Alguns parâmetros clássicos

Alguns parâmetros clássicos

São números associados a grafos que refletem parte da sua estrutura, e estão relacionados a problemas interessantes.

Alguns parâmetros clássicos

São números associados a grafos que refletem parte da sua estrutura, e estão relacionados a problemas interessantes.

Os que vamos ver são fáceis de computar para um grafo se tivermos o valor para cada componente conexa. Por isso, basta estudar em grafos conexos.

Alguns parâmetros clássicos

São números associados a grafos que refletem parte da sua estrutura, e estão relacionados a problemas interessantes.

Os que vamos ver são fáceis de computar para um grafo se tivermos o valor para cada componente conexa. Por isso, basta estudar em grafos conexos.

Os que veremos aqui são difíceis de computar, em geral.

Alguns parâmetros clássicos

São números associados a grafos que refletem parte da sua estrutura, e estão relacionados a problemas interessantes.

Os que vamos ver são fáceis de computar para um grafo se tivermos o valor para cada componente conexa. Por isso, basta estudar em grafos conexos.

Os que veremos aqui são difíceis de computar, em geral.

É interessante ver o que acontece com subgrafos e subgrafos induzidos.

Número cromático

Número cromático

Uma coloração (de vértices) de um grafo é uma função dos vértices a um conjunto de "cores", tal que vértices adjacentes recebem cores diferentes. Se o conjunto de cores tem tamanho k, ela é uma k-coloração.

Número cromático

Uma coloração (de vértices) de um grafo é uma função dos vértices a um conjunto de "cores", tal que vértices adjacentes recebem cores diferentes. Se o conjunto de cores tem tamanho k, ela é uma k-coloração.

Uma coloração com muitas cores é fácil.

Número cromático

Uma coloração (de vértices) de um grafo é uma função dos vértices a um conjunto de "cores", tal que vértices adjacentes recebem cores diferentes. Se o conjunto de cores tem tamanho k, ela é uma k-coloração.

Uma coloração com muitas cores é fácil.

O número cromático de G, $\chi(G)$, é o menor inteiro k tal que G tem uma k-coloração.

Número cromático

Uma coloração (de vértices) de um grafo é uma função dos vértices a um conjunto de "cores", tal que vértices adjacentes recebem cores diferentes. Se o conjunto de cores tem tamanho k, ela é uma k-coloração.

Uma coloração com muitas cores é fácil.

O número cromático de G, $\chi(G)$, é o menor inteiro k tal que G tem uma k-coloração.

G é k-cromático se $\chi(G) = k$

Número cromático

Uma coloração (de vértices) de um grafo é uma função dos vértices a um conjunto de "cores", tal que vértices adjacentes recebem cores diferentes. Se o conjunto de cores tem tamanho k, ela é uma k-coloração.

Uma coloração com muitas cores é fácil.

O número cromático de G, $\chi(G)$, é o menor inteiro k tal que G tem uma k-coloração.

G é k-cromático se $\chi(G) = k$

Se H é subgrafo de G, então $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Clique máximo

Clique máximo

Um grafo é completo se todos os pares de vértices são adjacentes.

Clique máximo

Um grafo é completo se todos os pares de vértices são adjacentes.

Um clique num grafo é um subgrafo completo.

Clique máximo

Um grafo é completo se todos os pares de vértices são adjacentes.

Um clique num grafo é um subgrafo completo. Existem divergências quanto ao gênero da palavra *clique*.

Clique máximo

Um grafo é completo se todos os pares de vértices são adjacentes.

Um clique num grafo é um subgrafo completo. Existem divergências quanto ao gênero da palavra *clique*.

Achar clique pequeno é fácil.

Clique máximo

Um grafo é completo se todos os pares de vértices são adjacentes.

Um clique num grafo é um subgrafo completo. Existem divergências quanto ao gênero da palavra *clique*.

Achar clique pequeno é fácil.

$\omega(G)$ é o tamanho do maior clique de G.

Clique máximo

Um grafo é completo se todos os pares de vértices são adjacentes.

Um clique num grafo é um subgrafo completo. Existem divergências quanto ao gênero da palavra *clique*.

