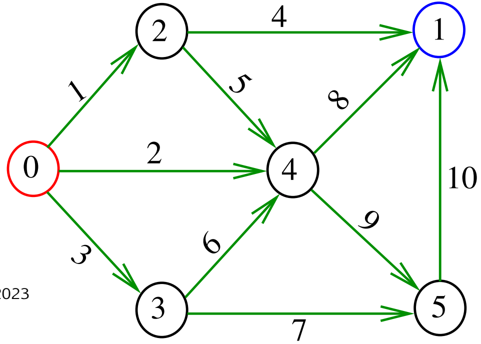
Fluxos em redes

Algumas funções a valores reais nos arcos de um digrafo serão denominadas fluxos. Esse termo se aplica quando estamos interessados nas relações entre *influxos* e *efluxos*, a serem definidos adiante.

Diremos o valor de f num arco é o fluxo no arco.

Exemplo: o fluxo no arco 2-4 é 5

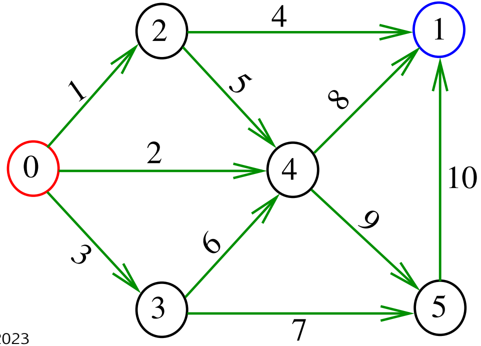


Influxos e efluxos

O influxo em v (= *inflow into* v) é a soma dos fluxos nos arcos que entram em v.

O efluxo de v (= *outflow from* v) é a soma dos fluxos nos arcos que saem de v.

Exemplo: em 4 o influxo é 13 e o efluxo é 17



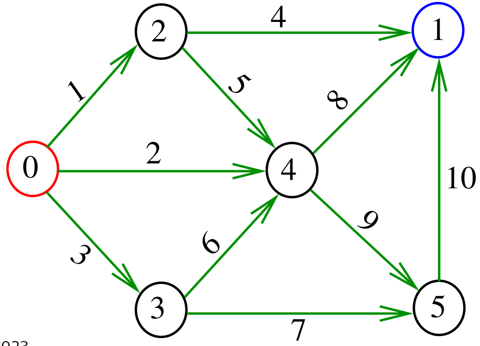
Saldos

O saldo em v é a diferença

$$\mathtt{ef}(v) - \mathtt{inf}(v)$$

entre o efluxo de v e o influxo em v.

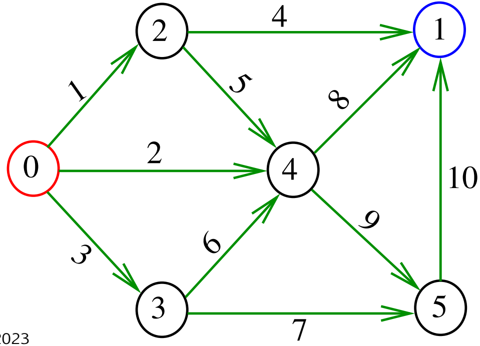
Exemplo: o saldo do vértice 4 é 17-13=4



Fluxos

Num digrafo com vértice inicial s e vértice final t, um st-fluxo (= st-*flow*) é uma função f que atribui valores em $\mathbb{R}_{\geq}$ aos arcos de tal modo que o saldo em todo vértice distinto de s e t é nulo e em s é ≥ 0.

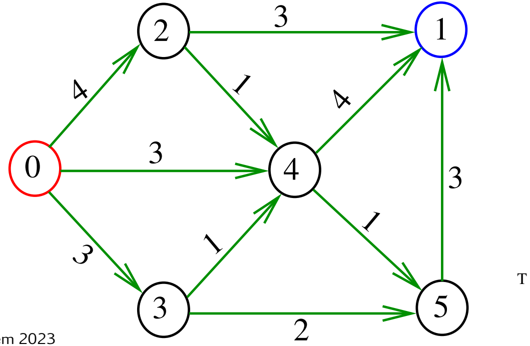
Exemplo: não é um fluxo



Fluxos

Num digrafo com vértice inicial s e vértice final t, um st-fluxo (= st-*flow*) é uma função f que atribui valores em $\mathbb{R}_{\geq}$ aos arcos de tal modo que o saldo em todo vértice distinto de s e t é nulo e em s é ≥ 0.

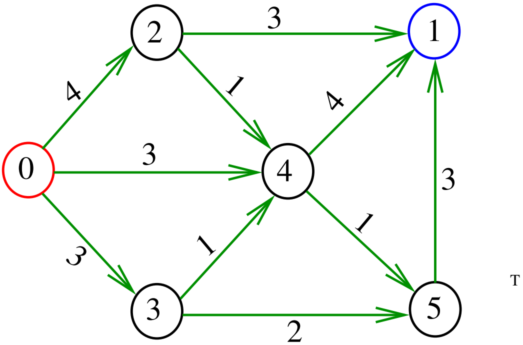
Exemplo: é um fluxo onde $s = 0$ e $t = 1$



Propriedade de Fluxos

Para qualquer fluxo num digrafo com fonte s e ralo t, o saldo(t)=-saldo(s).

Exemplo: saldo em 0 = 10 = −10 = saldo em 1

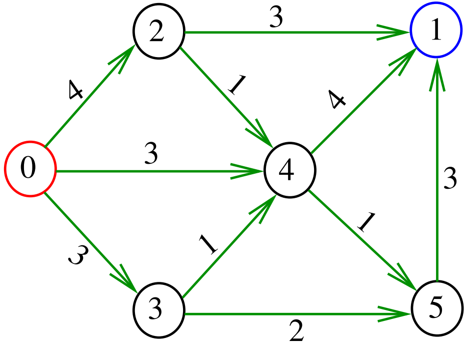


Intensidade de fluxos

A intensidade de um fluxo f é o saldo de f em s.

Em geral (mas nem sempre) o influxo em s é nulo e o efluxo de t é nulo.

Exemplo: fluxo de intensidade 10



T

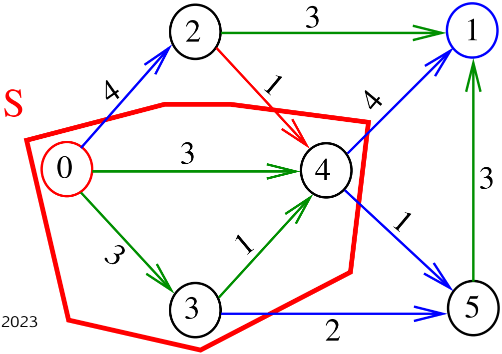
Saldo de fluxo num conjunto

Dado um conjunto S que contém s mas não contém t, o saldo em S é a diferença

$$\mathtt{ef}(S) - \mathtt{inf}(S),$$

entre o efluxo de S e o influxo em S

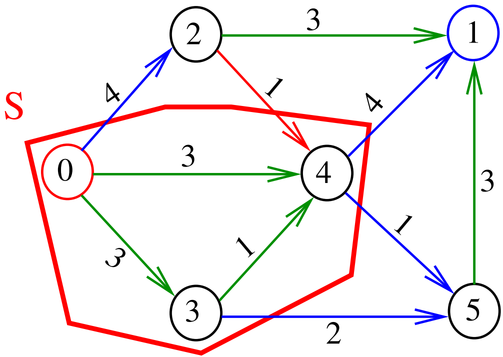
Exemplo: o saldo de S é $4 + 4 + 1 + 2 - 1 = 10$



Propriedade do Saldos

Para qualquer fluxo e para qualquer conjunto S que contém s mas não contém t, o saldo em S é igual ao saldo em s.

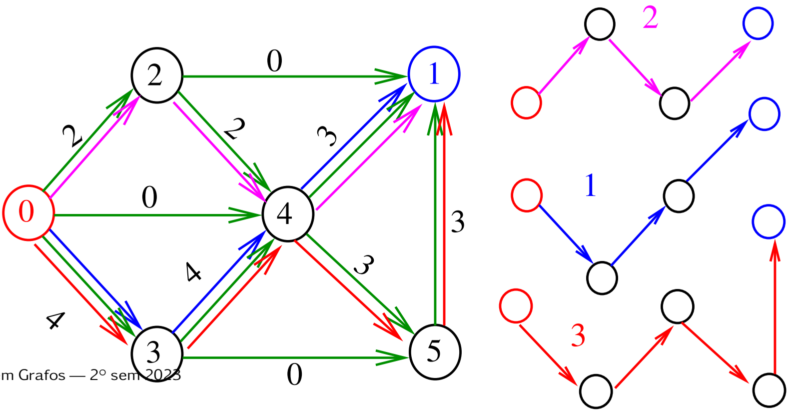
Exemplo: o saldo de S é $4 + 4 + 1 + 2 - 1 = 10$



Fluxos versus coleção de caminhos

Fluxos podem ser representados por caminhos de s a t. A soma das quantidades de fluxo conduzidas por cada caminho é igual à intensidade do fluxo.

