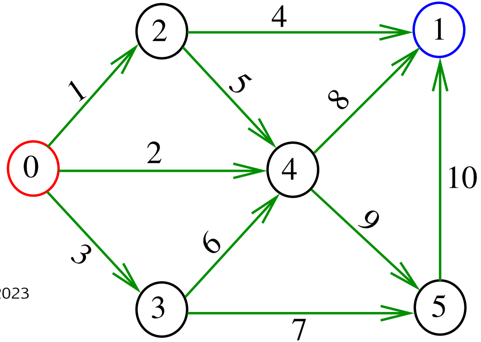
Relembrando

Fluxos,

Aumentos...

Fluxos em redes

Algumas funções a valores reais nos arcos de um digrafo serão denominadas fluxos. Esse termo se aplica quando estamos interessados nas relações entre *influxos* e *efluxos*, a serem definidos adiante.
Diremos o valor de f num arco é o fluxo no arco.
Exemplo: o fluxo no arco 2–4 é 5

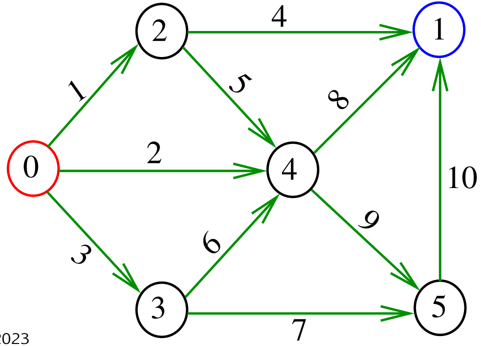


Influxos e efluxos

O influxo em v (= *inflow into* v) é a soma dos fluxos nos arcos que entram em v.

O efluxo de v (= *outflow from* v) é a soma dos fluxos nos arcos que saem de v.

Exemplo: em 4 o influxo é 13 e o efluxo é 17



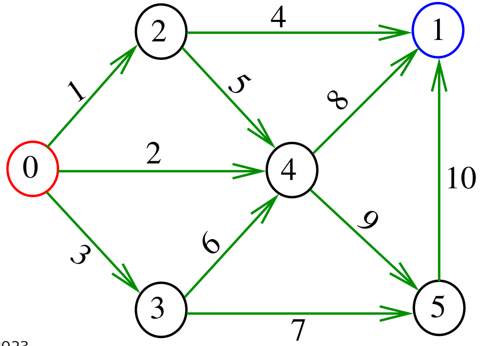
Saldos

O saldo em v é a diferença

$$\text{ef}(v) - \text{inf}(v)$$

entre o efluxo de v e o influxo em v.

Exemplo: o saldo do vértice 4 é 17-13=4



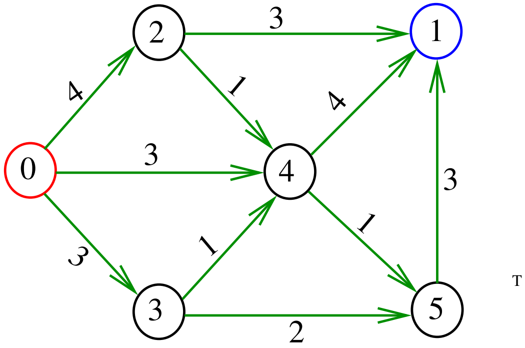
Fluxos

Num digrafo com vértice inicial s e vértice final t, um st-fluxo (= st-*flow*) é uma função f que atribui valores em $\mathbb{R}_{\geq}$ aos arcos de tal modo que o saldo em todo vértice distinto de s e t é nulo e em s é ≥ 0.

Propriedade de Fluxos

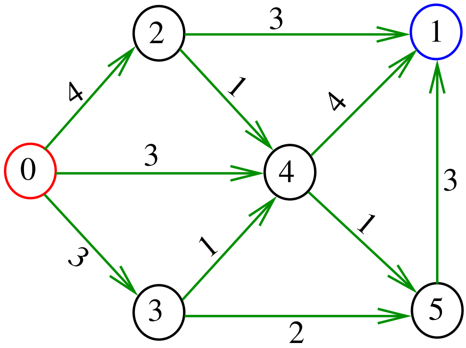
Para qualquer fluxo num digrafo com fonte s e ralo t, o saldo(t)=-saldo(s).

