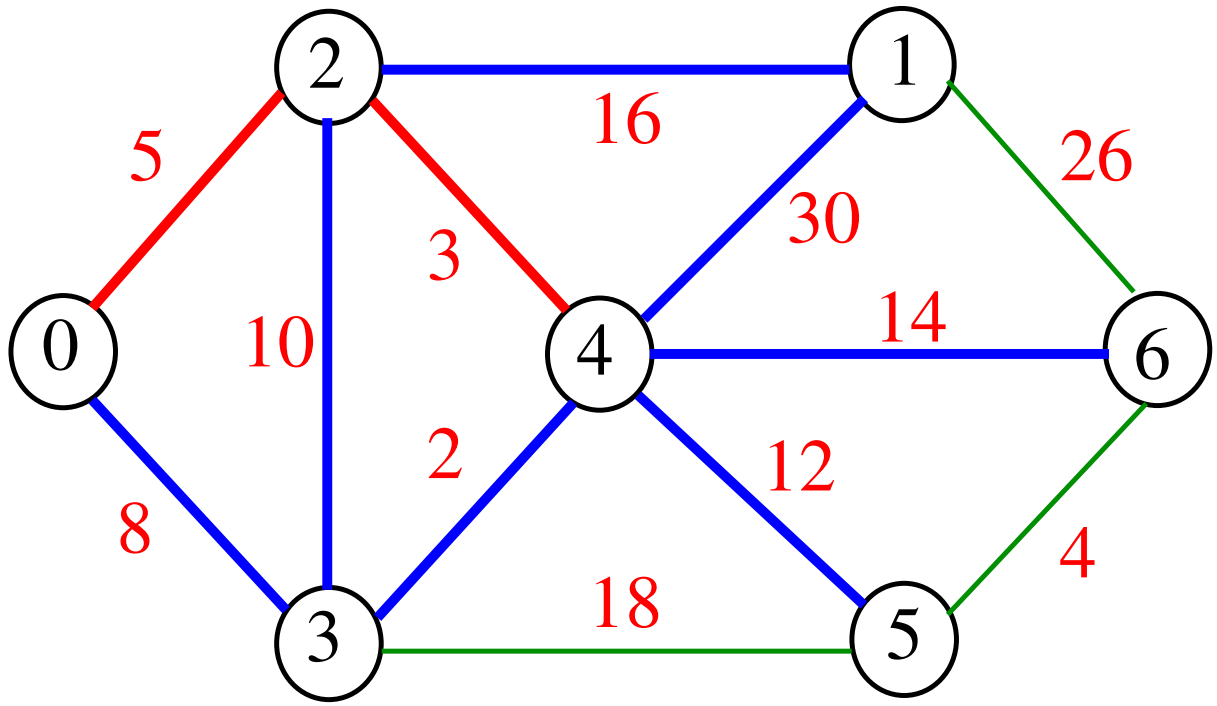
Simulação



Franja

A **franja** (= *fringe*) de uma subárvore T é o conjunto de todas as arestas que têm uma ponta em T e outra ponta fora

Exemplo: As arestas em azul formam a franja de T



Algoritmo de Prim

O algoritmo de Prim é iterativo.

Cada iteração começa com uma subárvore T de G.

No início da primeira iteração T é um árvore com apenas 1 vértice.

Cada iteração consiste em:

Caso 1: franja de T é vazia
Devolva T e pare.

Caso 2: franja de T não é vazia
Seja e uma aresta de custo mínimo na franja de T
Faça $T \leftarrow T + e$

Relação invariante chave

No início de cada iteração vale que

existe uma MST que contém as arestas em T.

Se a relação vale no **início da última** iteração então é evidente que, se o grafo é conexo, o algoritmo devolve uma **MST**.

Demonstração. Vamos mostrar que se a relação vale no início de uma iteração que não seja a última, então ela vale no fim da iteração com `T+e` no papel de `T`.

A relação invariante certamente vale no início da primeira iteração.

Demonstração

Considere o início de uma iteração qualquer que não seja a última.

Seja e a aresta escolhida pela iteração no caso 2. Pela relação invariante existe uma MST M que contém T.

Se e está em M, então não há o que demonstrar. Suponha, portanto, que e não está em M.

Seja t uma aresta que está $C(\mathtt{M}, \mathtt{e})$ que está na franja de T. Pela escolha de e feita pelo algoritmo, $\mathtt{custo}(\mathtt{e}) \leq \mathtt{custo}(\mathtt{t})$.

Portanto, M−t+e é uma MST que contém T+e.

