Programação dinâmica

CLRS 15.2–15.3

= "recursão–com–tabela"
= transformação inteligente de recursão em iteração

Multiplicação iterada de matrizes

Se A é $p \times q$ e B é $q \times r$ então AB é $p \times r$.

$(AB)[i,j] = \sum_k A[i,k]\,B[k,j]$

MULT-MAT (p, A, q, B, r)

para $i \leftarrow 1$ **até** p **faça**
    para $j \leftarrow 1$ **até** r **faça**
        $AB[i,j] \leftarrow 0$
        para $k \leftarrow 1$ **até** q **faça**
            $AB[i,j] \leftarrow AB[i,j] + A[i,k] \cdot B[k,j]$

Número de multiplicações escalares = $p \cdot q \cdot r$

Multiplicação iterada

Problema: Encontrar número mínimo de multiplicações escalares necessário para calcular produto $A_1 A_2 \cdots A_n$.

$$\begin{array}{ccccccccc} p[0] & & p[1] & & p[2] & \ldots & p[n-1] & & p[n] \\ & A_1 & & A_2 & & \ldots & & A_n & \end{array}$$

cada A_i é $p[i-1] \times p[i]$ ($A_i[1\,..\,p[i-1], 1\,..\,p[i]]$)

Exemplo: $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$

$$\begin{array}{ccccccc} 10 & A_1 & 100 & A_2 & 5 & A_3 & 50 \end{array}$$

$((A_1\ A_2)\ A_3)$	7500	multiplicações escalares
$(A_1\ (A_2\ A_3))$	75000	multiplicações escalares

Soluções ótimas contêm soluções ótimas

Se

$$(A_1 A_2)\,(A_3((A_4 A_5) A_6))$$

é ordem ótima de multiplicação então

$$(A_1 A_2) \quad \text{e} \quad (A_3((A_4 A_5) A_6))$$

também são ordens ótimas.

Decomposição: $(A_i \cdots A_k)\,(A_{k+1} \cdots A_j)$

$m[i,j] =$ número mínimo de multiplicações escalares para calcular $A_i \cdots A_j$

Recorrência

$m[i,j] =$ número mínimo de multiplicações escalares para calcular $A_i \cdots A_j$

se $i = j$ então $m[i,j] = 0$

se $i < j$ então

$$m[i,j] = \min_{i \le k < j} \{\, m[i,k] + p[i-1]p[k]p[j] + m[k{+}1,j] \,\}$$

Exemplo:

$$m[3,7] = \min_{3 \le k < 7} \{\, m[3,k] + p[2]p[k]p[7] + m[k{+}1,7] \,\}$$

Algoritmo recursivo

Recebe $p[i-1\,..\,j]$ e devolve $m[i,j]$

REC-MAT-CHAIN (p, i, j)
1 **se** $i = j$
2 **então devolva** 0
3 $m[i,j] \leftarrow \infty$
4 **para** $k \leftarrow i$ **até** $j-1$ **faça**
5 $q_1 \leftarrow$ REC-MAT-CHAIN (p, i, k)
6 $q_2 \leftarrow$ REC-MAT-CHAIN $(p, k+1, j)$
7 $q \leftarrow q_1 + p[i-1]p[k]p[j] + q_2$
8 **se** $q < m[i,j]$
9 **então** $m[i,j] \leftarrow q$
10 **devolva** $m[i,j]$

Consumo de tempo?

Consumo de tempo

A plataforma utilizada nos experimentos é um PC rodando Linux Debian ?.? com um processador Pentium II de 233 MHz e 128MB de memória RAM .

O programa foi compilado com o gcc versão ?? e opção de compilação "-O2".

n	3	6	10	20	25
tempo	$0.0s$	$0.0s$	$0.01s$	$201s$	$567m$

Consumo de tempo

$T(n) =$ número comparações entre q e $m[\star,\star]$ na linha 8 quando $n := j - i + 1$

$$T(1) = 0$$

$$T(n) = \sum_{h=1}^{n-1} (T(h) + T(n-h) + 1) = 2\sum_{h=2}^{n-1} T(h) + (n-1)$$

$$= 2(T(2) + \cdots + T(n{-}1)) + (n-1) \quad \text{para } n \ge 2$$

Considere a mesma fórmula para $n-1$:

$$T(n-1) = 2(T(2) + \cdots + T(n{-}2)) + (n-2)$$

e subtraia a primeira da segunda.