Exemplo: saldo em 0 = 10 = −10 = saldo em 1



Intensidade de fluxos

A intensidade de um fluxo f é o saldo de f em s.
Em geral (mas nem sempre) o influxo em s é nulo e o efluxo de t é nulo.
Exemplo: fluxo de intensidade 10



T

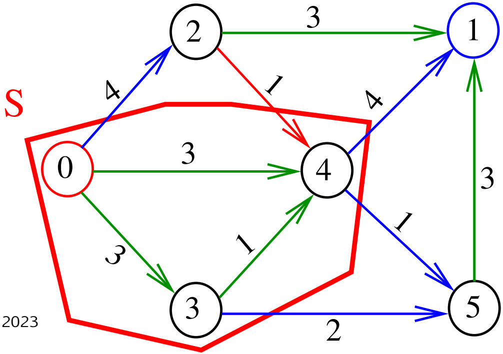
Saldo de fluxo num conjunto

Dado um conjunto S que contém s mas não contém t, o saldo em S é a diferença

$$\texttt{ef}(S) - \texttt{inf}(S),$$

entre o efluxo de S e o influxo em S

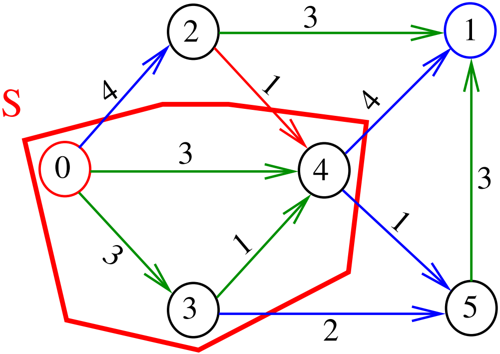
Exemplo: o saldo de S é $4 + 4 + 1 + 2 - 1 = 10$



Propriedade do Saldos

Para qualquer fluxo e para qualquer conjunto S que contém s mas não contém t, o saldo em S é igual ao saldo em s.

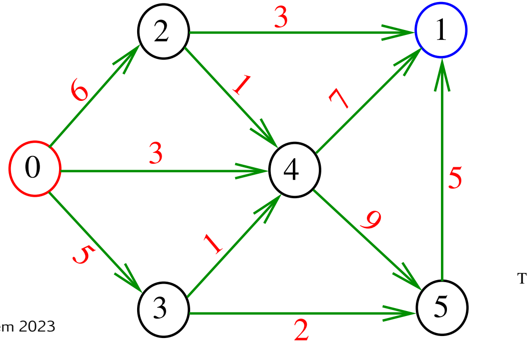
Exemplo: o saldo de S é $4 + 4 + 1 + 2 - 1 = 10$



Redes capacitadas

Uma rede capacitada é um digrafo com vértice inicial e vértice final em que a cada um arcos está associado uma capacidade, que é ou um número em $\mathbb{R}_{\geq}$ ou o símbolo $+\infty$.

Exemplo:

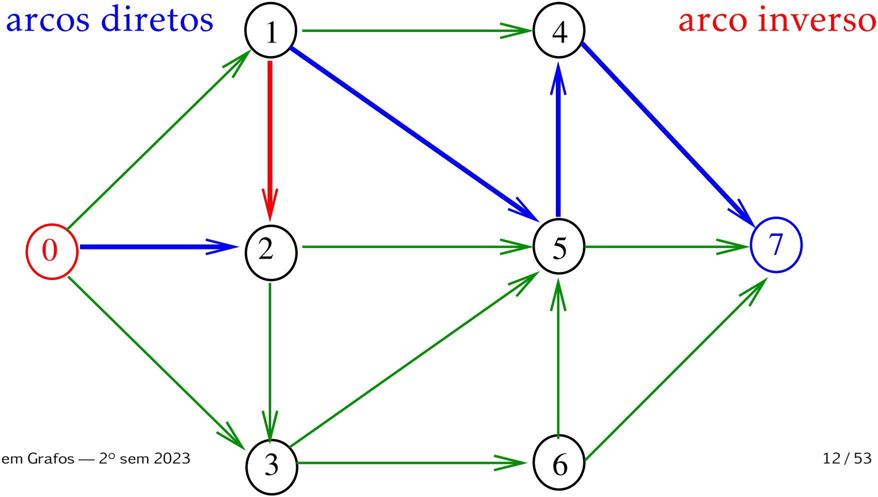


Problema do fluxo máximo

Problema. Dada uma rede capacitada, encontrar um fluxo de intensidade máxima (popularmente chamado de fluxo máximo) dentre os que respeitam as capacidades dos arcos.

