Ordenação em tempo linear

CLRS cap 8

Ordenação: limite inferior

Problema: Rearranjar um vetor $A[1\,..\,n]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Existem algoritmos que consomem tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Ordenação: limite inferior

Problema: Rearranjar um vetor $A[1\,..\,n]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Existem algoritmos que consomem tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Existe algoritmo assintoticamente melhor?

Ordenação: limite inferior

Problema: Rearranjar um vetor $A[1\,..\,n]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Existem algoritmos que consomem tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Existe algoritmo assintoticamente melhor?

NÃO, se o algoritmo é baseado em comparações.

Prova?

Ordenação: limite inferior

Problema: Rearranjar um vetor $A[1\,..\,n]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Existem algoritmos que consomem tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Existe algoritmo assintoticamente melhor?

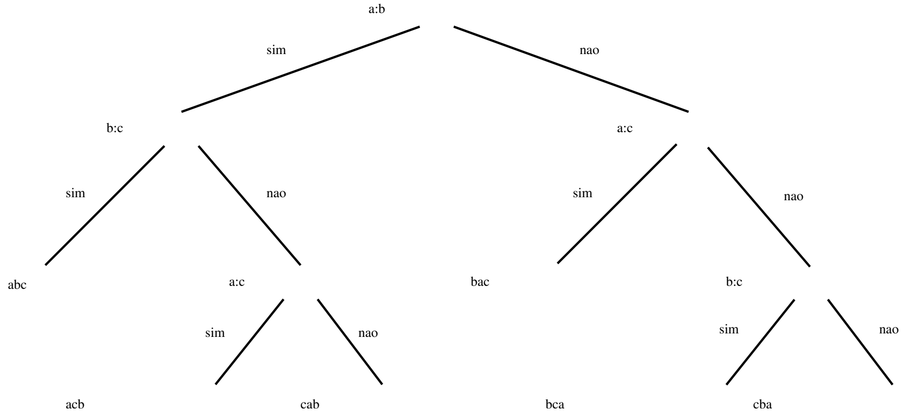
NÃO, se o algoritmo é baseado em comparações.

Prova?

Qualquer algoritmo baseado em comparações é uma "árvore de decisão".

Exemplo

ORDENA-POR-INSERÇÃO $(A[1\,..\,3])$:



Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1 \mathinner{..} n]$.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,.\,.\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1 \,..\, n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1 \mathinner{..} n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \ldots, n$ devem ser folhas.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \ldots, n$ devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \ldots, n$ devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Prova: Por indução em h. A afirmação vale para $h = 0$.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \ldots, n$ devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Prova: Por indução em h. A afirmação vale para $h = 0$.
Suponha que a afirmação vale para toda árvore binária de altura menor que h, para $h \geq 1$.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \ldots, n$ devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Prova: Por indução em h. A afirmação vale para $h = 0$.
Suponha que a afirmação vale para toda árvore binária de altura menor que h, para $h \geq 1$.
Número de folhas de árvore de altura h é a soma do número de folhas das subárvores, que têm altura $\leq h - 1$.

Limite inferior

Considere uma árvore de decisão para $A[1\,..\,n]$.

Número de comparações, no pior caso?
Resposta: altura, h, da árvore de decisão.

Todas as $n!$ permutações de $1, \ldots, n$ devem ser folhas.

Toda árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Prova: Por indução em h. A afirmação vale para $h = 0$.
Suponha que a afirmação vale para toda árvore binária de altura menor que h, para $h \geq 1$.
Número de folhas de árvore de altura h é a soma do número de folhas das subárvores, que têm altura $\leq h - 1$.
Logo, o número de folhas de uma árvore de altura h é

$$\leq \; 2 \times 2^{h-1} \; = \; 2^h.$$

Limite inferior

Assim, devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$.