Consumo de tempo

$T(n) =$ número comparações entre q e $m[\star,\star]$
na linha 8 quando $n := j - i + 1$

$$T(n) \;=\; 2(T(2) + \cdots + T(n{-}1)) \;+\; (n-1)$$

Considere a mesma fórmula para $n-1$:

$$T(n-1) \;=\; 2(T(2) + \cdots + T(n{-}2)) \;+\; (n-2)$$

e subtraia a primeira da segunda:

$$T(n) - T(n-1) \;=\; 2\,T(n-1) + 1.$$

Logo $T(n) \;=\; 3\,T(n-1) + 1$.

Fácil verificar que $T(n) \geq \frac{3^{n-1}-1}{2}$ para $n \geq 1$.

Recorrência

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$T(n)$	0	1	4	13	40	121	364	1093
$3^{n-1}-1$	0	2	8	26	80	242	728	2186

Prova: Para $n = 1$, $T(1) = 0 = (1-1)/2$.

Para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T(n-1) + 1 \\ &\overset{\text{hi}}{=} 3\left(\frac{3^{n-1}-1}{2}\right) + 1 \\ &= \frac{3^n - 3}{2} + 1 \;=\; \frac{3^n - 3 + 2}{2} \\ &= \frac{3^n - 1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusão

$T(n) \geq \frac{3^{n-1}-1}{2}$ para $n \geq 1$.

O consumo de tempo do algoritmo REC-MAT-CHAIN é $\Omega(3^n)$.

Resolve subproblemas muitas vezes

$p[0] = 10 \quad p[1] = 100 \quad p[2] = 5 \quad p[3] = 50$

```
REC-MAT-CHAIN(p, 1, 3)
  REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
  REC-MAT-CHAIN(p, 2, 3)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
    REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
  REC-MAT-CHAIN(p, 1, 2)
    REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
  REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
```

Número mínimo de mults = 7500

Resolve subproblemas muitas vezes

```
REC-MAT-CHAIN(p, 1, 5)
  REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
  REC-MAT-CHAIN(p, 2, 5)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
    REC-MAT-CHAIN(p, 3, 5)
      REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
      REC-MAT-CHAIN(p, 4, 5)
        REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
        REC-MAT-CHAIN(p, 5, 5)
      REC-MAT-CHAIN(p, 3, 4)
        REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
        REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
      REC-MAT-CHAIN(p, 5, 5)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 3)
      REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
      REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
    REC-MAT-CHAIN(p, 4, 5)
      REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
      REC-MAT-CHAIN(p, 5, 5)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 4)
      REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
      REC-MAT-CHAIN(p, 3, 4)
        REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
        REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
      REC-MAT-CHAIN(p, 2, 3)
        REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
        REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
```

```
      REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
    REC-MAT-CHAIN(p, 5, 5)
  REC-MAT-CHAIN(p, 1, 2)
    REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
  REC-MAT-CHAIN(p, 3, 5)
    REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
    REC-MAT-CHAIN(p, 4, 5)
      REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
      REC-MAT-CHAIN(p, 5, 5)
    REC-MAT-CHAIN(p, 3, 4)
      REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
      REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
    REC-MAT-CHAIN(p, 5, 5)
  REC-MAT-CHAIN(p, 1, 3)
    REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 3)
      REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
      REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
    REC-MAT-CHAIN(p, 1, 2)
      REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
      REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
    REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
  REC-MAT-CHAIN(p, 4, 5)
    REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
    REC-MAT-CHAIN(p, 5, 5)
  REC-MAT-CHAIN(p, 1, 4)
```

```
  REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
  REC-MAT-CHAIN(p, 2, 4)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
    REC-MAT-CHAIN(p, 3, 4)
      REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
      REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 3)
      REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
      REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
    REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
  REC-MAT-CHAIN(p, 1, 2)
    REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
  REC-MAT-CHAIN(p, 3, 4)
    REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
    REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
  REC-MAT-CHAIN(p, 1, 3)
    REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
    REC-MAT-CHAIN(p, 2, 3)
      REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
      REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
    REC-MAT-CHAIN(p, 1, 2)
      REC-MAT-CHAIN(p, 1, 1)
      REC-MAT-CHAIN(p, 2, 2)
    REC-MAT-CHAIN(p, 3, 3)
  REC-MAT-CHAIN(p, 4, 4)
REC-MAT-CHAIN(p, 5, 5)
```


Programação dinâmica

Cada subproblema

$$A_i \cdots A_j$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela m?