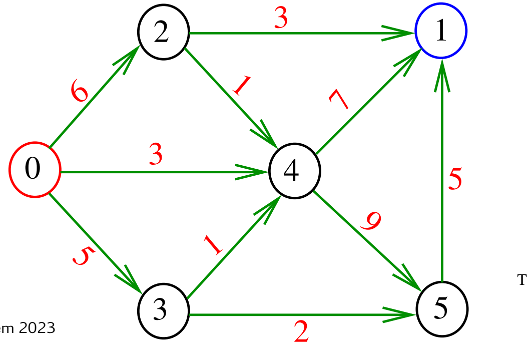
Exemplo:



Redes capacitadas

Uma rede capacitada é um digrafo com vértice inicial e vértice final em que a cada um arcos está associado uma capacidade, que é ou um número em $\mathbb{R}_{\geq}$ ou o símbolo $+\infty$.

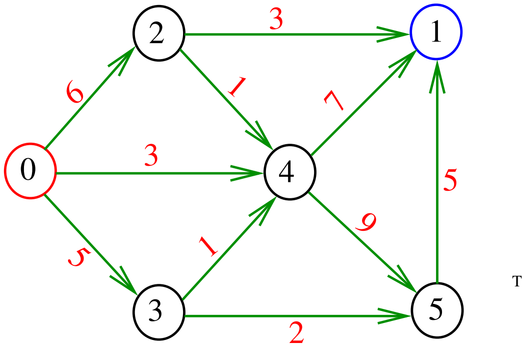
Exemplo:



Problema do fluxo máximo

Problema. Dada uma rede capacitada, encontrar um fluxo de intensidade máxima dentre os que respeitam as capacidades dos arcos.

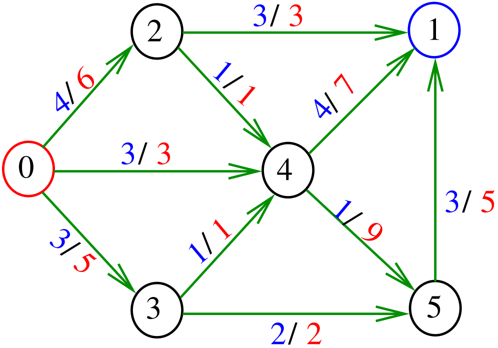
Exemplo: rede capacitada



Problema do fluxo máximo

Problema. Dada uma rede capacitada, encontrar um fluxo de intensidade máxima dentre os que respeitam as capacidades dos arcos.

Exemplo: fluxo que respeita as capacidades



Fluxo máximo (problema primal)

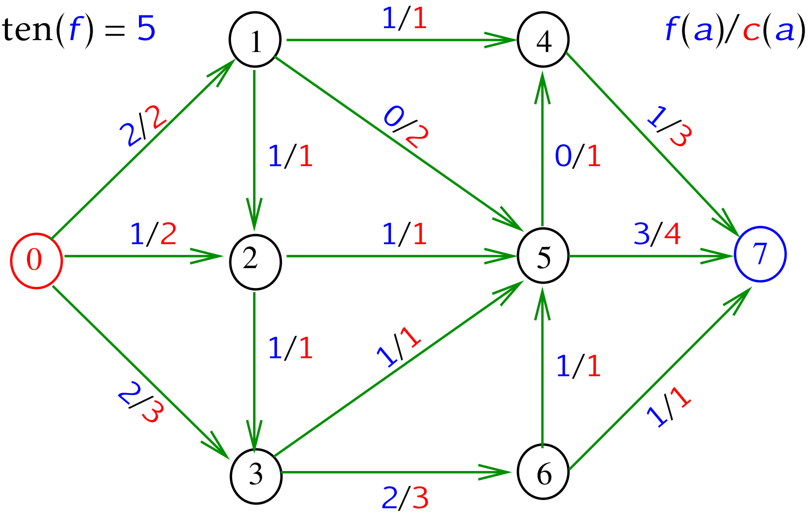
Podemos supor que a rede possui um arco b de t a s de capacidade $+\infty$.

O problema do fluxo máximo é equivalente ao seguinte programa linear, que chamamos de primal: encontrar um vetor x indexado por A que

$$
\begin{array}{rrcll}
\text{maximize} & x(b) & & & \\
\text{sob as restrições} & \mathtt{ef}(v) - \mathtt{inf}(v) & = & 0 & \forall\, v, \\
& x(a) & \leq & \mathrm{c}(a) & \forall\, a \in A, \\
& x(a) & \geq & 0 & \forall\, a \in A.
\end{array}
$$

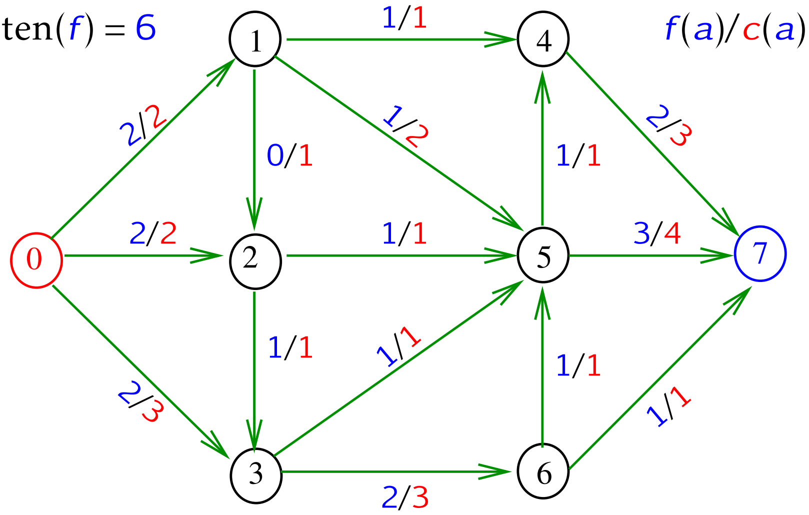
Fluxo é máximo?

$\text{iten}(f) = 5$

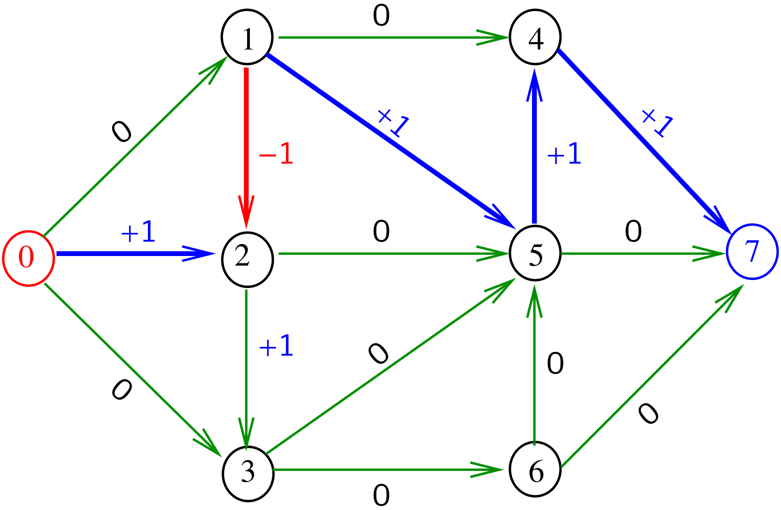


E agora? Fluxo é máximo?

iten$(f) = 6$

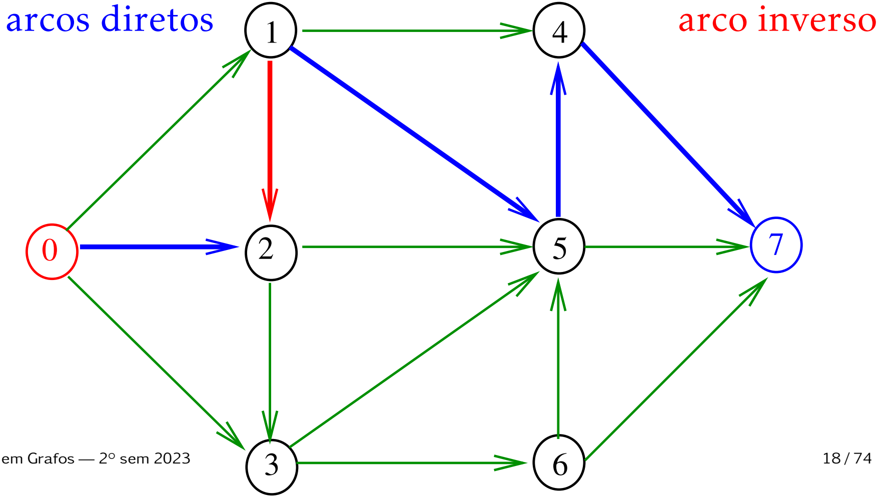


Onde mudou?



