No

capítulo

anterior...

Grafos bipartidos

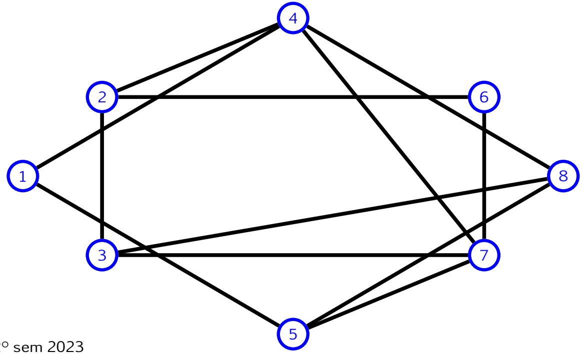
Um grafo é bipartido se dá para dividir seus vértices em dois subconjuntos (bipartição) de forma que toda aresta tem uma ponta em cada subconjunto.

Mesma coisa que 2-cromático, exceto pelos grafos sem arestas.

Grafos bipartidos

Um grafo é bipartido se dá para dividir seus vértices em dois subconjuntos (bipartição) de forma que toda aresta tem uma ponta em cada subconjunto.

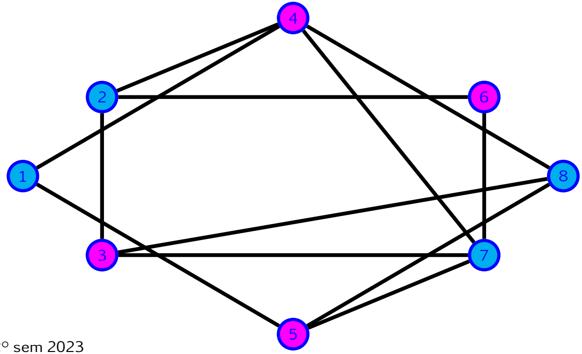
Mesma coisa que 2-cromático, exceto pelos grafos sem arestas.



Grafos bipartidos

Um grafo é bipartido se dá para dividir seus vértices em dois subconjuntos (bipartição) de forma que toda aresta tem uma ponta em cada subconjunto.

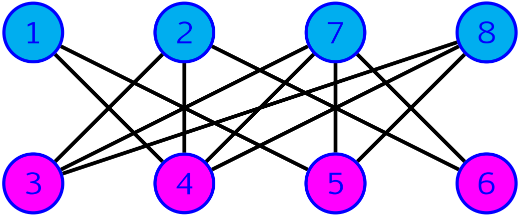
Mesma coisa que 2-cromático, exceto pelos grafos sem arestas.



Grafos bipartidos

Um grafo é bipartido se dá para dividir seus vértices em dois subconjuntos (bipartição) de forma que toda aresta tem uma ponta em cada subconjunto.

Mesma coisa que 2-cromático, exceto pelos grafos sem arestas.



Caracterização

Teorema

Um grafo é bipartido se e somente se não tem um ciclo ímpar.

Emparelhamentos

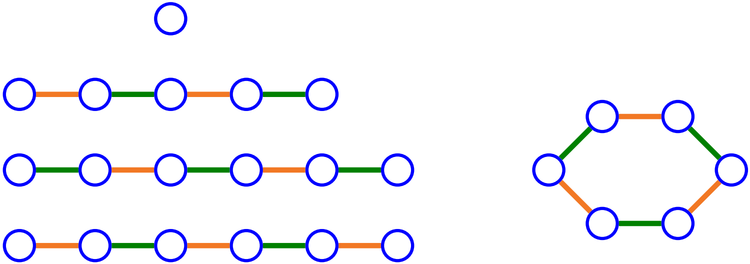
Um emparelhamento num grafo é um conjunto de arestas duas a duas disjuntas.

Um conjunto A de vértices é coberto por um emparelhamento M se todo vértice de A é ponta de alguma aresta de M.

Um emparelhamento é perfeito se ele cobre todos os vértices do grafo.