Achar clique pequeno é fácil.

$\omega(G)$ é o tamanho do maior clique de G.

Se H é subgrafo de G, então $\omega(H) \leq \omega(G)$.

Número de independência/estabilidade

Número de independência/estabilidade

Um conjunto de vértices é independente (ou estável) se não há nenhuma aresta entre eles.
(o contrário de um clique)

Número de independência/estabilidade

Um conjunto de vértices é independente (ou estável) se não há nenhuma aresta entre eles.
(o contrário de um clique)

Achar conjunto estável pequeno é fácil.

Número de independência/estabilidade

Um conjunto de vértices é independente (ou estável) se não há nenhuma aresta entre eles. (o contrário de um clique)

Achar conjunto estável pequeno é fácil.

$\alpha(G)$ é o tamanho do maior conjunto independente de G.

Número de independência/estabilidade

Um conjunto de vértices é independente (ou estável) se não há nenhuma aresta entre eles.
(o contrário de um clique)

Achar conjunto estável pequeno é fácil.

$\alpha(G)$ é o tamanho do maior conjunto independente de G.

Se H é subgrafo *induzido* de G, então $\alpha(H) \leq \alpha(G)$.

Cobertura por cliques

Cobertura por cliques

Uma cobertura por cliques de um grafo é uma coleção de cliques cuja união contém todos os vértices do grafo.

Cobertura por cliques

Uma cobertura por cliques de um grafo é uma coleção de cliques cuja união contém todos os vértices do grafo.

Cobrir com muitos cliques é fácil.

Cobertura por cliques

Uma cobertura por cliques de um grafo é uma coleção de cliques cuja união contém todos os vértices do grafo.

Cobrir com muitos cliques é fácil.

$\kappa(G)$ é menor tamanho de uma cobertura por cliques. Notação não padronizada.

Cobertura por cliques

Uma cobertura por cliques de um grafo é uma coleção de cliques cuja união contém todos os vértices do grafo.

Cobrir com muitos cliques é fácil.

$\kappa(G)$ é menor tamanho de uma cobertura por cliques. Notação não padronizada.

Se H é subgrafo *induzido* de G, então $\kappa(H) \leq \kappa(G)$.

Grafos bipartidos

Grafos bipartidos

Um grafo é bipartido se dá para dividir seus vértices em dois subconjuntos (bipartição) de forma que toda aresta tem uma ponta em cada subconjunto.

Grafos bipartidos

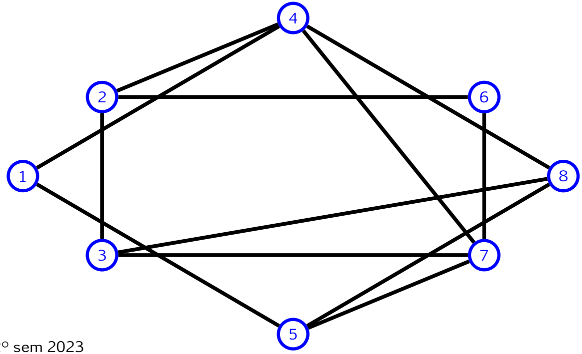
Um grafo é bipartido se dá para dividir seus vértices em dois subconjuntos (bipartição) de forma que toda aresta tem uma ponta em cada subconjunto.

Mesma coisa que 2-cromático, exceto pelos grafos sem arestas.

Grafos bipartidos

Um grafo é bipartido se dá para dividir seus vértices em dois subconjuntos (bipartição) de forma que toda aresta tem uma ponta em cada subconjunto.

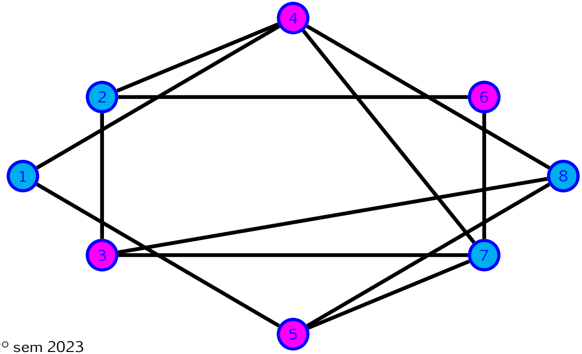
Mesma coisa que 2-cromático, exceto pelos grafos sem arestas.