Pseudo-caminhos

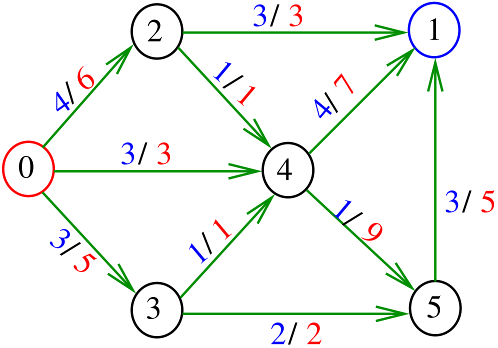
Um pseudo-caminho num digrafo é uma seqüência de vértices tal que para cada par (u,v) de vértices consecutivos, u-v ou v-u é um arco do digrafo.



Arcos cheios e vazios

Dizemos que um arco u-v está cheio se o fluxo no arco é igual à capacidade do arco. Dizemos que um arco u-v está vazio se o fluxo no arco é nulo.

Exemplo: 2-1 está cheio e 4-1 não está cheio



Caminho de aumento

Um caminho de aumento (= *augmenting path*) é um pseudo-caminho do vértice inicial ao final onde:

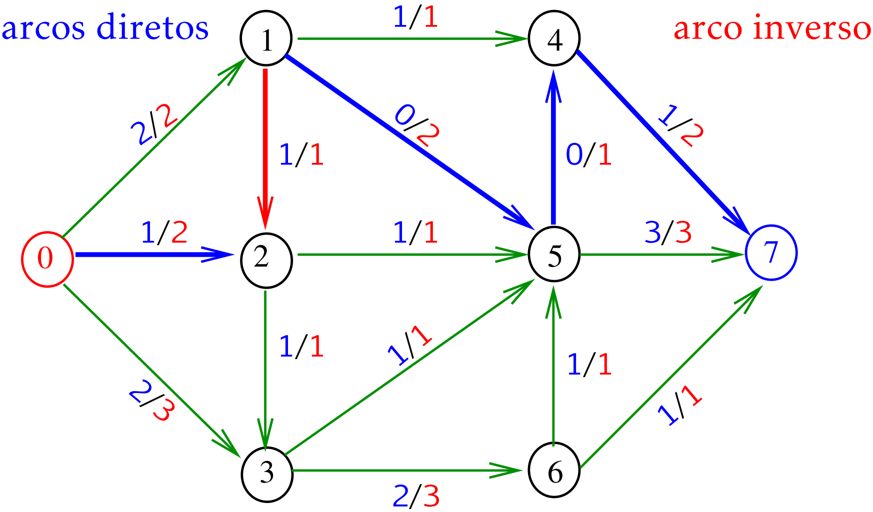
- os arcos diretos não estão cheios e

Caminho de aumento

Um caminho de aumento (= *augmenting path*) é um pseudo-caminho do vértice inicial ao final onde:

- os arcos diretos não estão cheios e
- os arcos inversos não estão vazios.

Exemplo



arcos diretos
arco inverso
0
1
2
3
4
5
6
7
2/2
1/2
2/3
1/1
1/1
0/2
1/1
1/1
1/1
2/3
0/1
1/1
1/2
3/3
1/1

Enviar fluxo através de caminhos de aumento

A operação de enviar d unidades de fluxo ao longo de um caminho de aumento consiste de:

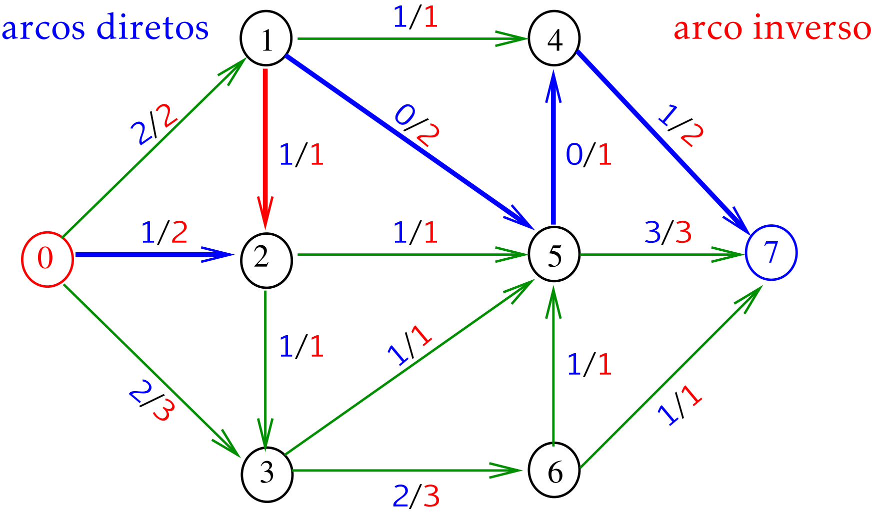
- para cada arco direto, some d ao fluxo

Enviar fluxo através de caminhos de aumento

A operação de enviar d unidades de fluxo ao longo de um caminho de aumento consiste de:

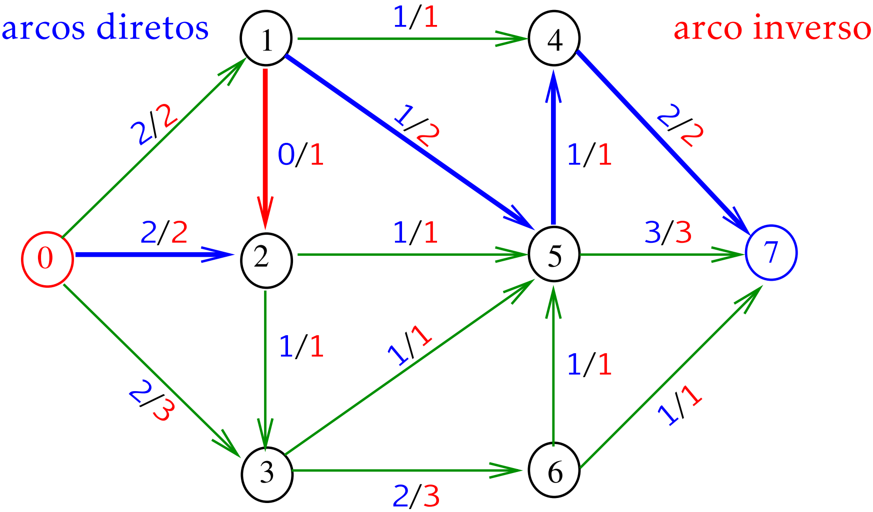
- para cada arco direto, some d ao fluxo
- para cada arco inverso, subtraia d do fluxo.

Exemplo



arcos diretos
arco inverso
0
1
2
3
4
5
6
7
2/2
1/1
1/1
0/2
0/1
1/2
1/2
1/1
3/3
1/1
1/1
1/1
2/3
1/1
2/3

Exemplo


arcos diretos
arco inverso
1/1
2/2
0/1
1/2
1/1
2/2
2/2
1/1
1/1
3/3
1/1
1/1
2/3
1/1
1/1
2/3
0
1
2
3
4
5
6
7

Capacidade residual

A capacidade residual de um arco direto a é

$$c(a) - f(a).$$

A capacidade residual de um arco reverso b é

$$f(b).$$

A capacidade residual de um caminho de aumento é a menor das capacidades residuais dos arcos do caminho.

Na rede a seguir, a capacidade residual do:

- arco inverso 2-1 é 1;

Capacidade residual

A capacidade residual de um arco direto a é

$$c(a) - f(a).$$

A capacidade residual de um arco reverso b é

$$f(b).$$

A capacidade residual de um caminho de aumento é a menor das capacidades residuais dos arcos do caminho.