Pseudo-caminhos

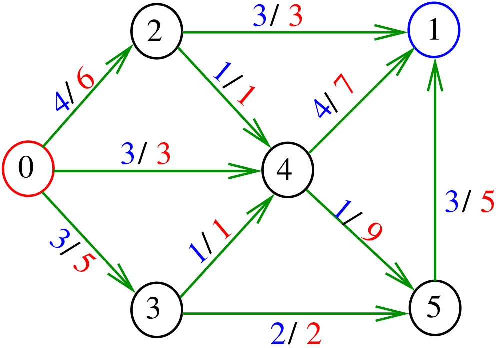
Um pseudo-caminho num digrafo é uma seqüência de vértices tal que para cada par (u,v) de vértices consecutivos, u-v ou v-u é um arco do digrafo.



Arcos cheios e vazios

Dizemos que um arco *u*-*v* está cheio se o fluxo no arco é igual à capacidade do arco. Dizemos que um arco *u*-*v* está vazio se o fluxo no arco é nulo.

Exemplo: 2-1 está cheio e 4-1 não está cheio



Caminho de aumento

Um caminho de aumento (= *augmenting path*) é um pseudo-caminho do vértice inicial ao final onde:

- os arcos diretos não estão cheios e

Caminho de aumento

Um caminho de aumento (= *augmenting path*) é um pseudo-caminho do vértice inicial ao final onde:

- os arcos diretos não estão cheios e
- os arcos inversos não estão vazios.

Enviar fluxo através de caminhos de aumento

A operação de enviar d unidades de fluxo ao longo de um caminho de aumento consiste de:

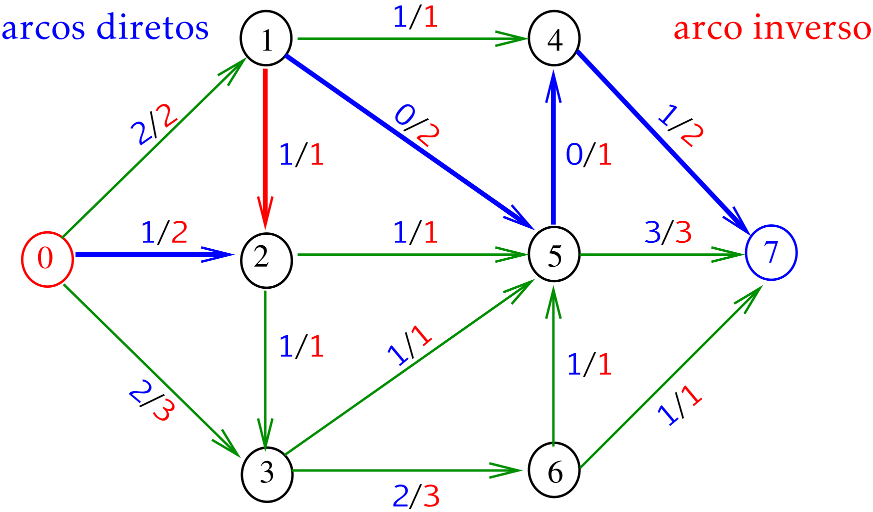
- para cada arco direto, some d ao fluxo