Implementações do algoritmo de Prim

S 20.3

Implementação grosseira

A função abaixo recebe um grafo `G` com custos nas arestas e calcula uma MST da componente que contém o vértice **0**.

```
void bruteforcePrim(Graph G, Vertex parnt[]){
 0    Vertex v , w ;
 1    for (v =0;v < G->V; v++) parnt[v] = -1;
 3    parnt[0] = 0;
```

Implementação grosseira

```
 4   while (1) {
 5   double mincst = INFINITO;
 6   Vertex v0, w0;
 7   for (w = 0; w < G->V ; w++)
 8       if (parnt[w] == -1)
 9       for (v = 0; v < G->V ; v++)
10           if (parnt[v] != -1
                 && mincst > G->adj[v][w])
11           mincst = G->adj[v0 = v][w0 = w];
12   if (mincst == INFINITO) break;
13   parnt[w0] = v0;
14   }
}
```

Implementações eficientes

Uma idéia que leva a implementações mais eficientes do algoritmo de Prim é considerar:

Dada uma árvore não-geradora do grafo, o **custo de um vértice** `w` que está fora da árvore é o custo de uma aresta mínima dentre as que incidem em `w` e estão na franja da árvore.

Se nenhuma aresta da franja incide em `w`, o custo de `w` é `INFINITO`.

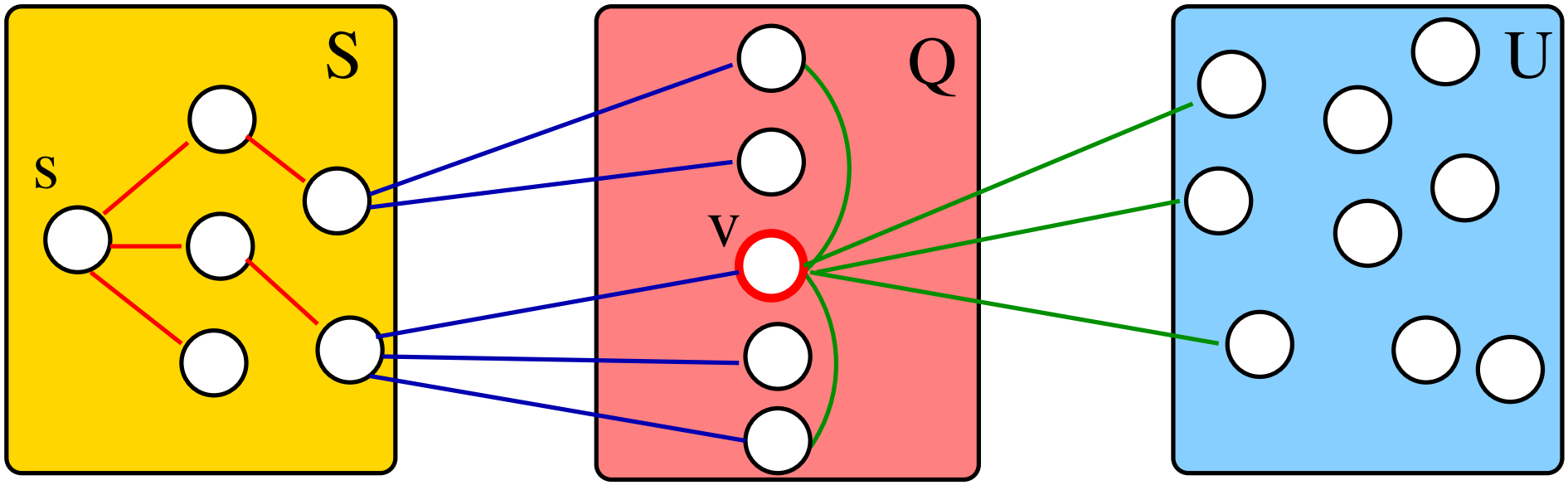
Implementações eficientes

Nas implementações que examinaremos, o custo do vértice `w` em relação à árvore é `cst[w]`.