Na rede a seguir, a capacidade residual do:

- arco inverso 2-1 é 1;
- arco direto 1-5 é 2; e

Capacidade residual

A capacidade residual de um arco direto a é

$$c(a) - f(a).$$

A capacidade residual de um arco reverso b é

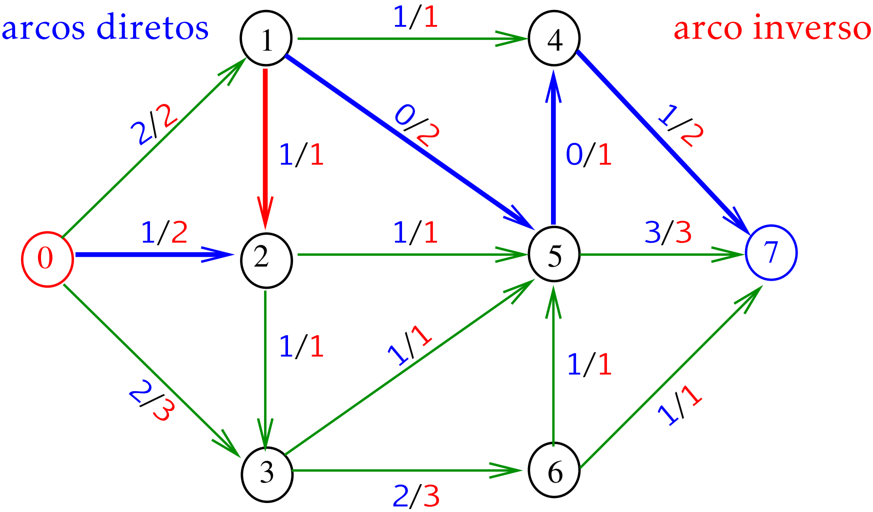
$$f(b).$$

A capacidade residual de um caminho de aumento é a menor das capacidades residuais dos arcos do caminho.

Na rede a seguir, a capacidade residual do:

- arco inverso 2-1 é 1;
- arco direto 1-5 é 2; e
- arco direto 4-7 é 1.

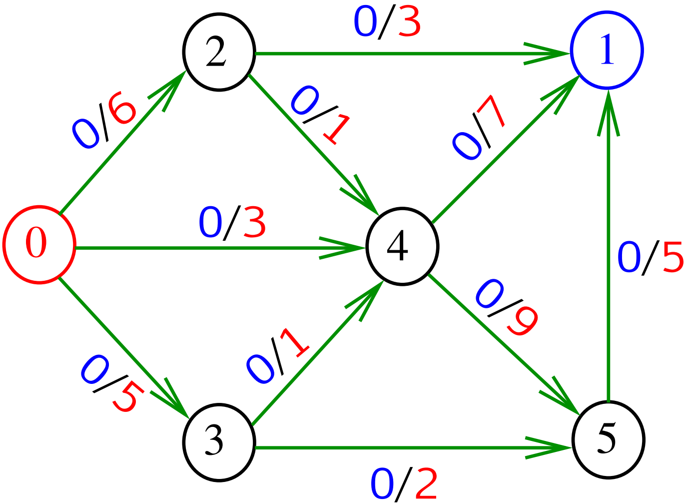
Exemplo



arcos diretos
arco inverso
0
1
2
3
4
5
6
7
2/2
1/2
2/3
1/1
1/1
0/2
1/1
1/1
1/1
2/3
0/1
1/1
1/2
3/3
1/1

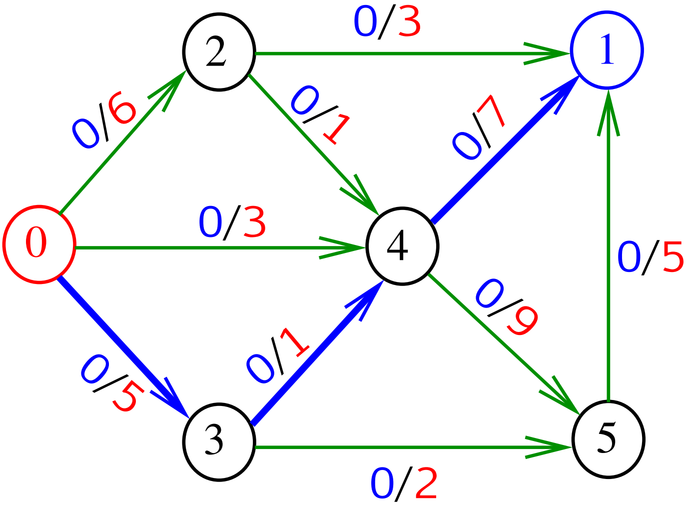
Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 0$ $\quad f(a)/c(a)$



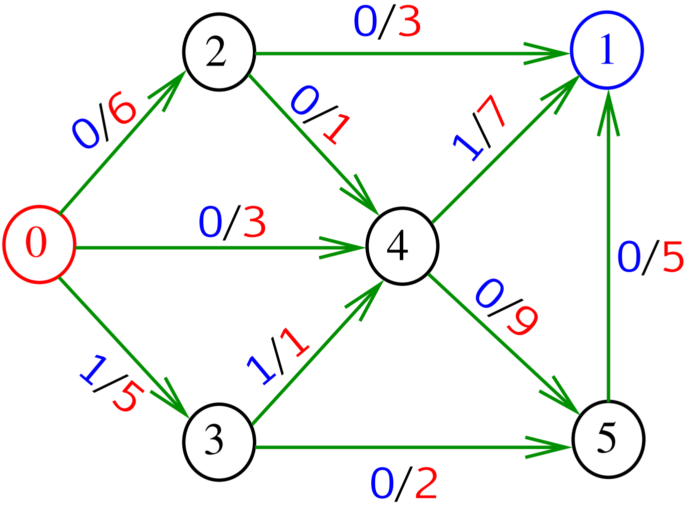
Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 0$ $f(a)/c(a)$



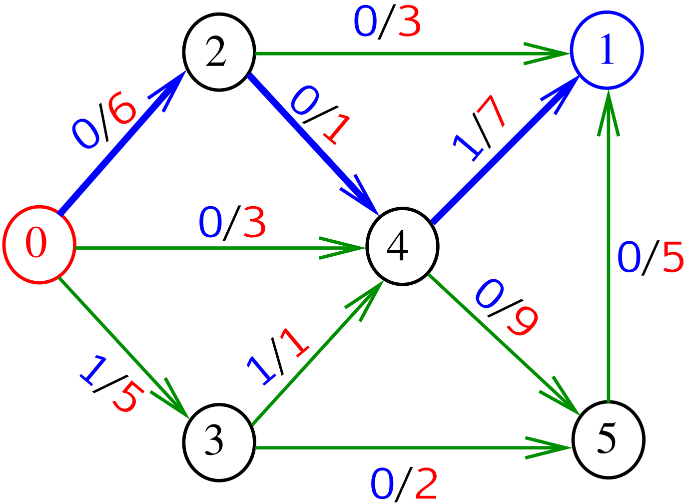
Método dos caminhos de aumento

$\mathrm{int}(f) = 1$ $\qquad f(a)/c(a)$



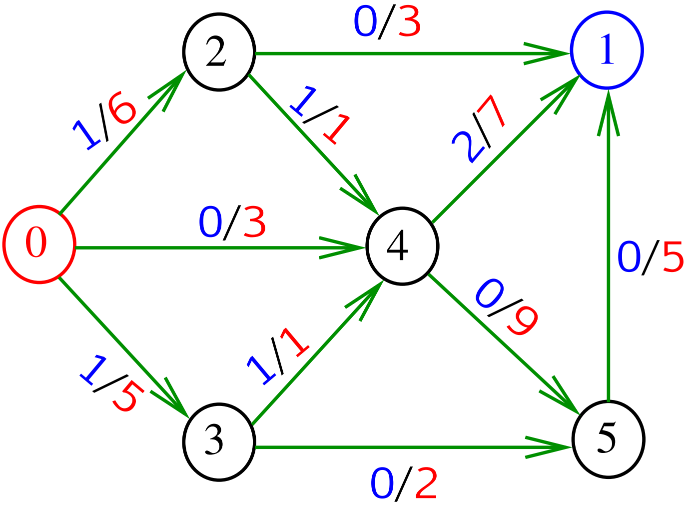
Método dos caminhos de aumento

int(f) = 1 $f(a)/c(a)$



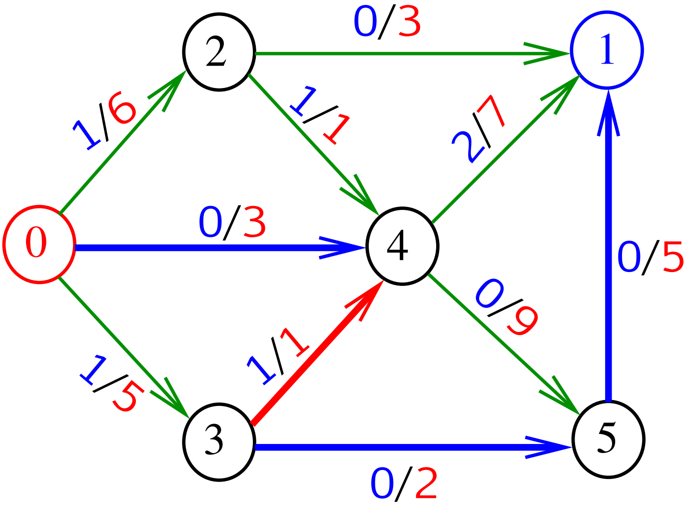
Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 2$ $\quad\quad$ $f(a)/c(a)$



