Emparelhamentos em geral

Emparelhamentos em geral

O primeiro algoritmo para emparelhamento máximo para grafos em geral foi publicado por Jack Edmonds em 1965.

Emparelhamentos em geral

O primeiro algoritmo para emparelhamento máximo para grafos em geral foi publicado por Jack Edmonds em 1965.

O artigo intitulado *Paths, Trees and Flowers* ficou famoso por isso, mas por outra razão:

Emparelhamentos em geral

O primeiro algoritmo para emparelhamento máximo para grafos em geral foi publicado por Jack Edmonds em 1965.

O artigo intitulado *Paths, Trees and Flowers* ficou famoso por isso, mas por outra razão:

Numa pequena "Digressão" ele apresentou, de forma original a ideia de que complexidade polinomial é algo que caracteriza um bom algoritmo.

Emparelhamentos em geral

O primeiro algoritmo para emparelhamento máximo para grafos em geral foi publicado por Jack Edmonds em 1965.

O artigo intitulado *Paths, Trees and Flowers* ficou famoso por isso, mas por outra razão:

Numa pequena “Digressão” ele apresentou, de forma original a ideia de que complexidade polinomial é algo que caracteriza um bom algoritmo.

Num artigo logo em seguida, propôs a relevância do que veio a ser conhecida a classe NP.

Busca de caminhos alternantes

Hoje os slides ficam sem figuras.

Busca de caminhos alternantes

Hoje os slides ficam sem figuras.

Ao construir uma árvore alternante, pode-se perder caminhos, quando houver ciclos ímpares.

Busca de caminhos alternantes

Hoje os slides ficam sem figuras.

Ao construir uma árvore alternante, pode-se perder caminhos, quando houver ciclos ímpares.

Idéia: quando detectado ciclo ímpar, contrair. Crie um pseudo-vértice

Busca de caminhos alternantes

Hoje os slides ficam sem figuras.

Ao construir uma árvore alternante, pode-se perder caminhos, quando houver ciclos ímpares.

Idéia: quando detectado ciclo ímpar, contrair. Crie um pseudo-vértice

Se achar caminho aumentador, abra os pseudo-vértices e vá escolhendo caminhos aumentadores.

Busca de caminhos alternantes

Hoje os slides ficam sem figuras.

Ao construir uma árvore alternante, pode-se perder caminhos, quando houver ciclos ímpares.

Idéia: quando detectado ciclo ímpar, contrair. Crie um pseudo-vértice

Se achar caminho aumentador, abra os pseudo-vértices e vá escolhendo caminhos aumentadores.

Guarde os circuitos a cada contração.

Busca de caminhos alternantes

Hoje os slides ficam sem figuras.

Ao construir uma árvore alternante, pode-se perder caminhos, quando houver ciclos ímpares.

Idéia: quando detectado ciclo ímpar, contrair. Crie um pseudo-vértice

Se achar caminho aumentador, abra os pseudo-vértices e vá escolhendo caminhos aumentadores.

Guarde os circuitos a cada contração.

Blossom Algorithm.

E se não der certo?

E se não der certo?

Seja T o conjunto dos vértices da árvore, ao fim da busca. Eles estão coloridos como A ou B. Então:

1. A raíz está em $T \cap A$.

E se não der certo?

Seja T o conjunto dos vértices da árvore, ao fim da busca. Eles estão coloridos como A ou B. Então:

1. A raíz está em $T \cap A$.
2. Se $v \in T \cap A$, então todos seus vizinhos estão em $T \cap B$.

E se não der certo?

Seja T o conjunto dos vértices da árvore, ao fim da busca. Eles estão coloridos como A ou B. Então:

1. A raíz está em $T \cap A$.
2. Se $v \in T \cap A$, então todos seus vizinhos estão em $T \cap B$.
3. Se $v \in T \cap B$, então ele tem um único descendente, com quem está emparelhado.

E se não der certo?