Uma idéia importante

Sejam M_1 e M_2 emparelhamentos de um grafo G.
Então as componentes do grafo $G[M_1 \Delta M_2]$ são dos tipos:



Caminhos e ciclos alternantes.

Teorema (Berge)

Um emparelhamento M é máximo se e só se não existe um caminho M-alternante cujas pontas não estão cobertas por M (caminho aumentador).

Teorema (Berge)

Um emparelhamento M é máximo se e só se não existe um caminho M-alternante cujas pontas não estão cobertas por M (caminho aumentador).

Prova (só se):
Suponha que exista caminho aumentador P.
Vendo P como conjunto de arestas,

$$P \Delta M$$

é um emparelhamento maior que M.

Algoritmo para emparelhamento máximo

$M = \emptyset$
while existe caminho aumentador
    encontre caminho aumentador P
    $M = M \Delta P$
return M

Algoritmo para emparelhamento máximo

$M = \emptyset$
while existe caminho aumentador
    encontre caminho aumentador P
    $M = M \Delta P$
return M

Questões:

1. Como descobrir um caminho aumentador eficientemente?
2. Como convencer alguém que a saída do algoritmo é um emparelhamento máximo?

Procurando caminho aumentador

Procurando caminho aumentador

Vamos começar com grafos bipartidos.

Procurando caminho aumentador

Vamos começar com grafos bipartidos.

Depois voltamos ao caso geral para ver o que funciona e o que não.

Procurando caminho aumentador

Vamos começar com grafos bipartidos.

Depois voltamos ao caso geral para ver o que funciona e o que não.

Vamos supor que o grafo já vem com uma bipartição (A, B).

Árvores alternantes

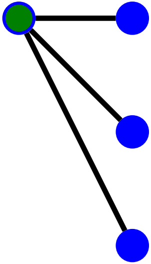
Dado um emparelhamento M, e um vértice $u \in A$ descoberto, vamos procurar caminho aumentador a partir de u.

Árvores alternantes

Dado um emparelhamento M, e um vértice $u \in A$ descoberto, vamos procurar caminho aumentador a partir de u.

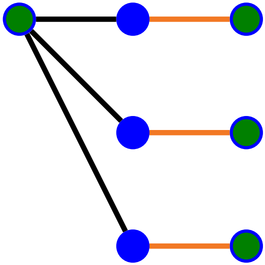
Árvores alternantes

Dado um emparelhamento M, e um vértice $u \in A$ descoberto, vamos procurar caminho aumentador a partir de u.



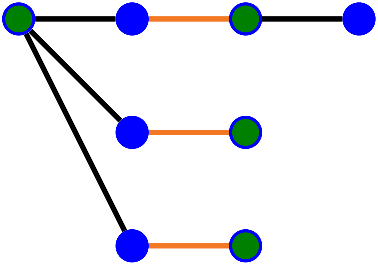
Árvores alternantes

Dado um emparelhamento M, e um vértice $u \in A$ descoberto, vamos procurar caminho aumentador a partir de u.



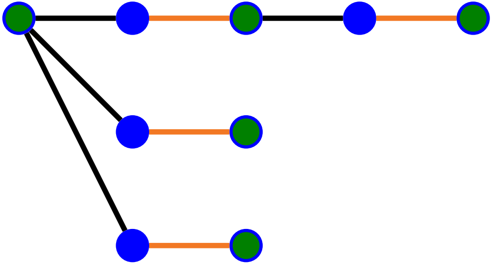
Árvores alternantes

Dado um emparelhamento M, e um vértice $u \in A$ descoberto, vamos procurar caminho aumentador a partir de u.