Limite inferior

Assim, devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$.

$$n! \;\geq\; \prod_{i=\frac{n}{2}}^{n} i \;\geq\; \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Limite inferior

Assim, devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$.

$$n! \;\geq\; \prod_{i=\frac{n}{2}}^{n} i \;\geq\; \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Portanto,

$$h \;\geq\; \lg(n!) \;\geq\; \frac{1}{2}\, n(\lg n - 1).$$

Limite inferior

Assim, devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$.

$$n! \;\geq\; \prod_{i=\frac{n}{2}}^{n} i \;\geq\; \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Portanto,

$$h \;\geq\; \lg(n!) \;\geq\; \frac{1}{2}\, n(\lg n - 1).$$

Mais precisamente, a fórmula de Stirling diz que

$$n! \;=\; \sqrt{2\pi\, n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Limite inferior

Assim, devemos ter $2^h \geq n!$, donde $h \geq \lg(n!)$.

$$n! \;\geq\; \prod_{i=\frac{n}{2}}^{n} i \;\geq\; \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Portanto,

$$h \;\geq\; \lg(n!) \;\geq\; \frac{1}{2}\, n(\lg n - 1).$$

Mais precisamente, a fórmula de Stirling diz que

$$n! \;=\; \sqrt{2\pi\, n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Disso, temos que $h \;\geq\; \lg(n!) \;\geq\; \lg\left(\frac{n}{e}\right)^{n} \;=\; n(\lg n - \lg e)$.

Conclusão

Todo algoritmo de ordenação
baseado em comparações faz

$$\Omega(n \lg n)$$

comparações no pior caso.

Counting Sort

Recebe inteiros n e k, e um vetor $A[1 \,.\,.\, n]$ onde cada elemento é um inteiro entre 1 e k.

Counting Sort

Recebe inteiros n e k, e um vetor $A[1\,..\,n]$ onde cada elemento é um inteiro entre 1 e k.

Devolve um vetor $B[1\,..\,n]$ com os elementos de $A[1\,..\,n]$ em ordem crescente.

Counting Sort

Recebe inteiros n e k, e um vetor $A[1\,..\,n]$ onde cada elemento é um inteiro entre 1 e k.

Devolve um vetor $B[1\,..\,n]$ com os elementos de $A[1\,..\,n]$ em ordem crescente.

COUNTINGSORT(A, n)

para $i \leftarrow 1$ **até** k **faça**
    $C[i] \leftarrow 0$
para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça**
    $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1$
para $i \leftarrow 2$ **até** k **faça**
    $C[i] \leftarrow C[i] + C[i-1]$
para $j \leftarrow n$ **decrescendo até** 1 **faça**
    $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$
    $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$
devolva B

Consumo de tempo

linha	consumo na linha
1	$\Theta(k)$
2	$\mathrm{O}(k)$
3	$\Theta(n)$
4	$\mathrm{O}(n)$
5	$\Theta(k)$
6	$\mathrm{O}(k)$
7	$\Theta(n)$
8	$\mathrm{O}(n)$
9	$\mathrm{O}(n)$
10	$\Theta(1)$
total	????

Consumo de tempo

linha	consumo na linha
1	$\Theta(k)$
2	$\mathrm{O}(k)$
3	$\Theta(n)$
4	$\mathrm{O}(n)$
5	$\Theta(k)$
6	$\mathrm{O}(k)$
7	$\Theta(n)$
8	$\mathrm{O}(n)$
9	$\mathrm{O}(n)$
10	$\Theta(1)$
total	$\Theta(k+n)$

Counting Sort

COUNTINGSORT(A, n)

```
para i ← 1 até k faça
    C[i] ← 0
para j ← 1 até n faça
    C[A[j]] ← C[A[j]] + 1
para i ← 2 até k faça
    C[i] ← C[i] + C[i − 1]
para j ← n decrescendo até 1 faça
    B[C[A[j]]] ← A[j]
    C[A[j]] ← C[A[j]] − 1
devolva B
```

Consumo de tempo: $\Theta(k + n)$

Se $k = \mathrm{O}(n)$, o consumo de tempo é $\Theta(n)$.

Radix Sort

Algoritmo usado para ordenar

- inteiros não-negativos com d dígitos
- cartões perfurados (Hollerith!)
- registros cuja chave tem vários campos

Radix Sort

Algoritmo usado para ordenar

- inteiros não-negativos com d dígitos
- cartões perfurados (Hollerith!)
- registros cuja chave tem vários campos

dígito 1: menos significativo
dígito d: mais significativo

Radix Sort

Algoritmo usado para ordenar

- inteiros não-negativos com d dígitos
- cartões perfurados (Hollerith!)
- registros cuja chave tem vários campos

dígito 1: menos significativo
dígito d: mais significativo

RadixSort(A, n, d)
para $i \leftarrow 1$ **até** d **faça**
    Ordene(A, n, i)

Radix Sort

Algoritmo usado para ordenar

- inteiros não-negativos com d dígitos
- cartões perfurados (Hollerith!)
- registros cuja chave tem vários campos

dígito 1: menos significativo
dígito d: mais significativo

RADIXSORT(A, n, d)
1 **para** $i \leftarrow 1$ **até** d **faça**
2 ORDENE(A, n, i)

ORDENE(A, n, i): ordena $A[1\,..\,n]$ pelo i-ésimo dígito dos números em A por meio de um algoritmo estável.