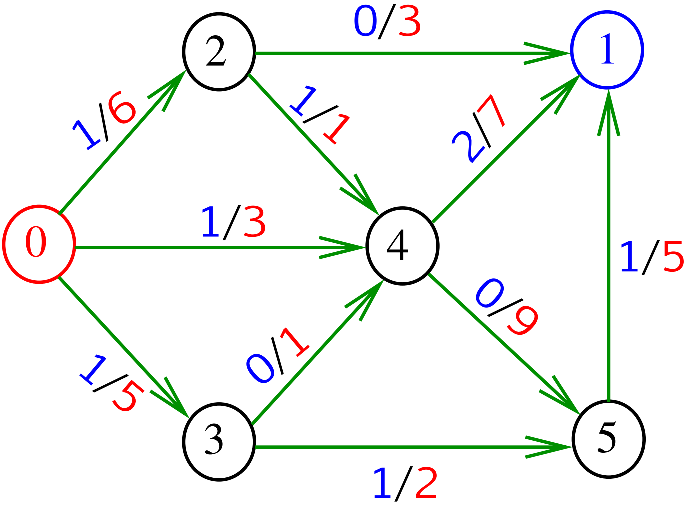
Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 2$ $\quad$ $f(a)/c(a)$



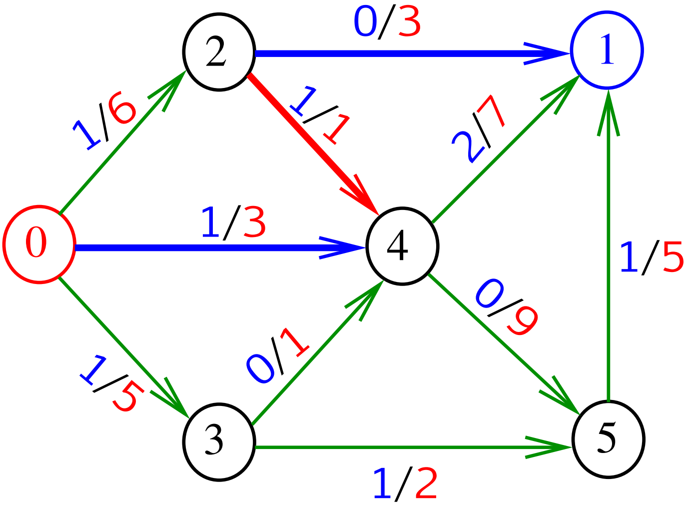
Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 3$ $\qquad f(a)/c(a)$



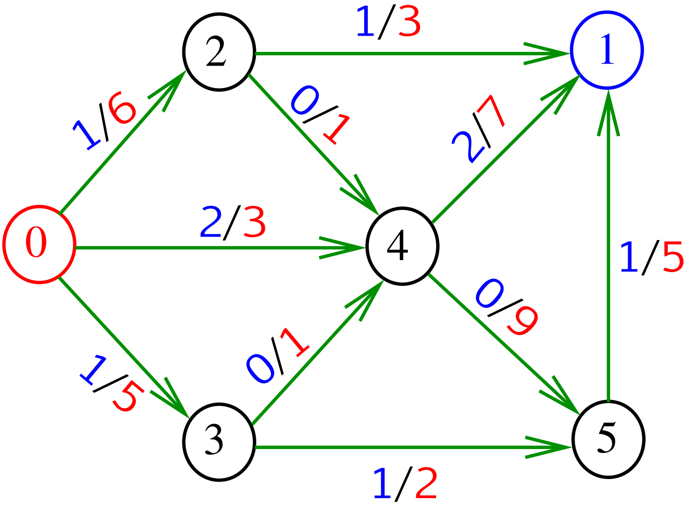
Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 3$ $f(a)/c(a)$



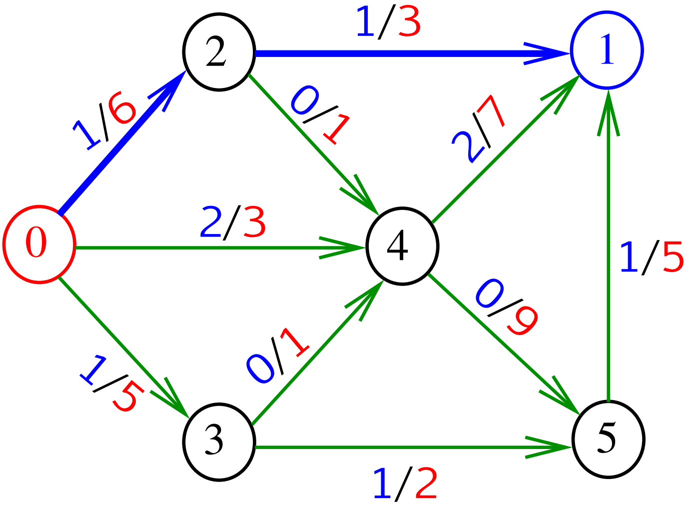
Método dos caminhos de aumento

int(f) = 4 $f(a)/c(a)$



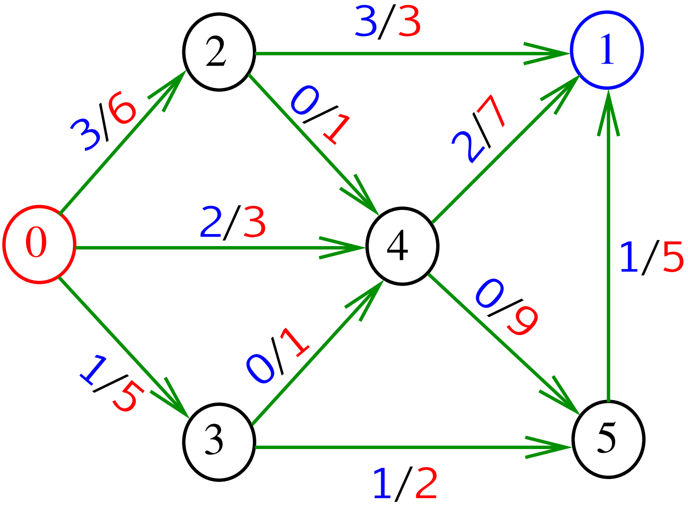
Método dos caminhos de aumento

int(f) = 4 $\qquad$ $f(a)/c(a)$



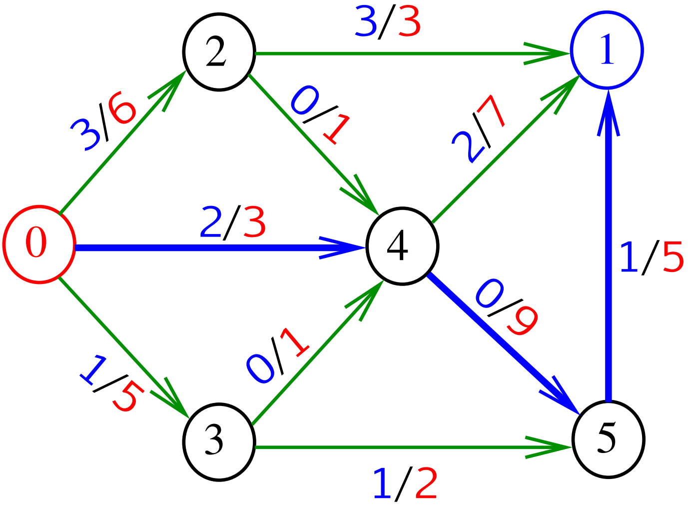
Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 6$ $\qquad f(a)/c(a)$