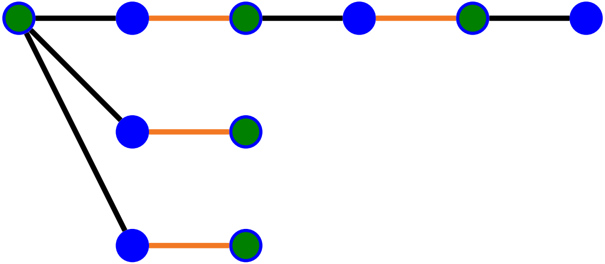
Árvores alternantes

Dado um emparelhamento M, e um vértice $u \in A$ descoberto, vamos procurar caminho aumentador a partir de u.



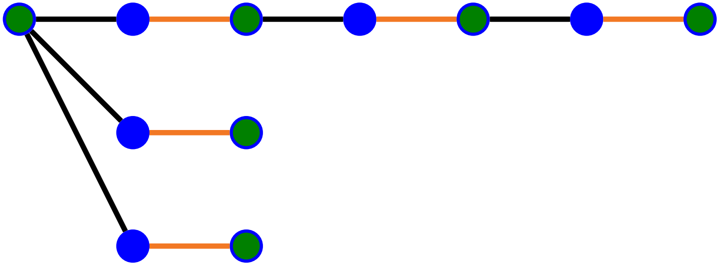
Árvores alternantes

Dado um emparelhamento M, e um vértice $u \in A$ descoberto, vamos procurar caminho aumentador a partir de u.



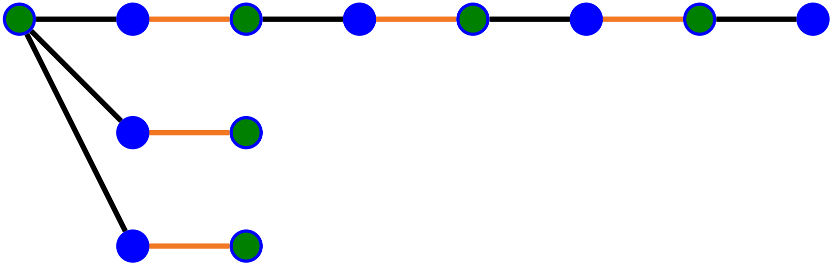
Árvores alternantes

Dado um emparelhamento M, e um vértice $u \in A$ descoberto, vamos procurar caminho aumentador a partir de u.



Árvores alternantes

Dado um emparelhamento M, e um vértice $u \in A$ descoberto, vamos procurar caminho aumentador a partir de u.



Se achar caminho aumentador, aumenta M e continua.

E se não achar?

E se não achar?

Seja T o conjunto dos vértices da árvore, ao fim da busca. Então:

1. $u \in T$.

E se não achar?

Seja T o conjunto dos vértices da árvore, ao fim da busca. Então:

1. $u \in T$.
2. Se $v \in T \cap A$, então todos seus vizinhos estão em $T \cap B$.

E se não achar?

Seja T o conjunto dos vértices da árvore, ao fim da busca. Então:

1. $u \in T$.
2. Se $v \in T \cap A$, então todos seus vizinhos estão em $T \cap B$.
3. Se $v \in T \cap B$, então ele tem um único descendente, com quem está emparelhado,

E se não achar?

Seja T o conjunto dos vértices da árvore, ao fim da busca. Então:

1. $u \in T$.
2. Se $v \in T \cap A$, então todos seus vizinhos estão em $T \cap B$.
3. Se $v \in T \cap B$, então ele tem um único descendente, com quem está emparelhado,

Se X é um conjunto de vértices, então $N(X)$ denota o conjunto de vértices que são adjacentes a algum vértice em X.

- $N(T \cap A) = T \cap B$.

E se não achar?

Seja T o conjunto dos vértices da árvore, ao fim da busca. Então:

1. $u \in T$.
2. Se $v \in T \cap A$, então todos seus vizinhos estão em $T \cap B$.
3. Se $v \in T \cap B$, então ele tem um único descendente, com quem está emparelhado,

Se X é um conjunto de vértices, então $N(X)$ denota o conjunto de vértices que são adjacentes a algum vértice em X.

- $N(T \cap A) = T \cap B$.
- $|T \cap A| = |T \cap B| + 1$.