Estabilidade

Um algoritmo de ordenação é estável se sempre que, inicialmente, $A[i] = A[j]$ para $i < j$, a cópia $A[i]$ termina em uma posição menor do vetor que a cópia $A[j]$.

Estabilidade

Um algoritmo de ordenação é estável se sempre que, inicialmente, $A[i] = A[j]$ para $i < j$, a cópia $A[i]$ termina em uma posição menor do vetor que a cópia $A[j]$.

Isso só é relevante quando temos informação satélite.

Estabilidade

Um algoritmo de ordenação é estável se sempre que, inicialmente, $A[i] = A[j]$ para $i < j$, a cópia $A[i]$ termina em uma posição menor do vetor que a cópia $A[j]$.

Isso só é relevante quando temos informação satélite.

Quais dos algoritmos que vimos são estáveis?

Estabilidade

Um algoritmo de ordenação é estável se sempre que, inicialmente, $A[i] = A[j]$ para $i < j$, a cópia $A[i]$ termina em uma posição menor do vetor que a cópia $A[j]$.

Isso só é relevante quando temos informação satélite.

Quais dos algoritmos que vimos são estáveis?

- inserção direta? seleção direta? bubblesort?
- mergesort?
- quicksort?
- heapsort?
- countingsort?

Consumo de tempo do Radixsort

Depende do algoritmo ORDENE.

Consumo de tempo do Radixsort

Depende do algoritmo ORDENE.

Se cada dígito é um inteiro de 1 a k,
então podemos usar o COUNTINGSORT.

Consumo de tempo do Radixsort

Depende do algoritmo ORDENE.

Se cada dígito é um inteiro de 1 a k,
então podemos usar o COUNTINGSORT.

Neste caso, o consumo de tempo é $\Theta(d(k+n))$.

Consumo de tempo do Radixsort

Depende do algoritmo ORDENE.

Se cada dígito é um inteiro de 1 a k,
então podemos usar o COUNTINGSORT.

Neste caso, o consumo de tempo é $\Theta(d(k+n))$.

Se d é limitado por uma constante (ou seja, se $d = \mathrm{O}(1)$)
e $k = \mathrm{O}(n)$, então o consumo de tempo é $\Theta(n)$.

Bucketsort

CLRS sec 8.4

Bucket Sort

Recebe um inteiro n e um vetor $A[1 \,..\, n]$ onde cada elemento é um número no intervalo $[0, 1)$.

Bucket Sort

Recebe um inteiro n e um vetor $A[1\,..\,n]$ onde cada elemento é um número no intervalo $[0,1)$.

A	.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91

Bucket Sort

Recebe um inteiro n e um vetor $A[1\,..\,n]$ onde cada elemento é um número no intervalo $[0, 1)$.

A	.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91

Devolve um vetor $C[1\,..\,n]$ com os elementos de $A[1\,..\,n]$ em ordem crescente.

Bucket Sort

Recebe um inteiro n e um vetor $A[1\,..\,n]$ onde cada elemento é um número no intervalo $[0, 1)$.

A	.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91

Devolve um vetor $C[1\,..\,n]$ com os elementos de $A[1\,..\,n]$ em ordem crescente.

C	.03	.12	.38	.42	.47	.62	.77	.82	.91	.93

Exemplo

.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91

Exemplo

.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91

$B[0]$:	.03	
$B[1]$:	.12	
$B[2]$:		
$B[3]$:	.38	
$B[4]$:	.47	.42
$B[5]$:		
$B[6]$:	.62	
$B[7]$:	.77	
$B[8]$:	.82	
$B[9]$:	.93	.91

Exemplo

.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91

$B[0]$:	.03	
$B[1]$:	.12	
$B[2]$:		
$B[3]$:	.38	
$B[4]$:	.42	.47
$B[5]$:		
$B[6]$:	.62	
$B[7]$:	.77	
$B[8]$:	.82	
$B[9]$:	.91	.93

Exemplo

.47	.93	.82	.12	.42	.03	.62	.38	.77	.91

$B[0]$:	.03	
$B[1]$:	.12	
$B[2]$:		
$B[3]$:	.38	
$B[4]$:	.42	.47
$B[5]$:		
$B[6]$:	.62	
$B[7]$:	.77	
$B[8]$:	.82	
$B[9]$:	.91	.93

.03	.12	.38	.42	.47	.62	.77	.82	.91	.93

Bucket Sort

Recebe um inteiro n e um vetor $A[1\,..\,n]$ onde cada elemento é um número no intervalo $[0,1)$.