Enviar fluxo através de caminhos de aumento

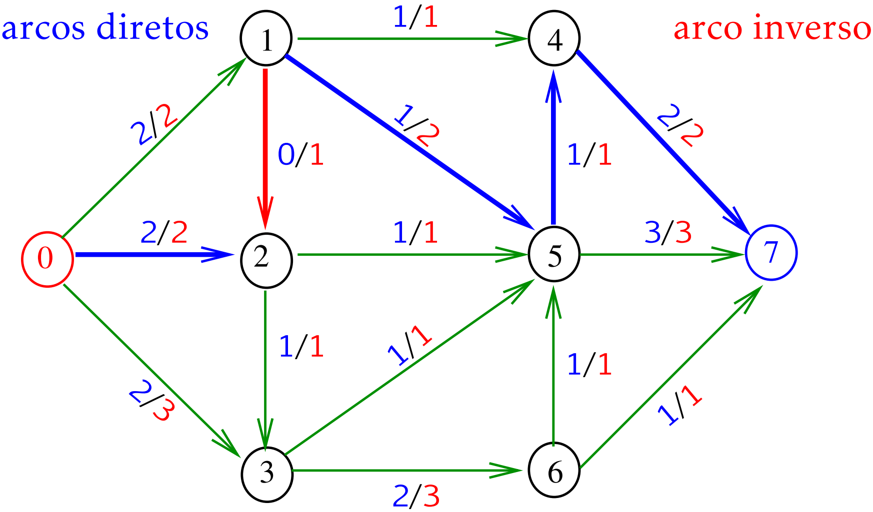
A operação de enviar d unidades de fluxo ao longo de um caminho de aumento consiste de:

- para cada arco direto, some d ao fluxo
- para cada arco inverso, subtraia d do fluxo.

Exemplo


arcos diretos
arco inverso
0
1
2
3
4
5
6
7
1/1
2/2
1/1
0/2
1/2
0/1
1/2
1/1
3/3
1/1
2/3
1/1
1/1
1/1
2/3

Exemplo


arcos diretos
arco inverso
0
1
2
3
4
5
6
7
1/1
2/2
0/1
1/2
1/1
2/2
2/2
1/1
3/3
1/1
1/1
1/1
2/3
1/1
2/3

Capacidade residual

A capacidade residual de um arco direto a é

$$c(a) - f(a).$$

A capacidade residual de um arco reverso b é

$$f(b).$$

A capacidade residual de um caminho de aumento é a menor das capacidades residuais dos arcos do caminho.

Na rede a seguir, a capacidade residual do:

- arco inverso 2-1 é 1;

Capacidade residual

A capacidade residual de um arco direto a é

$$c(a) - f(a).$$

A capacidade residual de um arco reverso b é

$$f(b).$$

A capacidade residual de um caminho de aumento é a menor das capacidades residuais dos arcos do caminho.

Na rede a seguir, a capacidade residual do:

- arco inverso 2-1 é 1;
- arco direto 1-5 é 2; e

Capacidade residual

A capacidade residual de um arco direto a é

$$c(a) - f(a).$$

A capacidade residual de um arco reverso b é

$$f(b).$$

A capacidade residual de um caminho de aumento é a menor das capacidades residuais dos arcos do caminho.

Na rede a seguir, a capacidade residual do:

- arco inverso 2-1 é 1;
- arco direto 1-5 é 2; e
- arco direto 4-7 é 1.

Método dos caminhos de aumento

O método é iterativo. Cada iteração começa com uma fluxo f que respeita as capacidades.

No início da primeira iteração f é o fluxo nulo.
Cada iteração consiste em:

Caso 1: existe uma caminho de aumento.
Seja d a capacidade residual de um caminho de aumento P.
Altere f para o fluxo obtido ao enviarmos d unidades de fluxo ao longo de P.

Método dos caminhos de aumento

O método é iterativo. Cada iteração começa com uma fluxo f que respeita as capacidades.

No início da primeira iteração f é o fluxo nulo.
Cada iteração consiste em:

Caso 1: existe uma caminho de aumento.
Seja d a capacidade residual de um caminho de aumento P.
Altere f para o fluxo obtido ao enviarmos d unidades de fluxo ao longo de P.