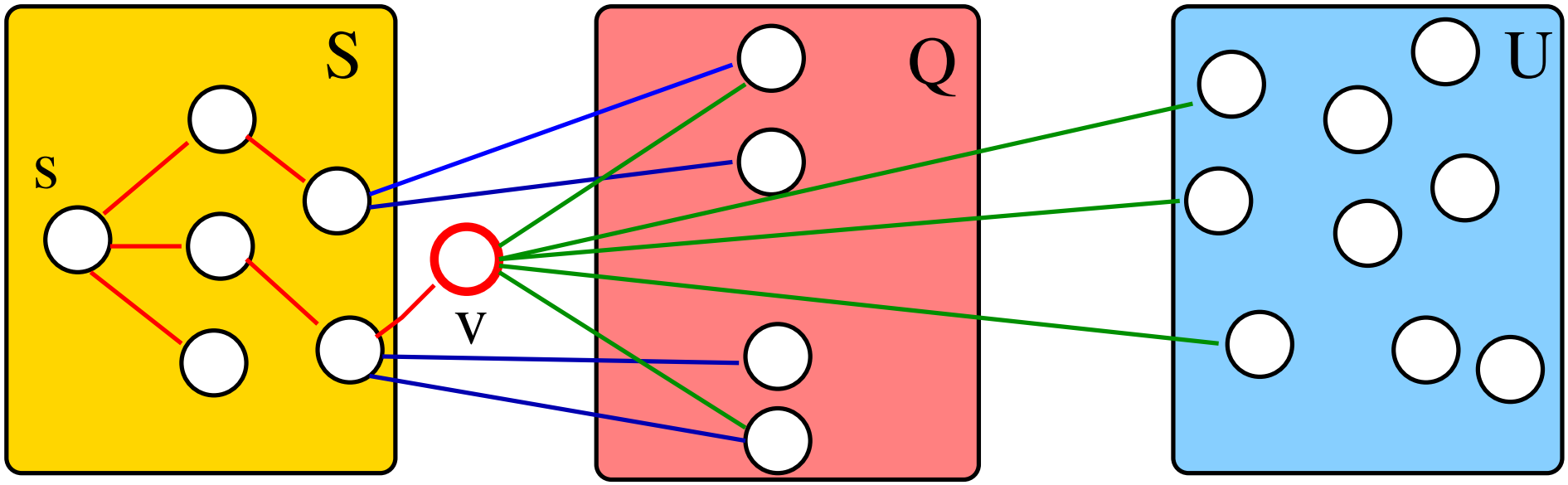
Para cada vértice `w` fora da árvore, o vértice `fr[w]` está na árvore e a aresta que liga `w` a `fr[w]` tem custo `cst[w]`.

Cada iteração do algoritmo de Prim escolhe um vértice `w` fora da árvore e adota `fr[w]` como valor de `parnt[w]`.