Devolve um vetor $C[1\,..\,n]$ com os elementos de $A[1\,..\,n]$ em ordem crescente.

```
BucketSort(A, n)
    para i ← 0 até n − 1 faça
        B[i] ← NIL
    para i ← 1 até n faça
        Insira(B[⌊n A[i]⌋], A[i])
    para i ← 0 até n − 1 faça
        OrdeneLista(B[i])
    C ← Concatene(B, n)
    devolva C
```

Bucket Sort

BucketSort(A, n)

para $i \leftarrow 0$ **até** $n-1$ **faça**
 $B[i] \leftarrow$ NIL
para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
 INSIRA$(B[\lfloor n\,A[i] \rfloor], A[i])$
para $i \leftarrow 0$ **até** $n-1$ **faça**
 OrdeneLista$(B[i])$
$C \leftarrow$ Concatene(B, n)
devolva C

INSIRA(p, x): insere x na lista apontada por p

OrdeneLista(p): ordena a lista apontada por p

Concatene(B, n): devolve a lista obtida da concatenação das listas apontadas por $B[0], \ldots, B[n-1]$.

Consumo de tempo

Suponha que os números em $A[1\,..\,n]$ são uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1)$.

Suponha que o ORDENELISTA seja o INSERTIONSORT.

Consumo de tempo

Suponha que os números em $A[1\,..\,n]$ são uniformemente distribuídos no intervalo $[0,1)$.

Suponha que o ORDENELISTA seja o INSERTIONSORT.

Seja X_i o número de elementos na lista $B[i]$.

Consumo de tempo

Suponha que os números em $A[1\,..\,n]$ são uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1)$.

Suponha que o ORDENELISTA seja o INSERTIONSORT.

Seja X_i o número de elementos na lista $B[i]$.

Seja

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

Consumo de tempo

Suponha que os números em $A[1\,..\,n]$ são uniformemente distribuídos no intervalo $[0,1)$.

Suponha que o ORDENELISTA seja o INSERTIONSORT.

Seja X_i o número de elementos na lista $B[i]$.

Seja

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

Observe que $X_i = \sum_j X_{ij}$.

Consumo de tempo

Suponha que os números em $A[1\,..\,n]$ são uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 1)$.

Suponha que o OrdeneLista seja o InsertionSort.

Seja X_i o número de elementos na lista $B[i]$.

Seja

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

Observe que $X_i = \sum_j X_{ij}$.

Y_i: número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Consumo de tempo

X_i: número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{array} \right\}$$

Y_i: número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Consumo de tempo

X_i: número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{array} \right\}$$

Y_i: número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Observe que $Y_i \leq X_i{}^2$.

Logo $\mathrm{E}[Y_i] \leq \mathrm{E}[X_i{}^2] = \mathrm{E}[(\sum_j X_{ij})^2]$.

Consumo de tempo

X_i: número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

Y_i: número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Observe que $Y_i \leq {X_i}^2$.

Logo $\mathrm{E}[Y_i] \leq \mathrm{E}[{X_i}^2] = \mathrm{E}[(\sum_j X_{ij})^2]$.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[(\sum_j X_{ij})^2] &= \mathrm{E}[\sum_j \sum_k X_{ij}X_{ik}] \\ &= \mathrm{E}[\sum_j {X_{ij}}^2 + \sum_j \sum_{k \neq j} X_{ij}X_{ik}] \end{aligned}$$

Consumo de tempo

X_i: número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{cases}$$

Y_i: número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Observe que $Y_i \leq {X_i}^2$.

Logo $\mathrm{E}[Y_i] \leq \mathrm{E}[{X_i}^2] = \mathrm{E}[(\sum_j X_{ij})^2]$.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[(\sum_j X_{ij})^2] &= \mathrm{E}[\sum_j \sum_k X_{ij} X_{ik}] \\ &= \mathrm{E}[\sum_j {X_{ij}}^2] + \mathrm{E}[\sum_j \sum_{k \neq j} X_{ij} X_{ik}] \end{aligned}$$

Consumo de tempo

X_i: número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{array} \right\}$$

Y_i: número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Observe que $Y_i \leq {X_i}^2$.