Caso 2: não existe um caminho de aumento.
Devolva f e pare

Busca de caminho de aumento

Busca de caminho de aumento

1. Grafo auxiliar só com os arcos que não estão cheios e os reversos dos arcos que têm algum fluxo.

Busca de caminho de aumento

1. Grafo auxiliar só com os arcos que não estão cheios e os reversos dos arcos que têm algum fluxo.
2. Introduzir, para cada arco, um arco reverso, (seu espelho), sincronizado com ele pelo invariante

$$c(\text{espelho}) = f(\text{original}) \tag{1}$$

$$f(\text{espelho}) = 0. \tag{2}$$

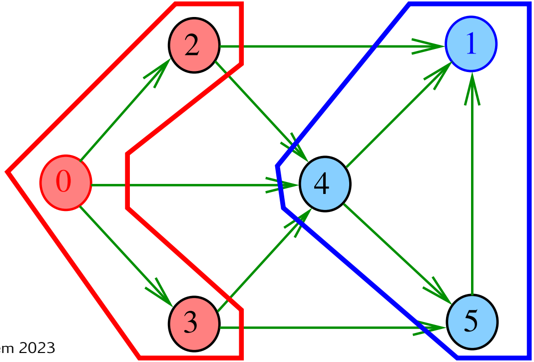
Um caminho de aumento só usa arcos não cheios; ao enviar fluxo através de um espelho, se diminui sua capacidade, mantendo a sincronização.

Cortes

Um corte (= s t-*cut*) é qualquer partição (S, T) do conjunto de vértices tal que

s está em S e t está em T.

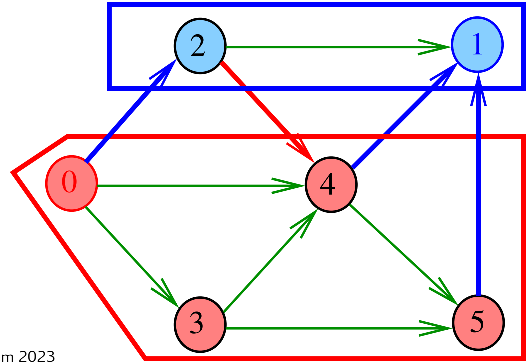
Exemplo:



Arcos diretos e arcos inversos

Um arco direto de um corte (S, T) é qualquer arco que vai de S para T.

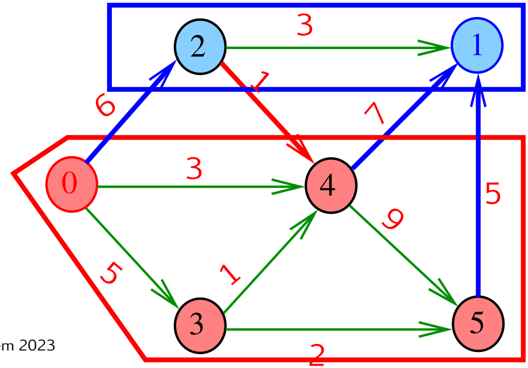
Um arco inverso do corte é qualquer arco que vai de T para S.



Capacidade de um corte

Numa rede capacitada, a capacidade de um corte (S,T) é a soma das capacidades dos arcos diretos do corte.

Exemplo: corte de capacidade 18

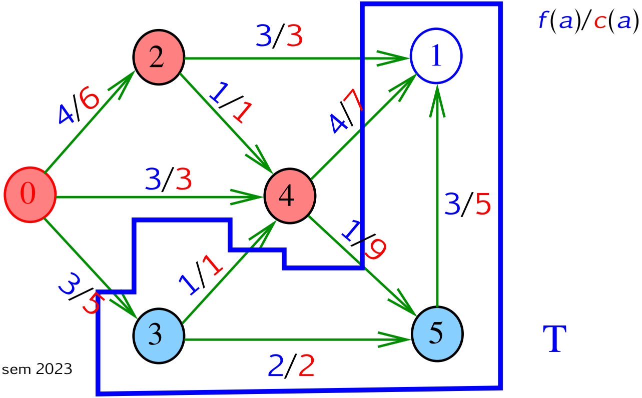


Lema da dualidade

Se f é um fluxo que respeita c e (S, T) é um corte então

intensidade de f ≤ capacidade de (S,T).

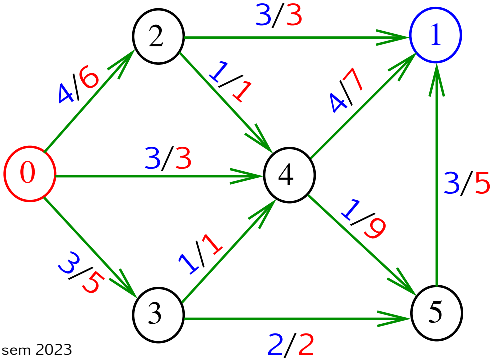
Exemplo: $\text{int}(f) = 10 \leq 24 = c(S, T)$.