Grafos bipartidos

Um grafo é bipartido se dá para dividir seus vértices em dois subconjuntos (bipartição) de forma que toda aresta tem uma ponta em cada subconjunto.

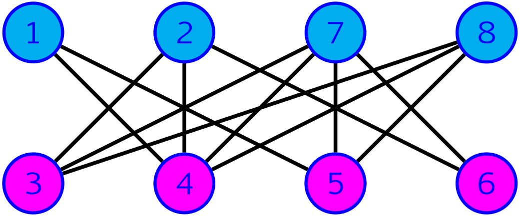
Mesma coisa que 2-cromático, exceto pelos grafos sem arestas.



Grafos bipartidos

Um grafo é bipartido se dá para dividir seus vértices em dois subconjuntos (bipartição) de forma que toda aresta tem uma ponta em cada subconjunto.

Mesma coisa que 2-cromático, exceto pelos grafos sem arestas.



Grafos bipartidos

Um grafo é bipartido se dá para dividir seus vértices em dois subconjuntos (bipartição) de forma que toda aresta tem uma ponta em cada subconjunto.

Mesma coisa que 2-cromático, exceto pelos grafos sem arestas.

Note que qualquer subgrafo de bipartido é bipartido.

Grafos bipartidos

Um grafo é bipartido se dá para dividir seus vértices em dois subconjuntos (bipartição) de forma que toda aresta tem uma ponta em cada subconjunto.
Mesma coisa que 2-cromático, exceto pelos grafos sem arestas.

Note que qualquer subgrafo de bipartido é bipartido.

São usado para modelar muitas situações. Matrizes, adequação de pessoas a tarefas, relacionamentos entre membros de dois grupos, etc.

Árvores

Árvores

Toda árvore é bipartida.

Árvores

Toda árvore é bipartida.

Bipartição é única.

Árvores

Toda árvore é bipartida.

Bipartição é única.

Isso vale para qualquer grafo bipartido conexo.

Como reconhecer bipartido?

1. Faça uma DFS, bicolorindo seus vértices
   a cor do vértice inicial é arbitrária, a dos outros é forçada.

Como reconhecer bipartido?

1. Faça uma DFS, bicolorindo seus vértices
   a cor do vértice inicial é arbitrária, a dos outros é forçada.
2. Ao examinar uma aresta de retorno, verifique se as pontas têm cores diferentes.

Como reconhecer bipartido?

1. Faça uma DFS, bicolorindo seus vértices
   a cor do vértice inicial é arbitrária, a dos outros é forçada.
2. Ao examinar uma aresta de retorno, verifique se as pontas têm cores diferentes.
3. Se deu sempre certo, ao final o grafo está 2-colorido, logo bipartido.

Como reconhecer bipartido?

1. Faça uma DFS, bicolorindo seus vértices
a cor do vértice inicial é arbitrária, a dos outros é forçada.
2. Ao examinar uma aresta de retorno, verifique se as pontas têm cores diferentes.
3. Se deu sempre certo, ao final o grafo está 2-colorido, logo bipartido.
4. E se não deu certo?

E se não deu certo?

E se não deu certo?

Situação é a seguinte: temos uma árvore de DFS, bicolorida, e encontramos uma aresta u–v onde:

- u e v têm a mesma cor.
- v descende de u na árvore.

E se não deu certo?

Situação é a seguinte: temos uma árvore de DFS, bicolorida, e encontramos uma aresta u–v onde:

- u e v têm a mesma cor.
- v descende de u na árvore.

O caminho v–u (fácil de achar usando .sob) tem comprimento par,

E se não deu certo?

Situação é a seguinte: temos uma árvore de DFS, bicolorida, e encontramos uma aresta u–v onde:

- u e v têm a mesma cor.
- v descende de u na árvore.

O caminho v–u (fácil de achar usando .sob) tem comprimento par, logo, junto com a aresta u–v forma um ciclo ímpar.

E se não deu certo?