Teorema (Hall, 1935)

Seja G *um grafo bipartido e seja* A *um de seus lados. Então, existe um emparelhamento que cobre* A *se e só se não existe um conjunto* $X \subseteq A$ *tal que* $|N(X)| < |X|$.

Teorema (Hall, 1935)

Seja G um grafo bipartido e seja A um de seus lados. Então, existe um emparelhamento que cobre A se e só se não existe um conjunto $X \subseteq A$ tal que $|N(X)| < |X|$.

(se e só se $|N(X)| \geq |X|$ para todo conjunto $X \subseteq A$)

Teorema (Hall, 1935)

Seja G um grafo bipartido e seja A um de seus lados. Então, existe um emparelhamento que cobre A se e só se não existe um conjunto $X \subseteq A$ tal que $|N(X)| < |X|$.
(se e só se $|N(X)| \geq |X|$ para todo conjunto $X \subseteq A$)

Teorema (Hall, 1935)

Num grafo bipartido existe emparelhamento perfeito se e só se $|N(X)| \geq |X|$ para todo conjunto X de vértices.

Transversais

Teorema (Hall)

Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família finita de subconjuntos de um conjunto finito A, Então, a família tem uma transversal se e só se para todo $J \subseteq I$,

$$\left| \bigcup_{i \in J} A_i \right| \geq |J|.$$

Algoritmo para emparelhamento máximo

Dado um grafo com bipartição (A, B)

$M = \emptyset$
for $u \in A$
  if existe caminho aumentador P começando em u
    $M = M \Delta P$
return M

Algoritmo para emparelhamento máximo

Dado um grafo com bipartição (A, B)

$M = \emptyset$
for $u \in A$
  if existe caminho aumentador P começando em u
    $M = M \Delta P$
return M

Como convencer alguém que esse emparelhamento é máximo, de uma forma que não dependa de procurar caminhos?

Cobertura de vértices

Cobertura de vértices

Uma cobertura de vértices é um conjunto K de vértices tal que toda aresta tem pelo menos uma ponta em K.

Cobertura de vértices

Uma cobertura de vértices é um conjunto K de vértices tal que toda aresta tem pelo menos uma ponta em K.

se M é um emparelhamento e K é uma cobertura, então

$$|M| \leq |K|.$$

Cobertura de vértices

Uma cobertura de vértices é um conjunto K de vértices tal que toda aresta tem pelo menos uma ponta em K.

Claro que se M é um emparelhamento e K é uma cobertura, então

$$|M| \leq |K|.$$

Teorema (Kőnig, 1931)

Num grafo bipartido o tamanho de uma cobertura mínima de vértices é igual ao tamanho de um emparelhamento máximo.

Teorema (Kőnig, 1931)

Num grafo bipartido o tamanho de uma cobertura mínima de vértices é igual ao tamanho de um emparelhamento máximo.

PROVA: Algoritmo que constrói uma cobertura mínima a partir de um emparelhamento máximo M.

Teorema (Kőnig, 1931)

Num grafo bipartido o tamanho de uma cobertura mínima de vértices é igual ao tamanho de um emparelhamento máximo.

Prova: Algoritmo que constrói uma cobertura mínima a partir de um emparelhamento máximo M. Seja $A_d = \{v \in A \mid v \text{ descoberto por } M\}$, e A_a os vértices alcançáveis a partir de A_d por caminhos alternantes. Defina B_d e B_a da mesma forma. Seja $C = V - A_a \cup B_a$ e

$$K = A_a \cap B \;\cup\; B_a \cap A \;\cup\; C \cap A\ .$$

Teorema (Kőnig, 1931)

Num grafo bipartido o tamanho de uma cobertura mínima de vértices é igual ao tamanho de um emparelhamento máximo.