Conseqüência

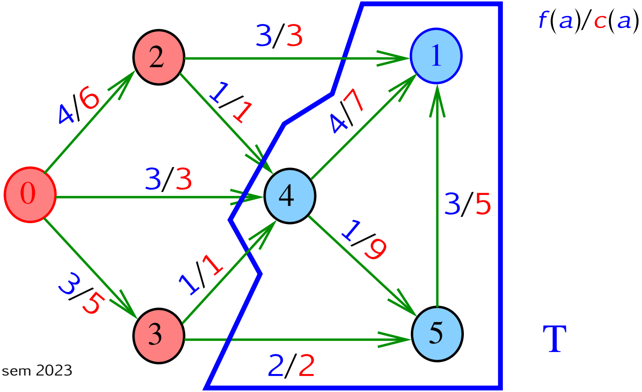
Se f é um fluxo que respeita c e (S, T) é um corte tais que intensidade de f= capacidade de (S,T). então f é um fluxo de máximo e (S, T) é um corte de capacidade mínima.

$f(a)/c(a)$

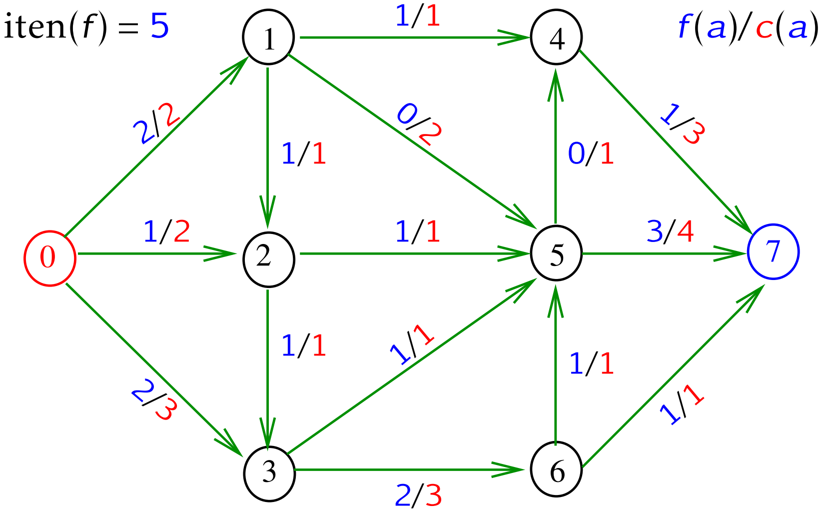


Conseqüência

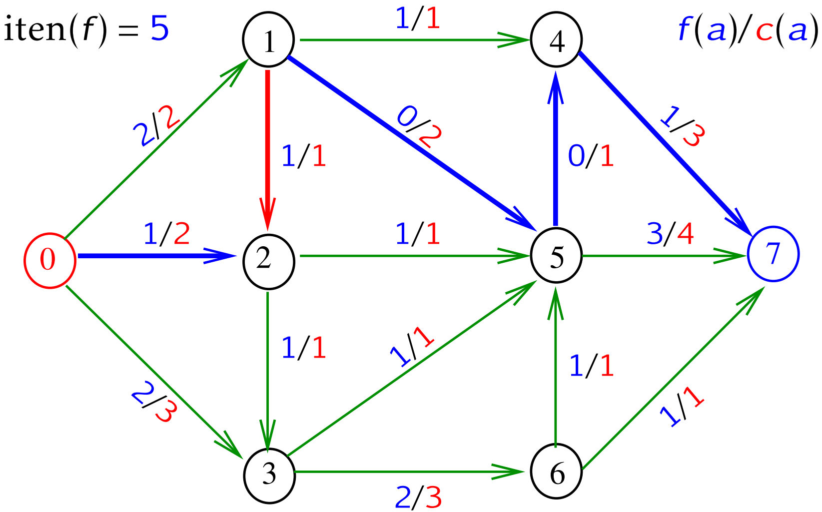
Se f é um fluxo que respeita c e (S, T) é um corte tais que intensidade de f= capacidade de (S,T). então f é um fluxo de máximo e (S, T) é um corte de capacidade mínima.