Situação é a seguinte: temos uma árvore de DFS, bicolorida, e encontramos uma aresta u–v onde:

- u e v têm a mesma cor.
- v descende de u na árvore.

O caminho v–u (fácil de achar usando .sob) tem comprimento par, logo, junto com a aresta u–v forma um ciclo ímpar.

Ciclo ímpar não pode ser bicolorido!

Caracterização

Teorema

Um grafo é bipartido se e somente se não tem um ciclo ímpar.

Caracterização

Teorema

Um grafo é bipartido se e somente se não tem um ciclo ímpar.

E grafo tripartido (3-cromático)?

Caracterização

Teorema

Um grafo é bipartido se e somente se não tem um ciclo ímpar.

E grafo tripartido (3-cromático)?
Difícil pacas!

Alguns problemas ficam mais fáceis com grafos bipartidos

Alguns problemas ficam mais fáceis com grafos bipartidos

Triviais:

- Número cromático $\chi(G)$

Alguns problemas ficam mais fáceis com grafos bipartidos

Triviais:

- Número cromático $\chi(G)$
- Max clique $\omega(G)$

Alguns problemas ficam mais fáceis com grafos bipartidos

Triviais:

- Número cromático $\chi(G)$
- Max clique $\omega(G)$

Alguns problemas ficam mais fáceis com grafos bipartidos

Triviais:

- Número cromático $\chi(G)$
- Max clique $\omega(G)$

Precisam de teoria:

- Conjunto independente máximo $\alpha(G)$.

Alguns problemas ficam mais fáceis com grafos bipartidos

Triviais:

- Número cromático $\chi(G)$
- Max clique $\omega(G)$

Precisam de teoria:

- Conjunto independente máximo $\alpha(G)$.
- Cobertura mínima por cliques $\kappa(G)$.

Emparelhamentos

Emparelhamentos

Um emparelhamento num grafo é um conjunto de arestas duas a duas disjuntas.

Emparelhamentos

Um emparelhamento num grafo é um conjunto de arestas duas a duas disjuntas.

Um conjunto A de vértices é coberto por um emparelhamento M se todo vértice de A é ponta de alguma aresta de M.

Emparelhamentos

Um emparelhamento num grafo é um conjunto de arestas duas a duas disjuntas.

Um conjunto A de vértices é coberto por um emparelhamento M se todo vértice de A é ponta de alguma aresta de M.

Um emparelhamento é perfeito se ele cobre todos os vértices do grafo.

Dois nomes pioneiros

Phillip Hall Vindo da Teoria dos Grupos, estava interessado em transversais de uma família de conjuntos:

Dois nomes pioneiros

Phillip Hall Vindo da Teoria dos Grupos, estava interessado em transversais de uma família de conjuntos:
Dada uma família $(A_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de um conjunto A, uma transversal é uma função *injetora* $f : I \to A$ tal que $f(i) \in A_i$ para todo $i \in I$.

Dois nomes pioneiros

Phillip Hall Vindo da Teoria dos Grupos, estava interessado em transversais de uma família de conjuntos:
Dada uma família $(A_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de um conjunto A, uma transversal é uma função *injetora* $f : I \to A$ tal que $f(i) \in A_i$ para todo $i \in I$.

Denes Konig Publicou o primeiro livro de Teoria dos Grafos em 1936.

Dois nomes pioneiros

Phillip Hall Vindo da Teoria dos Grupos, estava interessado em transversais de uma família de conjuntos:
Dada uma família $(A_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de um conjunto A, uma transversal é uma função *injetora* $f : I \to A$ tal que $f(i) \in A_i$ para todo $i \in I$.

Denes Konig Publicou o primeiro livro de Teoria dos Grafos em 1936.

Dois nomes pioneiros

Phillip Hall Vindo da Teoria dos Grupos, estava interessado em transversais de uma família de conjuntos:
Dada uma família $(A_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de um conjunto A, uma transversal é uma função *injetora* $f : I \to A$ tal que $f(i) \in A_i$ para todo $i \in I$.

Denes Konig Publicou o primeiro livro de Teoria dos Grafos em 1936.

Veremos teoremas dos dois. A Wikipedia tem demonstrações diferentes das que serão vistas aqui.