Prova: Algoritmo que constrói uma cobertura mínima a partir de um emparelhamento máximo M. Seja $A_d = \{v \in A \mid v \text{ descoberto por } M\}$, e A_a os vértices alcançáveis a partir de A_d por caminhos alternantes. Defina B_d e B_a da mesma forma. Seja $C = V - A_a \cup B_a$ e

$$K = A_a \cap B \;\cup\; B_a \cap A \;\cup\; C \cap A \;.$$

- K é uma cobertura de vértices (por que?).

Teorema (Kőnig, 1931)

Num grafo bipartido o tamanho de uma cobertura mínima de vértices é igual ao tamanho de um emparelhamento máximo.

Prova: Algoritmo que constrói uma cobertura mínima a partir de um emparelhamento máximo M. Seja $A_d = \{v \in A \mid v \text{ descoberto por } M\}$, e A_a os vértices alcançáveis a partir de A_d por caminhos alternantes. Defina B_d e B_a da mesma forma. Seja $C = V - A_a \cup B_a$ e

$$K = A_a \cap B \;\cup\; B_a \cap A \;\cup\; C \cap A\ .$$

- K é uma cobertura de vértices (por que?).
- $|K| = |M|$ (por que?).

E se não for bipartido?

E se não for bipartido?

Pode passar bem longe da igualdade:

E se não for bipartido?

Pode passar bem longe da igualdade:

- Num ciclo ímpar C_{2k+1}:

E se não for bipartido?

Pode passar bem longe da igualdade:

- Num ciclo ímpar C_{2k+1}:

$$|M| = k, \qquad |K| = k+1.$$

E se não for bipartido?

Pode passar bem longe da igualdade:

- Num ciclo ímpar C_{2k+1}:

$$|M| = k, \qquad |K| = k + 1.$$

- Num grafo completo K_n:

E se não for bipartido?

Pode passar bem longe da igualdade:

- Num ciclo ímpar C_{2k+1}:

$$|M| = k, \qquad |K| = k+1.$$

- Num grafo completo K_n:

$$|M| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \qquad |K| = n-1.$$

Conjunto independente máximo

Conjunto independente máximo

Num grafo qualquer, um conjunto de vértices é independente sse seu complemento é uma cobertura.

Conjunto independente máximo

Num grafo qualquer, um conjunto de vértices é independente sse seu complemento é uma cobertura.

Proposição

Num grafo bipartido G,

$$\alpha(G) = n - \mu(G) \quad .$$

onde $\mu(G)$ é o tamanho de um emparelhamento máximo.

E cobertura por cliques?

E cobertura por cliques?

Num grafo bipartido, os cliques tem 1 ou 2 vértices.

E cobertura por cliques?

Num grafo bipartido, os cliques tem 1 ou 2 vértices.

Uma cobertura, neste caso, consiste em pegar um emparelhamento máximo e os vértices que sobraram.

E cobertura por cliques?

Num grafo bipartido, os cliques tem 1 ou 2 vértices.

Uma cobertura, neste caso, consiste em pegar um emparelhamento máximo e os vértices que sobraram.

Segue que:

$$\kappa(G) = n - \mu(G) = \alpha(G) \quad .$$

E cobertura por cliques?

Num grafo bipartido, os cliques tem 1 ou 2 vértices.

Uma cobertura, neste caso, consiste em pegar um emparelhamento máximo e os vértices que sobraram.

Segue que:

$$\kappa(G) = n - \mu(G) = \alpha(G) \quad .$$

Também vale isso, para bipartidos:

$$\chi(G) = \omega(G)(= 2) \quad .$$

Só bipartidos?

Só bipartidos?

Lá pelos fins de 1950, havia já alguns teoremas com a seguinte forma:

Só bipartidos?

Lá pelos fins de 1950, havia já alguns teoremas com a seguinte forma:

Se G é um grafo de um certo tipo, então

$$\chi(G) = \omega(G)$$
$$\kappa(G) = \alpha(G)$$

Só bipartidos?