Logo $\mathrm{E}[Y_i] \leq \mathrm{E}[{X_i}^2] = \mathrm{E}[(\sum_j X_{ij})^2]$.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[(\sum_j X_{ij})^2] &= \mathrm{E}[\sum_j \sum_k X_{ij} X_{ik}] \\ &= \sum_j \mathrm{E}[{X_{ij}}^2] + \sum_j \sum_{k \neq j} \mathrm{E}[X_{ij} X_{ik}] \end{aligned}$$

Consumo de tempo

X_i: número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{array} \right\}$$

Y_i: número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Observe que $Y_i \leq {X_i}^2$. Ademais,

$$\mathrm{E}[Y_i] \leq \sum_j \mathrm{E}[{X_{ij}}^2] + \sum_j \sum_{k \neq j} \mathrm{E}[X_{ij} X_{ik}].$$

Consumo de tempo

X_i: número de elementos na lista $B[i]$

$$X_{ij} \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento foi para a lista } B[i] \\ 0 & \text{se o } j\text{-ésimo elemento não foi para a lista } B[i]. \end{array} \right\}$$

Y_i: número de comparações para ordenar a lista $B[i]$.

Observe que $Y_i \leq {X_i}^2$. Ademais,

$$\mathrm{E}[Y_i] \;\leq\; \sum_j \mathrm{E}[{X_{ij}}^2] + \sum_j \sum_{k \neq j} \mathrm{E}[X_{ij} X_{ik}].$$

Observe que ${X_{ij}}^2$ é uma variável aleatória binária. Vamos calcular sua esperança:

$$\mathrm{E}[{X_{ij}}^2] = \Pr[{X_{ij}}^2 = 1] = \Pr[X_{ij} = 1] = \frac{1}{n}.$$

Consumo de tempo

Para calcular $\mathrm{E}[X_{ij}X_{ik}]$ para $j \neq k$, primeiro note que X_{ij} e X_{ik} são variáveis aleatórias independentes.

Portanto, $\mathrm{E}[X_{ij}X_{ik}] = \mathrm{E}[X_{ij}]\mathrm{E}[X_{ik}]$.

Ademais, $\mathrm{E}[X_{ij}] = \Pr[X_{ij} = 1] = \frac{1}{n}$.

Consumo de tempo

Para calcular $\mathrm{E}[X_{ij}X_{ik}]$ para $j \neq k$, primeiro note que X_{ij} e X_{ik} são variáveis aleatórias independentes.

Portanto, $\mathrm{E}[X_{ij}X_{ik}] = \mathrm{E}[X_{ij}]\mathrm{E}[X_{ik}]$.

Ademais, $\mathrm{E}[X_{ij}] = \Pr[X_{ij} = 1] = \frac{1}{n}$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y_i] &\leq \sum_j \frac{1}{n} + \sum_j \sum_{k \neq j} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{n}{n} + n(n-1)\frac{1}{n^2} \\
&= 1 + (n-1)\frac{1}{n} \\
&= 2 - \frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

Consumo de tempo

Agora, seja $Y = \sum_i Y_i$.

Note que Y é o número de comparações realizadas pelo BucketSort no total.

Assim $\mathrm{E}[Y]$ é o número esperado de comparações realizadas pelo algoritmo, e tal número determina o consumo assintótico de tempo do BucketSort.

Mas então $\mathrm{E}[Y] = \sum_i \mathrm{E}[Y_i] \leq 2n - 1 = \mathrm{O}(n)$.

Consumo de tempo

Agora, seja $Y = \sum_i Y_i$.

Note que Y é o número de comparações realizadas pelo BUCKETSORT no total.

Assim $\mathrm{E}[Y]$ é o número esperado de comparações realizadas pelo algoritmo, e tal número determina o consumo assintótico de tempo do BUCKETSORT.

Mas então $\mathrm{E}[Y] = \sum_i \mathrm{E}[Y_i] \leq 2n - 1 = \mathrm{O}(n)$.

$\boxed{\text{O consumo de tempo esperado do BUCKETSORT quando os números em } A[1\,..\,n] \text{ são uniformemente distribuídos no intervalo } [0,1) \text{ é } \mathrm{O}(n).}$