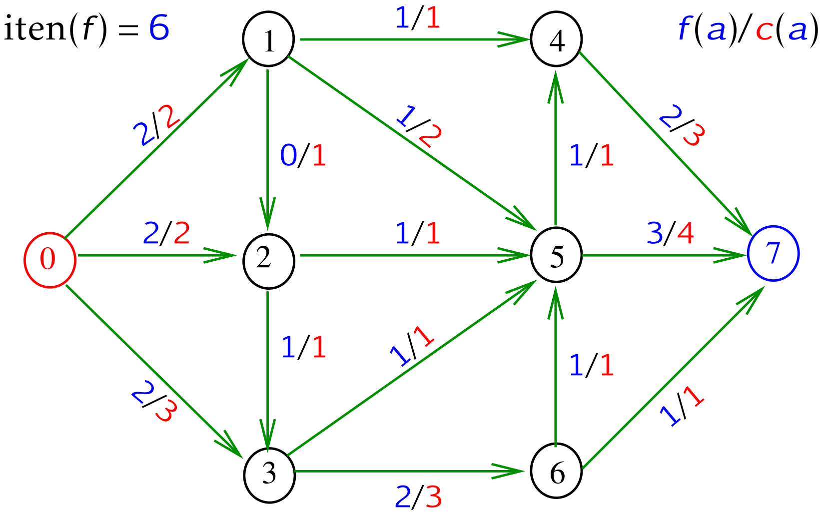
Fluxo é máximo?



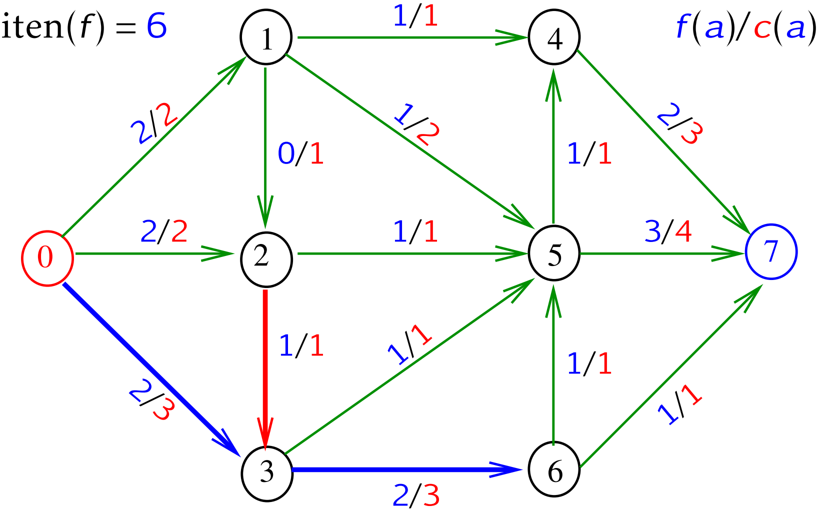
Caminho de aumento



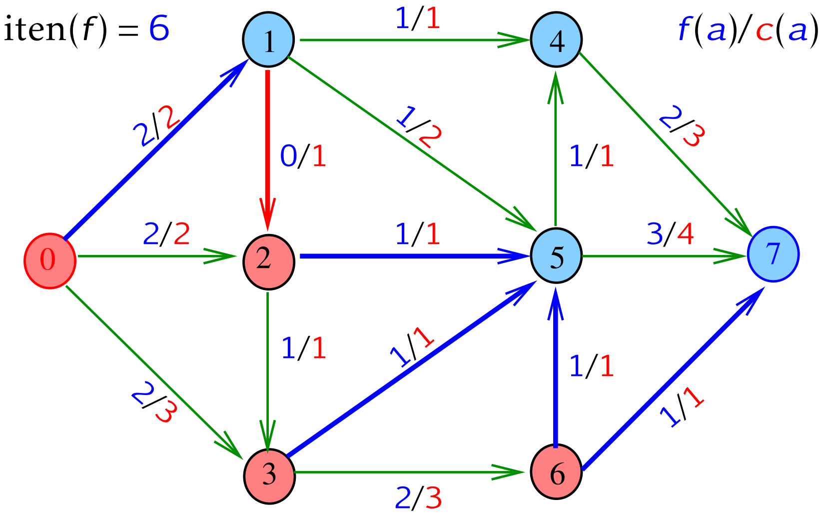
E agora? Fluxo é máximo?