Para calcular $m[2,6]$ preciso de ...

$m[2,2]$, $m[2,3]$, $m[2,4]$, $m[2,5]$ e de
$m[3,6]$, $m[4,6]$, $m[5,6]$, $m[6,6]$.

Calcule todos os $m[i,j]$ com $j-i+1=2$,
depois todos com $j-i+1=3$,
depois todos com $j-i+1=4$,
etc.

Programação dinâmica

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0							
2		0	⋆	⋆	⋆	??		
3			0			⋆		
4				0		⋆		
5					0	⋆		
6						0		
7							0	
8								0

Simulação

$p[0]=10$ $p[1]=10$ $p[2]=20$ $p[3]=30$ $p[4]=10$ $p[5]=15$ $p[6]=30$

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0	??				
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0	2000				
2		0				

Algoritmo de programação dinâmica

Recebe $p[0\,..\,n]$ e devolve $m[1,n]$.

MATRIX-CHAIN-ORDER (p, n)

```
1   para i ← 1 até n faça
2       m[i,i] ← 0
3   para ℓ ← 2 até n faça
4       para i ← 1 até n − ℓ + 1 faça
5           j ← i + ℓ − 1
6           m[i,j] ← ∞
7           para k ← i até j − 1 faça
8               q ← m[i,k] + p[i − 1]p[k]p[j] + m[k+1,j]
9               se q < m[i,j]
10                  então m[i,j] ← q
11  devolva m[1,n]
```


Correção e consumo de tempo

Linhas 3–10: tratam subcadeias $A_i \cdots A_j$ de comprimento ℓ

Consumo de tempo: ???

Consumo de tempo: $\mathrm{O}(n^3)$ (três loops encaixados)

Curioso verificar que consumo de tempo é $\Omega(n^3)$:

Número de execuções da linha 8:

ℓ	i	execs linha 8
2	$1,\ldots,n-1$	$(n-1)\cdot 1$
3	$1,\ldots,n-2$	$(n-2)\cdot 2$
4	$1,\ldots,n-3$	$(n-3)\cdot 3$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$n-1$	$1,2$	$2\cdot(n-2)$
n	1	$1\cdot(n-1)$
	total	$\sum_{h=1}^{n-1} h(n-h)$

Consumo de tempo

Para $n \geq 6$, $\sum_{h=1}^{n-1} h(n-h) =$

$$= n\sum_{h=1}^{n-1} h - \sum_{h=1}^{n-1} h^2$$

$$= n\tfrac{1}{2}n(n-1) - \tfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \quad \text{(CLRS p.1060)}$$

$$\geq \tfrac{1}{2}n^2(n-1) - \tfrac{1}{6}2n^3$$

$$\geq \tfrac{1}{2}n^2\tfrac{5n}{6} - \tfrac{1}{3}n^3$$

$$= \tfrac{5}{12}n^3 - \tfrac{1}{3}n^3$$

$$= \tfrac{1}{12}n^3.$$

Consumo de tempo é $\Omega(n^3)$

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo MATRIX-CHAIN-ORDER é $\Theta(n^3)$.

Versão recursiva eficiente

MEMOIZED-MATRIX-CHAIN-ORDER (p, n)

para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
  para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça**
    $m[i,j] \leftarrow \infty$
devolva LOOKUP-CHAIN $(p, 1, n)$

Versão recursiva eficiente

LOOKUP-CHAIN (p, i, j)

se $m[i,j] < \infty$
  então devolva $m[i,j]$
se $i = j$
  então $m[i,j] \leftarrow 0$
  senão para $k \leftarrow i$ **até** $j-1$ **faça**
    $q \leftarrow$ LOOKUP-CHAIN (p, i, k)
      $+ \; p[i{-}1]p[k]p[j]$
      $+$ LOOKUP-CHAIN $(p, k{+}1, j)$
    se $q < m[i,j]$
      então $m[i,j] \leftarrow q$
devolva $m[i,j]$