Lá pelos fins de 1950, havia já alguns teoremas com a seguinte forma:

Se G é um grafo de um certo tipo, então

$$\chi(G) = \omega(G)$$
$$\kappa(G) = \alpha(G)$$

$$\chi(H) = \omega(H)$$
$$\kappa(H) = \alpha(H)$$

para todo subgrafo induzido H de G.

Berge (lembram) gostou tanto deles, que lhes deu o nome de grafos perfeitos. Junto com isso , formulou alguns problemas, um dos quais só foi resolvido 40 anos depois.

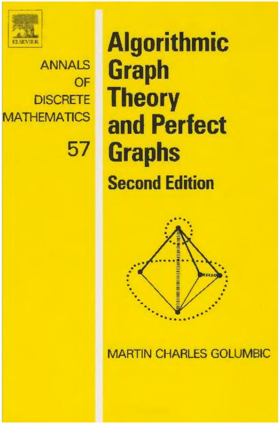
Berge (lembram) gostou tanto deles, que lhes deu o nome de grafos perfeitos. Junto com isso , formulou alguns problemas, um dos quais só foi resolvido 40 anos depois.

O que isso tem a ver com o curso?

Berge (lembram) gostou tanto deles, que lhes deu o nome de grafos perfeitos. Junto com isso , formulou alguns problemas, um dos quais só foi resolvido 40 anos depois.

O que isso tem a ver com o curso?

1ª edição 1980
2ª edição 2004



Ninguém é perfeito...
Mas alguns grafos são.

Arnaldo Mandel

O problema de Hitchcock

Problema

Dado um grafo bipartido e pesos reais positivos nos vértices e custos reais positivos nas arestas. Encontrar uma atribuição de valores nas arestas tal que a soma em cada vertice seja seu peso, e o custo total seja mínimo.

O problema de Hitchcock

Problema

Dado um grafo bipartido e pesos reais positivos nos vértices e custos reais positivos nas arestas. Encontrar uma atribuição de valores nas arestas tal que a soma em cada vertice seja seu peso, e o custo total seja mínimo.

1. Se os pesos são inteiros e existe solução, existe solução inteira.

O problema de Hitchcock

Problema

Dado um grafo bipartido e pesos reais positivos nos vértices e custos reais positivos nas arestas. Encontrar uma atribuição de valores nas arestas tal que a soma em cada vertice seja seu peso, e o custo total seja mínimo.

1. Se os pesos são inteiros e existe solução, existe solução inteira.
2. Caso particular: pesos $=1$ — emparelhamento perfeito.

O problema de Hitchcock

Problema

Dado um grafo bipartido e pesos *reais positivos nos vértices e* custos *reais positivos nas arestas. Encontrar uma atribuição de valores nas arestas tal que a soma em cada vertice seja seu peso, e o custo total seja mínimo.*

1. Se os pesos são inteiros e existe solução, existe solução inteira.
2. Caso particular: pesos $=1$ — emparelhamento perfeito.
3. Variação: custo total máximo.

O problema de Hitchcock

Problema

Dado um grafo bipartido e pesos reais positivos nos vértices e custos reais positivos nas arestas. Encontrar uma atribuição de valores nas arestas tal que a soma em cada vertice seja seu peso, e o custo total seja mínimo.

1. Se os pesos são inteiros e existe solução, existe solução inteira.
2. Caso particular: pesos $=1$ — emparelhamento perfeito.
3. Variação: custo total máximo.
4. Variação: soma em alguns vértices $\leq$ peso.

O problema de Hitchcock

Problema

Dado um grafo bipartido e pesos reais positivos nos vértices e custos reais positivos nas arestas. Encontrar uma atribuição de valores nas arestas tal que a soma em cada vertice seja seu peso, e o custo total seja mínimo.

1. Se os pesos são inteiros e existe solução, existe solução inteira.
2. Caso particular: pesos $=1$ — emparelhamento perfeito.
3. Variação: custo total máximo.
4. Variação: soma em alguns vértices $\leq$ peso.

   Mais para a frente no curso, com teoria mais abrangente.