Seja T o conjunto dos vértices da árvore, ao fim da busca. Eles estão coloridos como A ou B. Então:

1. A raíz está em $T \cap A$.
2. Se $v \in T \cap A$, então todos seus vizinhos estão em $T \cap B$.
3. Se $v \in T \cap B$, então ele tem um único descendente, com quem está emparelhado.
4. Todos os pseudo-vértices estão em $T \cap A$; os vértices de $T \cap B$ são vértices de G.

E se não der certo?

Seja T o conjunto dos vértices da árvore, ao fim da busca. Eles estão coloridos como A ou B. Então:

1. A raíz está em $T \cap A$.
2. Se $v \in T \cap A$, então todos seus vizinhos estão em $T \cap B$.
3. Se $v \in T \cap B$, então ele tem um único descendente, com quem está emparelhado.
4. Todos os pseudo-vértices estão em $T \cap A$; os vértices de $T \cap B$ são vértices de G.

E se não der certo?

Seja T o conjunto dos vértices da árvore, ao fim da busca. Eles estão coloridos como A ou B. Então:

1. A raíz está em $T \cap A$.
2. Se $v \in T \cap A$, então todos seus vizinhos estão em $T \cap B$.
3. Se $v \in T \cap B$, então ele tem um único descendente, com quem está emparelhado.
4. Todos os pseudo-vértices estão em $T \cap A$; os vértices de $T \cap B$ são vértices de G.

Segue que em $G - T \cap B$ cada vértice em $T \cap A$ vira uma componente

E se não der certo?

Seja T o conjunto dos vértices da árvore, ao fim da busca. Eles estão coloridos como A ou B. Então:

1. A raíz está em $T \cap A$.
2. Se $v \in T \cap A$, então todos seus vizinhos estão em $T \cap B$.
3. Se $v \in T \cap B$, então ele tem um único descendente, com quem está emparelhado.
4. Todos os pseudo-vértices estão em $T \cap A$; os vértices de $T \cap B$ são vértices de G.

Segue que em $G - T \cap B$ cada vértice em $T \cap A$ vira uma componente *com número ímpar de vértices*.

Teorema de Tutte

Teorema

Um grafo tem emparelhamento perfeito se e só se para todo conjunto X de vértices, o número de componentes ímpares de $G - X$ é $\leq |X|$.

Teorema de Tutte

Teorema

Um grafo tem emparelhamento perfeito se e só se para todo conjunto X de vértices, o número de componentes ímpares de $G - X$ é $\leq |X|$.

$\mathrm{ci}(G - X) \leq |X|$

Uma limitação

Seja M um emparelhamento, e $X \subseteq V$.
Se $C_1, C_2, \ldots, C_k$ são as componentes ímpares de $G - X$, pelo menos $k - |X|$ vértices não estão cobertos.

Uma limitação

Seja M um emparelhamento, e $X \subseteq V$.
Se $C_1, C_2, \ldots, C_k$ são as componentes ímpares de $G - X$, pelo menos $k - |X|$ vértices não estão cobertos.

$$|M| \leq \tfrac{1}{2}(n - (k - |X|))$$

Uma limitação

Seja M um emparelhamento, e $X \subseteq V$.
Se $C_1, C_2, \ldots, C_k$ são as componentes ímpares de $G - X$, pelo menos $k - |X|$ vértices não estão cobertos.

$$|M| \leq \tfrac{1}{2}(n - (k - |X|))$$

Logo, para todo X,

$$\mu(G) \leq \tfrac{1}{2}(n - \mathrm{ci}(G - X) + |X|).$$

Fórmula de Tutte-Berge

Teorema

$$\mu(G) = \min_{X \subseteq V} \tfrac{1}{2}(n - \mathrm{ci}(G - X) + |X|).$$

.

Fórmula de Tutte-Berge

Teorema

$$\mu(G) = \min_{X \subseteq V} \tfrac{1}{2}(n - \mathrm{ci}(G - X) + |X|).$$

Prova: Vem do algoritmo.