Fluxo é máximo!



Fluxo é máximo!



Correção do método

Para mostrar que a correção do método dos caminhos de aumento basta mostrar que:

> *se não existe um caminho de aumento então o fluxo tem intensidade máxima.*

Correção do método

Para mostrar que a correção do método dos caminhos de aumento basta mostrar que:

> *se não existe um caminho de aumento então o fluxo tem intensidade máxima.*

Correção do método

Para mostrar que a correção do método dos caminhos de aumento basta mostrar que:

> *se não existe um caminho de aumento então o fluxo tem intensidade máxima.*

Seja S o conjunto de todos os vértices que são término de um "caminho de aumento".
Seja T o conjunto dos demais vértices do digrafo.

É claro que s está em S e t está em T. Portanto, (S,T) é um corte.

Todos os arcos diretos desse corte estão cheios
Todos os arcos inversos estão vazios.

Portanto, o fluxo através desse corte é igual à capacidade do corte.

Logo, pelo lema da dualidade, nosso fluxo tem intensidade máxima.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

O teorema foi demonstrado por Ford e Fulkerson e, independentemente, por Kotzig.

Para quaisquer dois vértices s e t em uma rede capacidade com função-capacidade c tem-se que

$$\max\{\mathrm{int}(f) : f \text{ é fluxo que respeita } c\} \\ = \min\{c(S,T) : (S,T) \text{ é um corte}\}.$$

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

O teorema foi demonstrado por Ford e Fulkerson e, independentemente, por Kotzig.

> Em qualquer rede capacitada, a intensidade de um fluxo máximo é igual à capacidade de um corte mínimo.

E a complexidade?

Teorema

(Edmonds e Karp) Se a cada iteração se usa um caminho aumentador de comprimento mínimo, o algoritmo termina em até $\frac{nm}{2}$ *iterações.*
A complexidade total é $\mathcal{O}(nm^2)$.

E a complexidade?

Teorema

(Edmonds e Karp) Se a cada iteração se usa um caminho aumentador de comprimento mínimo, o algoritmo termina em até $\frac{nm}{2}$ *iterações.*
A complexidade total é $\mathcal{O}(nm^2)$.

E a complexidade?

Teorema

(Edmonds e Karp) Se a cada iteração se usa um caminho aumentador de comprimento mínimo, o algoritmo termina em até $\frac{nm}{2}$ *iterações.*
A complexidade total é $\mathcal{O}(nm^2)$.

Implementação: procurar caminho aumentador usando busca em largura.

E a complexidade?

Teorema

(Edmonds e Karp) Se a cada iteração se usa um caminho aumentador de comprimento mínimo, o algoritmo termina em até $\frac{nm}{2}$ *iterações.*
A complexidade total é $\mathcal{O}(nm^2)$.

Implementação: procurar caminho aumentador usando busca em largura.
Obs: existem algoritmos mais rápidos — $\mathcal{O}(n^2 m)$ e até melhores.

Algumas aplicações (matemáticas)

- Emparelhamentos em grafos bipartidos.

Algumas aplicações (matemáticas)

- Emparelhamentos em grafos bipartidos.
- Teorema de Dilworth.

Algumas aplicações (matemáticas)

- Emparelhamentos em grafos bipartidos.
- Teorema de Dilworth.
- Teorema de Menger.

Algumas aplicações (matemáticas)

- Emparelhamentos em grafos bipartidos.
- Teorema de Dilworth.
- Teorema de Menger.
- Determinar conectividade.

Algumas aplicações (matemáticas)

- Emparelhamentos em grafos bipartidos.
- Teorema de Dilworth.
- Teorema de Menger.
- Determinar conectividade.
- Circulações.