Ingredientes de programação dinâmica

- Subestrutura ótima: soluções ótimas contém soluções ótimas de subproblemas.
- Subestrutura: decomponha o problema em subproblemas menores e, com sorte, mais simples.
- *Bottom-up*: combine as soluções dos problemas menores para obter soluções dos maiores.
- Tabela: armazene as soluções dos subproblemas em uma tabela, pois soluções dos subproblemas são consultadas várias vezes.
- Número de subproblemas: para a eficiência do algoritmo é importante que o número de subproblemas resolvidos seja 'pequeno'.
- Memoized: versão *top-down*, recursão com tabela.

Exercício

O algoritmo MATRIX-CHAIN-ORDER determina o número mínimo de multiplicações escalares necessário para calcular produto $A_1 A_2 \cdots A_n$.

Na aula, mencionamos uma maneira de obter uma parentização ótima a partir dos cálculos feitos, usando para isso um dado a mais que podemos guardar no decorrer do algoritmo.

Faça os ajustes sugeridos na aula, de modo a guardar esse dado extra, e devolvê-lo junto com o valor $m[1, n]$.

Faça uma rotina que recebe a informação extra armazenada pelo algoritmo acima e imprime uma parentização ótima das matrizes $A_1 A_2 \cdots A_n$.

Exercícios

Exercício 13.A [CLRS 15.2-1]
Encontre a maneira ótima de fazer a multiplicação iterada das matrizes cujas dimensões são $(5, 10, 3, 12, 5, 50, 6)$.

Exercício 13.B [CLRS 15.2-5]
Mostre que são necessários exatamente $n - 1$ pares de parênteses para especificar exatamente a ordem de multiplicação de $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$.

Exercício 13.C [CLRS 15.3-2]
Desenhe a árvore de recursão para o algoritmo MERGE-SORT aplicado a um vetor de 16 elementos. Por que a técnica de programação dinâmica não é capaz de acelerar o algoritmo?

Mais exercícios

Exercício 13.D [CLRS 15.3-5 expandido]
Considere o seguinte algoritmo para determinar a ordem de multiplicação de uma cadeia de matrizes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de dimensões $p_0, p_1, \ldots, p_n$: primeiro, escolha k que minimize p_k; depois, determine recursivamente as ordens de multiplicação de $A_1, \ldots, A_k$ e $A_{k+1}, \ldots, A_n$. Esse algoritmo produz uma ordem que minimiza o número total de multiplicações escalares? E se k for escolhido de modo a maximizar p_k? E se k for escolhido de modo a minimizar p_k?

Exercício 13.E
Prove que o número de execuções da linha 9 em MATRIX-CHAIN-ORDER é $\mathrm{O}(n^3)$.

Mais programação dinâmica

CLRS 15.5

= "recursão–com–tabela"
= transformação inteligente de recursão em iteração

Buscas em um conjunto conhecido

Considere um inteiro n e um vetor $v[1\,..\,n]$ de `tipoOrd`.

Problema: Dado $v[1\,..\,n]$ e uma sequência de k elementos do `tipoOrd`, decidir se cada elemento está ou não em v.

Se k é grande, como devemos armazenar o v?

E se v armazena um conjunto bem conhecido,
como por exemplo as palavras de uma língua?
(A ser usado por um tradutor, ou um speller.)

Podemos ordenar v e aplicar busca binária.

Podemos fazer algo melhor?

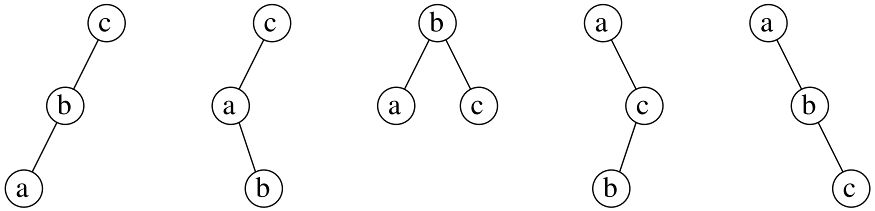
Buscas em conjunto conhecido

Dadas estimativas do número de acessos a cada elemento de $v[1\,..\,n]$, qual é a melhor estrutura de dados para v?

Árvore de busca binária (ABB)?