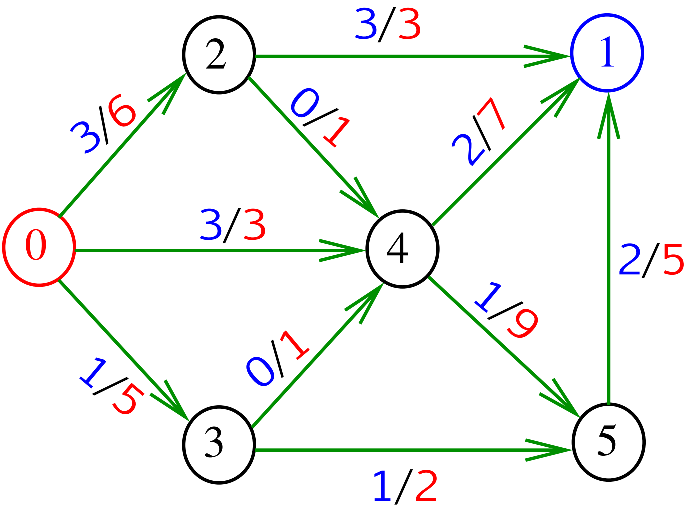
Método dos caminhos de aumento

$\mathrm{int}(f) = 6$ $\qquad$ $f(a)/c(a)$



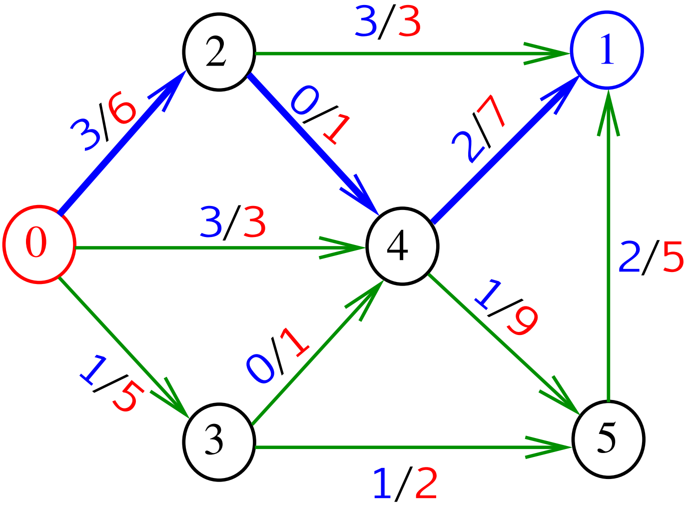
Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 7$ $f(a)/c(a)$



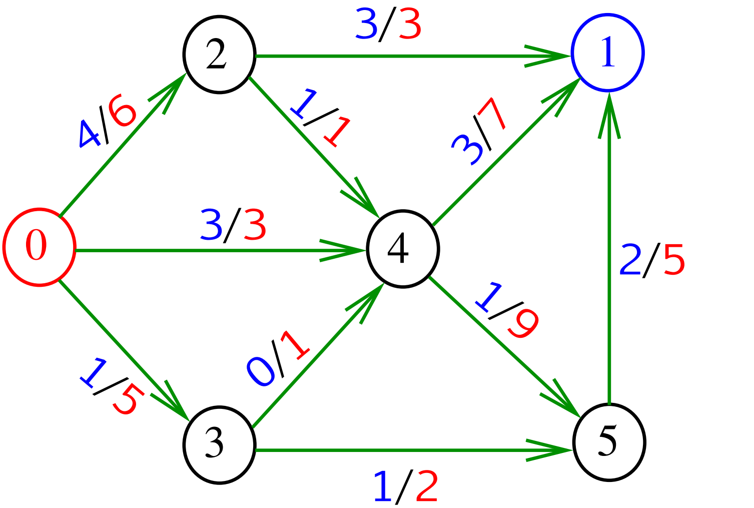
Método dos caminhos de aumento

$\mathrm{int}(f) = 7$ $\qquad f(a)/c(a)$



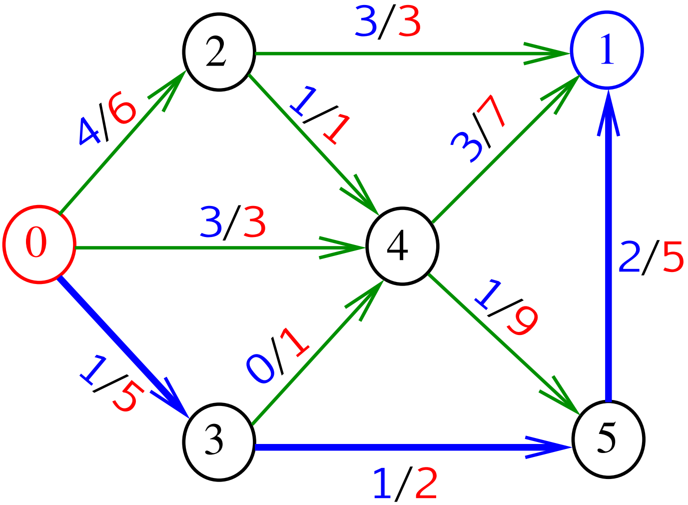
Método dos caminhos de aumento

$\mathrm{int}(f) = 8$



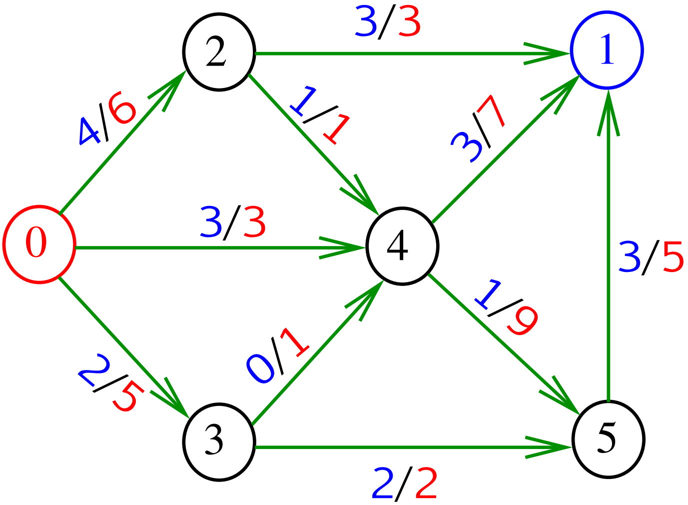
Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 8$ $f(a)/c(a)$



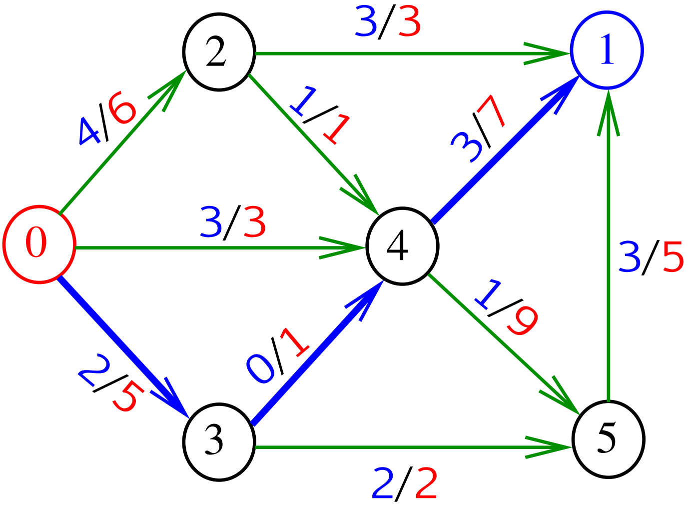
Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 9$ $f(a)/c(a)$