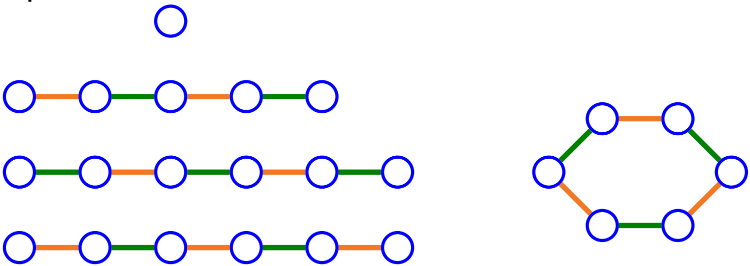
Uma idéia importante

Uma idéia importante

Sejam M_1 e M_2 emparelhamentos de um grafo G.
Então as componentes do grafo $G[M_1 \Delta M_2]$ são dos tipos:

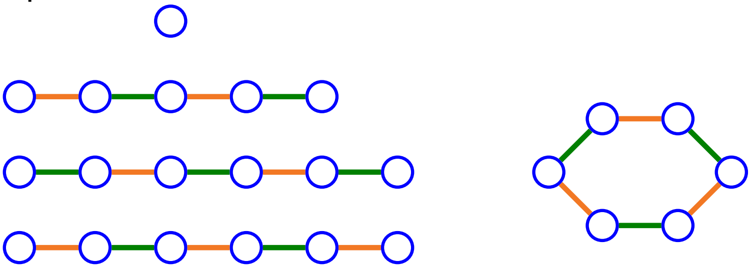
Uma idéia importante

Sejam M_1 e M_2 emparelhamentos de um grafo G.
Então as componentes do grafo $G[M_1 \Delta M_2]$ são dos tipos:



Uma idéia importante

Sejam M_1 e M_2 emparelhamentos de um grafo G.
Então as componentes do grafo $G[M_1 \Delta M_2]$ são dos tipos:



Caminhos e ciclos alternantes.

Teorema (Berge)

Um emparelhamento M é máximo se e só se não existe um caminho M-alternante cujas pontas não estão cobertas por M (caminho aumentador).

Teorema (Berge)

Um emparelhamento M é máximo se e só se não existe um caminho M-alternante cujas pontas não estão cobertas por M (caminho aumentador).

Teorema (Berge)

Um emparelhamento M é máximo se e só se não existe um caminho M-alternante cujas pontas não estão cobertas por M (caminho aumentador).

Prova: Suponha que exista um emparelhamente N maior do que M. Então uma da componentes de $G[M \Delta N]$ deve começar e terminar por uma aresta de N, pois em todas as outras, o número de arestas de N é menor ou igual do de arestas de M.

Teorema (Berge)

Um emparelhamento M é máximo se e só se não existe um caminho M-alternante cujas pontas não estão cobertas por M (caminho aumentador).

Prova: Suponha que exista um emparelhamente N maior do que M. Então uma da componentes de $G[M \Delta N]$ deve começar e terminar por uma aresta de N, pois em todas as outras, o número de arestas de N é menor ou igual do de arestas de M.

Por outro lado, suponha que exista caminho aumentador P. Vendo P como conjunto de arestas, $P \Delta M$ é um emparelhamento maior que M.

Algoritmo para emparelhamento máximo

$M = \emptyset$
while existe caminho aumentador
    encontre caminho aumentador P
    $M = M \Delta P$
return M

Algoritmo para emparelhamento máximo

```
M = ∅
while existe caminho aumentador
    encontre caminho aumentador P
    M = MΔP
return M
```

Algoritmo para emparelhamento máximo

$M = \emptyset$
while existe caminho aumentador
    encontre caminho aumentador P
    $M = M \Delta P$
return M

Questões:

1. Como descobrir um caminho aumentador eficientemente?

Algoritmo para emparelhamento máximo

$M = \emptyset$
while existe caminho aumentador
    encontre caminho aumentador P
    $M = M \Delta P$
return M

Questões:

1. Como descobrir um caminho aumentador eficientemente?
2. Como convencer alguém que a saída do algoritmo é um emparelhamento máximo?