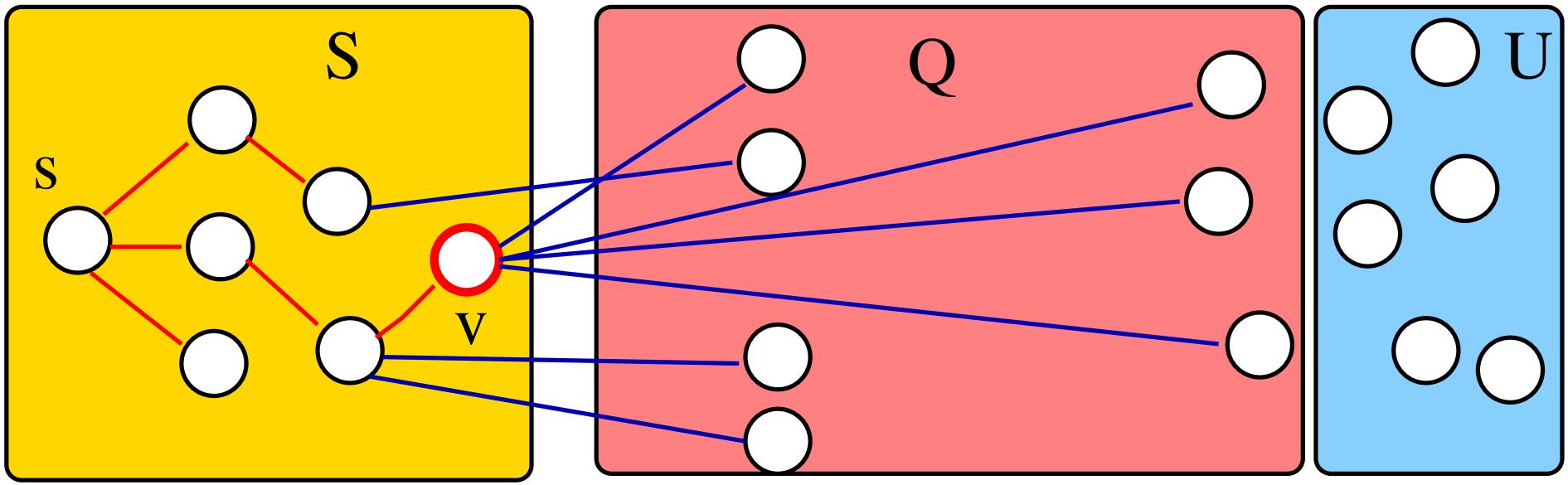
Iteração



Iteração



Iteração



Implementação eficiente para grafos densos

Recebe grafo G com custos nas arestas e calcula uma MST da componente de G que contém o vértice 0.
A função armazena a MST no vetor parnt, tratando-a como uma arborescência com raiz 0.
O grafo G é representado por sua matriz de adjacência.

```
void GRAPHmstP1 (Graph G, Vertex parnt[]){
1    double cst[maxV]; Vertex v , w , fr[maxV];
2    for (v = 0; v < G->V ; v++) {
3        parnt[v] = -1;
4        cst[v] = INFINITO;
     }
5    v = 0;    fr[v] = v ;    cst[v] = 0;
```

```
 6   while (1) {
 7   double mincst= INFINITO;
 8   for (w = 0; w < G->V ; w ++)
 9       if (parnt[w] == -1 && mincst> cst[w])
10           mincst = cst[v = w];
11   if (mincst == INFINITO) break;
12   parnt[v] = fr[v];
13   for (w = 0; w < G->V ; w++)
14       if (parnt[w] == -1
             && cst[w] > G->adj[v][w]) {
15           cst[w] = G->adj[v][w];
16           fr[w] = v ;
         }
     }
}
```

Consumo de tempo

O consumo de tempo da função `GRAPHmstP1` é $O(V^2)$.

Este consumo de tempo é ótimo para **digrafos densos**.

Recordando Dijkstra para digrafos densos

```
#define INFINITO maxCST

void
DIGRAPHsptD1 (Digraph G, Vertex s,
              Vertex parnt[], double cst[]) {
1   Vertex w, w0, fr[maxV];
2   for (v = 0; v < G->V ; v++) {
3       parnt[v] = -1;
4       cst[v] = INFINITO;
5   }
6   fr[s] = s ;
7   cst[s] = 0;
```

```
 8 while (1) {
 9   double mincst = INFINITO;
10   for (w = 0; w < G->V ; w++)
11       if (parnt[w]==-1 && mincst>cst[w])
12           mincst = cst[v =w];
13   if (mincst == INFINITO) break;
14   parnt[v] = fr[v];
15   for (w = 0; w < G->V ; w++)
16       if(cst[w]>cst[v]+G->adj[v][w]){
17           cst[w] = cst[v]+G->adj[v][w];
18           fr[w] = v ;
         }
     }
}
```

Implementação para grafos esparsos

Recebe grafo `G` com custos nas arestas e calcula uma MST da componente de `G` que contém o vértice 0.

A função armazena a MST no vetor `parnt`, tratando-a como uma arborescência com raiz 0.

O grafo `G` é representado por listas de adjacência.

GRAPHmstP2

```
#define INFINITO maxCST
void GRAPHmstP2 (Graph G, Vertex parnt[]){
1   Vertex v , w , fr[maxV]; link p ;
2   for (v = 0; v < G->V ; v++) {
3       cst[v] = INFINITO;
4       parnt[v] = -1;
    }
5   PQinit(G->V);
6   cst[0] = 0;
7   fr[0] = 0;
8   PQinsert(0);
```

```
 9   while (!PQempty()) {
10   v = PQdelmin();
11   parnt[v] = fr[v];
12   for (p = G->adj[v]; p; p = p->next){
13       w = p->w ;
14       if (parnt[w] == -1){
15           if (cst[w] == INFINITO){
16               cst[w] = p->cst;
17               fr[w] = v ;
18               PQinsert(w);
             }
```

```
19              else if (cst[w] > p->cst){
20                  cst[w] = p->cst;
21                  fr[w] = v ;
22                  PQdec(w);
                }
            } /* if (parnt[w] ...*/
    } /* for (p...*/
    } /* while ...
}
```

Consumo de tempo

O consumo de tempo da função `GRAPHmstP2` implementada com um min-heap é $O(E \lg V)$.

Recordando Dijkstra para digrafos esparsos

```
#define INFINITO maxCST
void dijkstra(Digraph G, Vertex s ,
        Vertex parnt[], double cst[]);
{
1   Vertex v , w ; link p ;
2   for (v = 0; v < G->V ; v++) {
3       cst[v] = INFINITO;
4       parnt[v] = -1;
    }
5   PQinit(G->V);
6   cst[s] = 0;
7   parnt[s] = s ;
8   PQinsert(s);
```

```
 9   while (!PQempty()) {
10       v = PQdelmin();
11       for(p =G->adj[v]; p; p = p->next)
12           w = p ->w ;
12           if (cst[w]==INFINITO) {
13               cst[w]=cst[v]+p->cst;
14               parnt[w]=v ;
15               PQinsert(w);
             }
```

```
16              else
17              if(cst[w]>cst[v]+p->cst)
18                  cst[w]=cst[v]+p->cst
19                  parnt[w] = v ;
20                  PQdec(w);
                }
21      PQfree();
        }
}
```