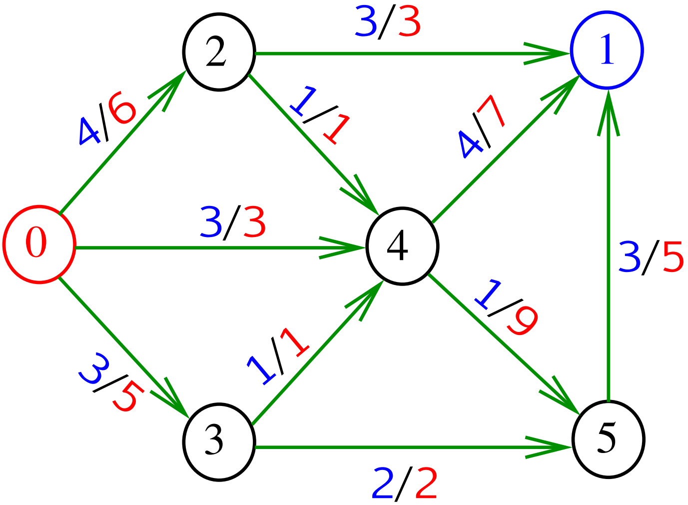
Método dos caminhos de aumento

$\text{int}(f) = 9$ $\qquad f(a)/c(a)$



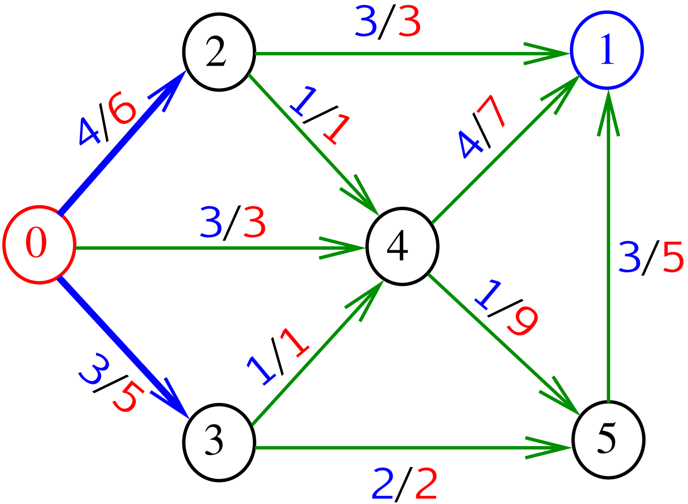
Método dos caminhos de aumento

int(f) = 10 $\qquad f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

int(f) = 10 $f(a)/c(a)$



Método dos caminhos de aumento

O método é iterativo. Cada iteração começa com uma fluxo f que respeita as capacidades.

No início da primeira iteração f é o fluxo nulo.
Cada iteração consiste em:

Caso 1: não existe um caminho de aumento
Devolva f e pare

Método dos caminhos de aumento

O método é iterativo. Cada iteração começa com uma fluxo f que respeita as capacidades.

No início da primeira iteração f é o fluxo nulo.
Cada iteração consiste em:

Caso 1: não existe um caminho de aumento
Devolva f e pare

Caso 2: existe uma caminho de aumento.
Seja d a capacidade residual de um caminho de aumento P.
Altere f para o fluxo obtido ao enviarmos d unidades de fluxo ao longo de P.

Relações invariantes

No início de cada iteração temos que:

(i0) os valores de f resultam de somas e subtrações de capacidades;

Relações invariantes

No início de cada iteração temos que:

(i0) os valores de f resultam de somas e subtrações de capacidades; relevância: *se* c *é inteiro, então* f *também é.*

(i1) f é um fluxo;

Relações invariantes

No início de cada iteração temos que:

(i0) os valores de f resultam de somas e subtrações de capacidades;

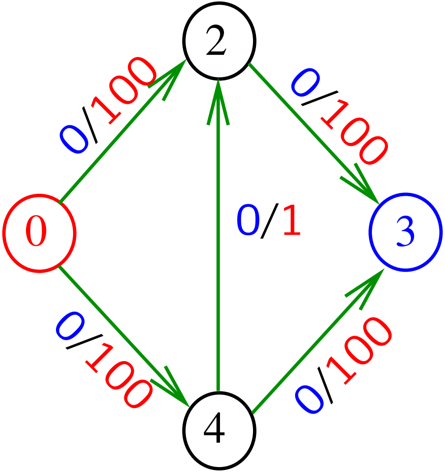
(i1) f é um fluxo;

(i2) f respeita c.

Número de iterações

$\text{int}(f) = 0$

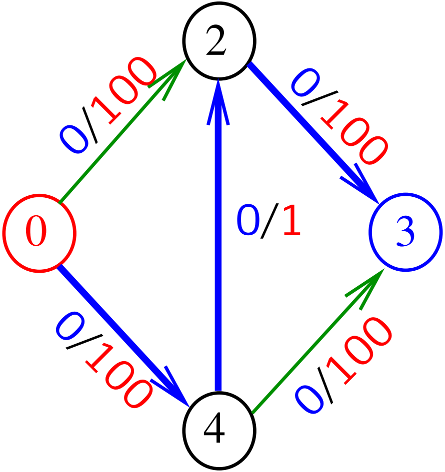
$f(a)/c(a)$



Número de iterações

$\text{int}(f) = 0$

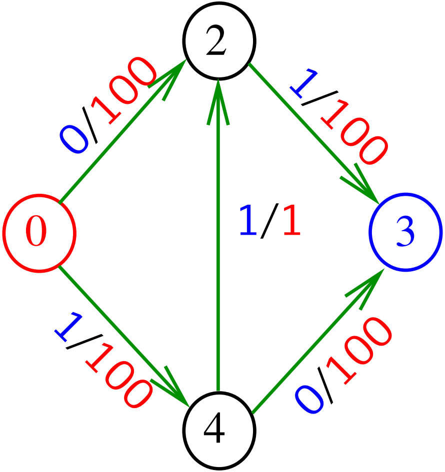
$f(a)/c(a)$



Número de iterações

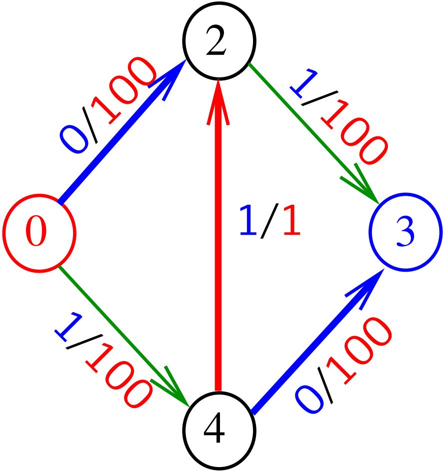
$\mathrm{int}(f) = 1$

$f(a)/c(a)$



Número de iterações

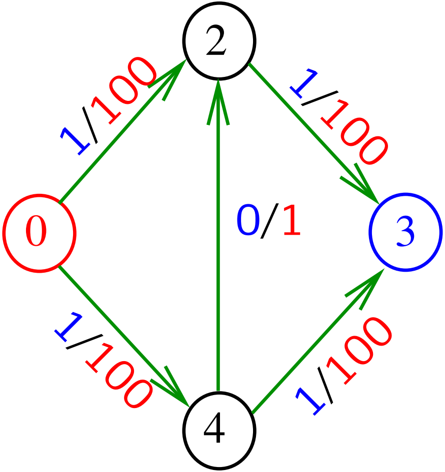
$\text{int}(f) = 1$ $f(a)/c(a)$



Número de iterações

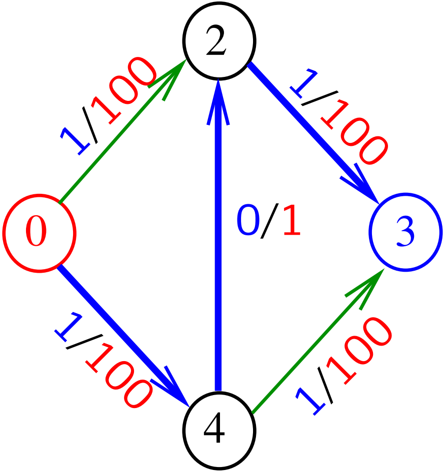
$\text{int}(f) = 2$

$f(a)/c(a)$



Número de iterações

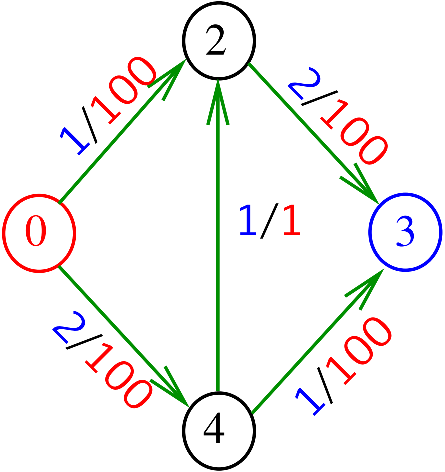
$\text{int}(f) = 2$ $\qquad\qquad$ $f(a)/c(a)$