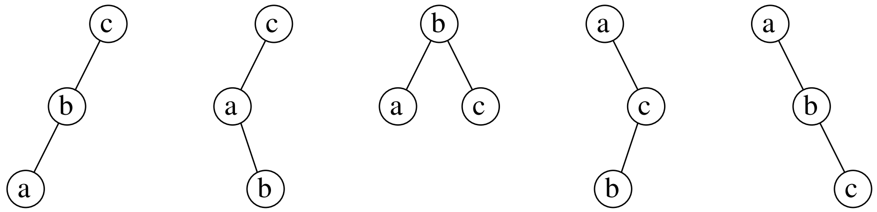
Exemplo: $n = 3$ e $e_1 = 10$, $e_2 = 20$, $e_3 = 40$.

Qual a melhor das ABBs?



Exemplo

Exemplo: $n = 3$ e $e_1 = 10$, $e_2 = 20$, $e_3 = 40$.



Qual a melhor das ABBs? Número esperado de comparações:

- $10 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 1 = 110$
- $10 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 120$
- $10 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 120$
- $10 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 2 = 150$
- $10 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 3 = 170$

- $10 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 40 \cdot 1 = 110$ $\longleftarrow$ ABB ótima
- $10 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 120$
- $10 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 120$
- $10 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 2 = 150$

Árvore de busca ótima

Considere um vetor $e[1\,..\,n]$ de `tipoOrd` com uma estimativa do número de acessos a cada elemento de $\{1, \ldots, n\}$.

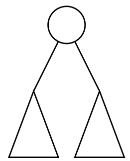
Uma ABB ótima com respeito ao vetor e é uma ABB para o conjunto $\{1, \ldots, n\}$ que minimiza o número

$$\sum_{i=1}^{n} h_i\, e_i,$$

onde h_i é o número de nós no caminho de i até a raiz da árvore.

Problema (ABB Ótima): Dado $e[1\,..\,n]$, encontrar uma árvore de busca binária ótima com respeito a e.

Subestrutura ótima



Subárvores esquerda e direita de uma ABB ótima são ABBs ótimas.

Resta determinar a raiz da ABB ótima.

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i\,..\,j]$
$s[i,j]$: soma dos acessos em $e[i\,..\,j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \le k \le j}\{c[i,k-1] + c[k+1,j] + s[i,j]\} & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Custo de uma ABB ótima

$c[i,j]$: custo min de uma ABB para $e[i\,..\,j]$

$s[j]$: soma dos acessos em $e[1\,..\,j]$
$s[j]-s[i{-}1]$: soma dos acessos em $e[i\,..\,j]$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \min_{i \le k \le j}\{c[i,k{-}1] + c[k{+}1,j]\} + s[j] - s[i{-}1] & \text{se } i \le j \end{cases}$$

Para calcular s:

$s[0] = 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
    $s[i] \leftarrow s[i{-}1] + e[i]$

Como preencher a matriz c?
Em que ordem?

Programação dinâmica

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0							
2		0	⋆	⋆	⋆	??		
3			0			⋆		
4				0		⋆		
5					0	⋆		
6						0		
7							0	
i								0

Simulação

$e[1]{=}10$ $e[2]{=}20$ $e[3]{=}30$ $e[4]{=}15$ $e[5]{=}30$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	??				
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
1	0	10				
2		0				

Árvore de busca ótima

ABB-ÓTIMA (e, n)
$s[0] = 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
    $s[i] \leftarrow s[i{-}1] + e[i]$
para $i \leftarrow 1$ **até** $n{+}1$ **faça**
    $c[i, i{-}1] \leftarrow 0$
para $\ell \leftarrow 1$ **até** n **faça**
    para $i \leftarrow 1$ **até** $n{-}\ell{+}1$ **faça**
        $j \leftarrow i{+}\ell{-}1$
        $q \leftarrow c[i{+}1, j]$
        para $k \leftarrow i{+}1$ **até** j **faça**
            se $c[i,k{-}1] + c[k{+}1,j] < q$
            então $q \leftarrow c[i,k{-}1] + c[k{+}1,j]$
        $c[i,j] \leftarrow q + s[j] - s[i{-}1]$
devolva $c[1,n]$

Árvore de busca ótima

Exercício: Como fazer para obter uma ABB ótima e não apenas o seu custo? Complete o serviço!