Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

O teorema foi demonstrado por Ford e Fulkerson e, independentemente, por Kotzig.

> Para quaisquer dois vértices s e t em uma rede capacidade com função-capacidade c tem-se que
>
> $$\max\{\text{int}(f) : f \text{ é fluxo que respeita } c\}$$
> $$= \min\{c(S,T) : (S,T) \text{ é um corte}\}.$$

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

O teorema foi demonstrado por Ford e Fulkerson e, independentemente, por Kotzig.

> Em qualquer rede capacitada, a intensidade de um fluxo máximo é igual à capacidade de um corte mínimo.

Algumas aplicações (matemáticas)

- Emparelhamentos em grafos bipartidos.

Algumas aplicações (matemáticas)

- Emparelhamentos em grafos bipartidos.
- Teorema de Dilworth.

Algumas aplicações (matemáticas)

- Emparelhamentos em grafos bipartidos.
- Teorema de Dilworth.
- Teorema de Menger.

Algumas aplicações (matemáticas)

- Emparelhamentos em grafos bipartidos.
- Teorema de Dilworth.
- Teorema de Menger.
- Determinar conectividade.

Algumas aplicações (matemáticas)

- Emparelhamentos em grafos bipartidos.
- Teorema de Dilworth.
- Teorema de Menger.
- Determinar conectividade.
- Circulações.

Emparelhamentos em grafos bipartidos

- G com bipartição (A, B).

Emparelhamentos em grafos bipartidos

- G com bipartição (A, B).
- Vértices novos s – ligado a todos de A,
  t – ligado a todos de B.

Emparelhamentos em grafos bipartidos

- G com bipartição (A, B).
- Vértices novos s – ligado a todos de A,
  t – ligado a todos de B.
- Arcos e capacidades: $s \xrightarrow{1} A \xrightarrow{\infty} B \xrightarrow{1} t$.

Emparelhamentos em grafos bipartidos

- G com bipartição (A, B).
- Vértices novos s – ligado a todos de A,
  t – ligado a todos de B.
- Arcos e capacidades: $s \xrightarrow{1} A \xrightarrow{\infty} B \xrightarrow{1} t$.
- Fácil: existe um s t-fluxo de intensidade k sse existe em G um emparelhamento de tamanho k.

Generalização

Suponha dado para cada vértice um número máximo de arestas a incidir sobre ele.

Generalização

Suponha dado para cada vértice um número máximo de arestas a incidir sobre ele.

Como alterar?

Generalização

Suponha dado para cada vértice um número máximo de arestas a incidir sobre ele.

Como alterar?

Como tratar ou evitar repetições?

Ordens parciais

- Uma cadeia é subconjunto totalmente ordenado.

Ordens parciais

- Uma cadeia é subconjunto totalmente ordenado.
- Um anticadeia é um subconjunto de elementos dois a dois incomparáveis.

Teorema de Dilworth

Teorema

Numa ordem parcial finita, o tamanho de uma coleção mínima de cadeias cuja união é tudo é igual ao tamanho máximo de uma anticadeia.

Teorema de Menger

Teorema

Num grafo dirigido, o número de caminhos dirigidos internamente disjuntos de um vértice s *a um* t *é igual ao tamanho do menor conjunto de vértices separando* s *de* t*.*

Teorema de Menger

Teorema

Num grafo dirigido, o número de caminhos dirigidos internamente disjuntos de um vértice s a um t é igual ao tamanho do menor conjunto de vértices separando s de t.

Teorema de Menger

Teorema

Num grafo dirigido, o número de caminhos dirigidos internamente disjuntos de um vértice s a um t é igual ao tamanho do menor conjunto de vértices separando s de t.

Teorema

Num grafo, o número de caminhos internamente disjuntos de um vértice s a um t é igual ao tamanho do menor conjunto de vértices separando s de t.

Requisito

- Requisitos numa rede capacitada são números $r_j \leq c_j$ associados aos arcos.

Requisito

- Requisitos numa rede capacitada são números $r_j \leq c_j$ associados aos arcos.
- Um s t-fluxo nessa rede é uma atribuição de valores x_j aos arcos tais que $r_j \leq x_j \leq c_j$ e a conservação de fluxo vale nos vértices exceto s e t.

T. do fluxo máximo corte mínimo

Teorema

Numa rede capacitada com requisitos, se existe s t-fluxo, a intensidade máxima de um s t-fluxo é igual à capacidade mínima de um corte separando s de t.

T. do fluxo máximo corte mínimo

Teorema

Numa rede capacitada com requisitos, se existe s t-fluxo, a intensidade máxima de um s t-fluxo é igual à capacidade mínima de um corte separando s de t.

T. do fluxo máximo corte mínimo

Teorema

Numa rede capacitada com requisitos, se existe s t-fluxo, a intensidade máxima de um s t-fluxo é igual à capacidade mínima de um corte separando s de t.

Se $s \in S \not\ni t$, a capacidade de S é

$$\sum_{\substack{\mathrm{in}(j) \in S \\ \mathrm{fim}(j) \notin S}} c_j - \sum_{\substack{\mathrm{fim}(j) \in S \\ \mathrm{in}(j) \notin S}} r_j$$

Teorema da circulação

Num grafo dirigido com capacidades e requisitos, uma circulação é uma atribuição de valores às arestas que respeitam capacidades e requisitos e tal que em todos os vértices vale a regra de conservação.

Teorema da circulação

Num grafo dirigido com capacidades e requisitos, uma circulação é uma atribuição de valores às arestas que respeitam capacidades e requisitos e tal que em todos os vértices vale a regra de conservação.

Teorema

(Hoffman) Num grafo dirigido com capacidades c e requisitos r, existe uma circulação se e somente se, para todo conjunto S de vértices

$$\sum_{\substack{in(j) \in S \\ fim(j) \notin S}} c_j \geq \sum_{\substack{fim(j) \in S \\ in(j) \notin S}} r_j$$