Número de iterações

$\text{int}(f) = 3$

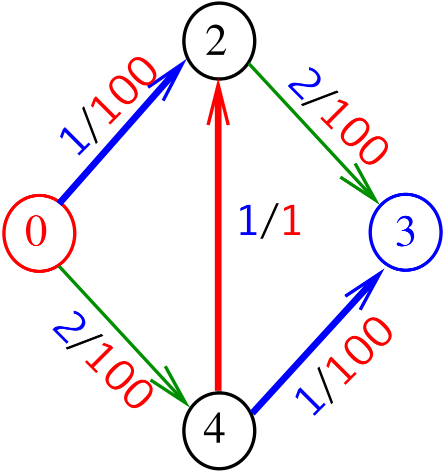
$f(a)/c(a)$



Número de iterações

$\text{int}(f) = 3$

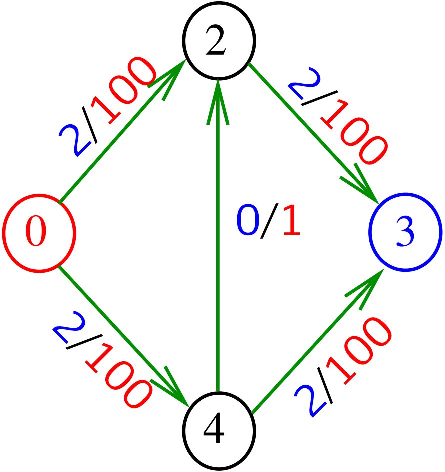
$f(a)/c(a)$



Número de iterações

$\text{int}(f) = 4$

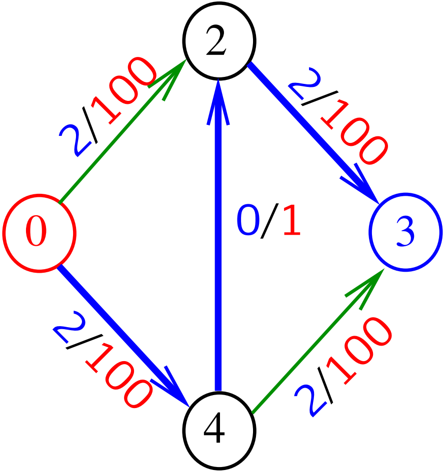
$f(a)/c(a)$



Número de iterações

$\mathrm{int}(f) = 4$

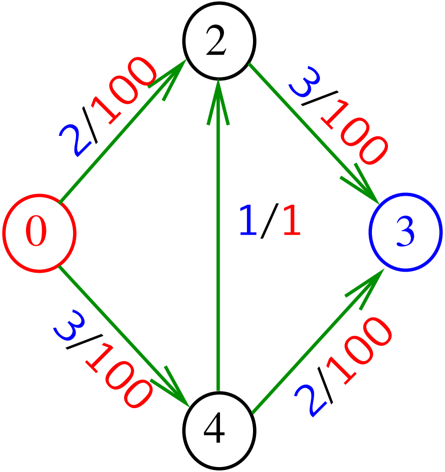
$f(a)/c(a)$



Número de iterações

$\mathrm{int}(f) = 5$

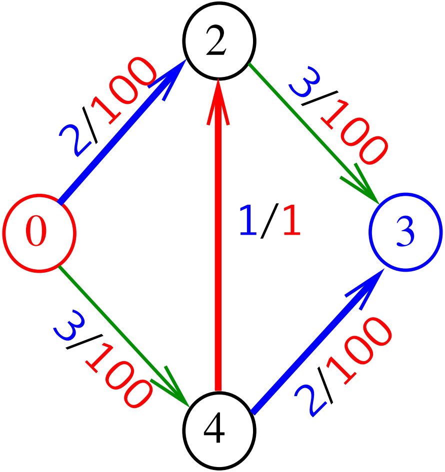
$f(a)/c(a)$



Número de iterações

$\text{int}(f) = 5$

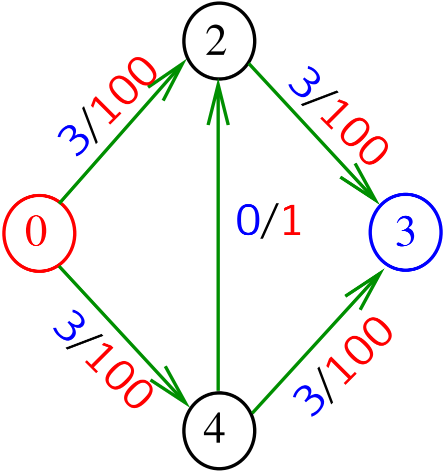
$f(a)/c(a)$



Número de iterações

$\text{int}(f) = 6$

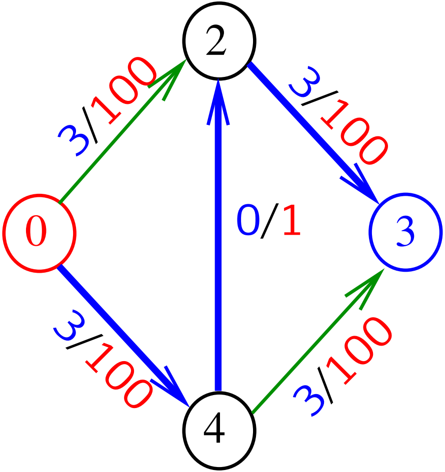
$f(a)/c(a)$



Número de iterações

$\text{int}(f) = 6$

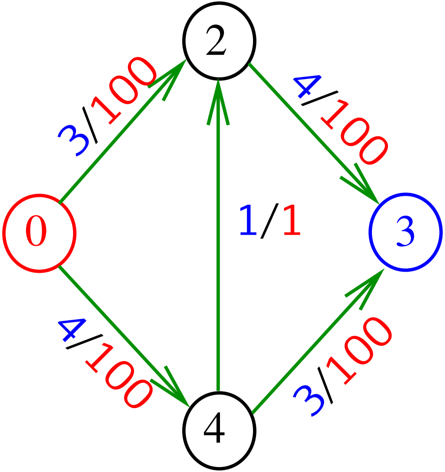
$f(a)/c(a)$



Número de iterações

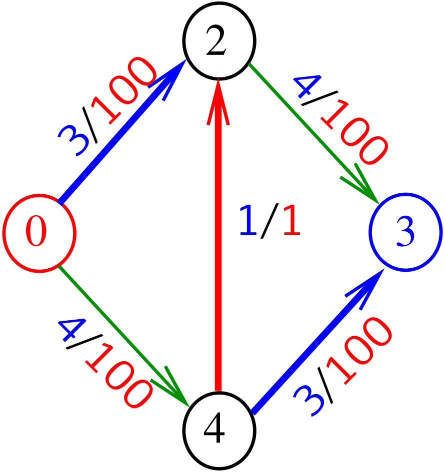
$\text{int}(f) = 7$

$f(a)/c(a)$



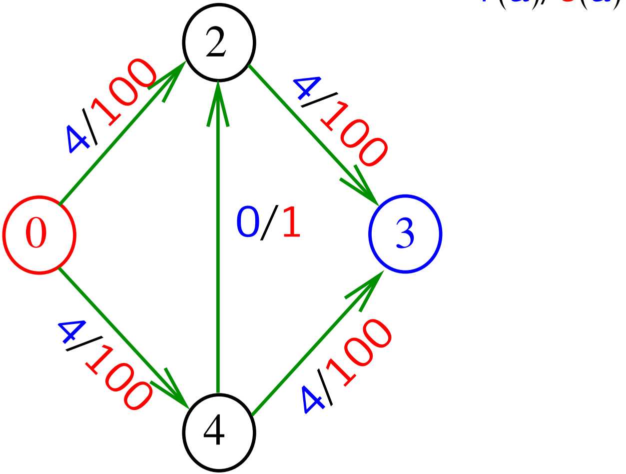
Número de iterações

$\text{int}(f) = 7$ $\qquad f(a)/c(a)$



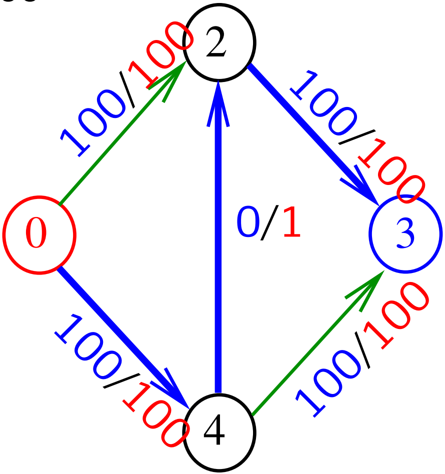
Número de iterações

$\text{int}(f) = 8$



Fluxo máximo

$\mathrm{int}(f) = 100$ $\qquad$ $f(a)/c(a)$



Conclusão

Se todos os arcos da rede têm capacidade menor que M então o número de caminhos de aumento necessário para atingir o fluxo máximo é menor que $V \times M$, sendo V o número de vértices da rede.