

Mais programação dinâmica

KT 6.4

Aproveite para olhar todo o Cap 6 do KT,
que é sobre programação dinâmica.

= “recursão-com-tabela”

= transformação inteligente de recursão em iteração

Mochila

Dados dois vetores $x[1..n]$ e $w[1..n]$, denotamos por $x \cdot w$ o **produto escalar**

$$w[1]x[1] + w[2]x[2] + \cdots + w[n]x[n].$$

Mochila

Dados dois vetores $x[1..n]$ e $w[1..n]$, denotamos por $x \cdot w$ o **produto escalar**

$$w[1]x[1] + w[2]x[2] + \dots + w[n]x[n].$$

Suponha dado um número inteiro não-negativo W e vetores positivos $w[1..n]$ e $v[1..n]$.

Uma **mochila** é qualquer vetor $x[1..n]$ tal que

$$x \cdot w \leq W \quad \text{e} \quad 0 \leq x[i] \leq 1 \quad \text{para todo } i$$

Mochila

Dados dois vetores $x[1..n]$ e $w[1..n]$, denotamos por $x \cdot w$ o **produto escalar**

$$w[1]x[1] + w[2]x[2] + \dots + w[n]x[n].$$

Suponha dado um número inteiro não-negativo W e vetores positivos $w[1..n]$ e $v[1..n]$.

Uma **mochila** é qualquer vetor $x[1..n]$ tal que

$$x \cdot w \leq W \quad \text{e} \quad 0 \leq x[i] \leq 1 \quad \text{para todo } i$$

O **valor** de uma mochila é o número $x \cdot v$.

Uma mochila é **ótima** se tem valor máximo.

Problema booleano da mochila

Uma mochila $x[1..n]$ tal que $x[i] = 0$ ou $x[i] = 1$ para todo i é dita **booleana**.

Problema (Knapsack Problem): Dados (w, v, n, W) , encontrar uma mochila booleana ótima.

Problema booleano da mochila

Uma mochila $x[1..n]$ tal que $x[i] = 0$ ou $x[i] = 1$ para todo i é dita **booleana**.

Problema (Knapsack Problem): Dados (w, v, n, W) , encontrar uma mochila booleana ótima.

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$

	1	2	3	4
w	40	30	20	10
v	840	600	400	100
x	1	0	0	0
x	1	0	0	1
x	0	1	1	0

valor = 840

valor = 940

valor = 1000

Subestrutura ótima

Suponha que $x[1..n]$ é mochila booleana ótima para o problema (w, v, n, W) .

Subestrutura ótima

Suponha que $x[1..n]$ é **mochila booleana ótima** para o problema (w, v, n, W) .

Se $x[n] = 1$

então $x[1..n-1]$ é **mochila booleana ótima** para $(w, v, n-1, W - w[n])$

Subestrutura ótima

Suponha que $x[1..n]$ é **mochila booleana ótima** para o problema (w, v, n, W) .

Se $x[n] = 1$

então $x[1..n-1]$ é **mochila booleana ótima** para $(w, v, n-1, W - w[n])$

senão $x[1..n-1]$ é **mochila booleana ótima** para $(w, v, n-1, W)$

Subestrutura ótima

Suponha que $x[1..n]$ é **mochila booleana ótima** para o problema (w, v, n, W) .

Se $x[n] = 1$

então $x[1..n-1]$ é **mochila booleana ótima** para $(w, v, n-1, W - w[n])$

senão $x[1..n-1]$ é **mochila booleana ótima** para $(w, v, n-1, W)$

NOTA. Não há nada de especial acerca do índice n .
Uma afirmação semelhante vale para qualquer índice i .

Simplificação

Problema:

encontrar o **valor** de uma mochila booleana ótima.

Simplificação

Problema:

encontrar o valor de uma mochila booleana ótima.

$t[i, Y]$ = valor de uma mochila booleana ótima
para (w, v, i, Y)

Simplificação

Problema:

encontrar o valor de uma mochila booleana ótima.

$t[i, Y]$ = valor de uma mochila booleana ótima
para (w, v, i, Y)

= valor da expressão $x \cdot v$ sujeito às restrições

$$x \cdot w \leq Y,$$

onde x é uma mochila booleana ótima

Simplificação

Problema:

encontrar o **valor** de uma mochila booleana ótima.

$t[i, Y]$ = valor de uma mochila booleana ótima
para (w, v, i, Y)

= valor da expressão $x \cdot v$ sujeito às restrições

$$x \cdot w \leq Y,$$

onde x é uma mochila booleana ótima

Possíveis valores de Y : $0, 1, 2, \dots, W$

Recorrência

$t[i, Y]$ = valor da expressão $x \cdot v$ sujeito à restrição

$$x \cdot w \leq Y$$

Recorrência

$t[i, Y]$ = valor da expressão $x \cdot v$ sujeito à restrição

$$x \cdot w \leq Y$$

$t[0, Y] = 0$ para todo Y

Recorrência

$t[i, Y]$ = valor da expressão $x \cdot v$ sujeito à restrição

$$x \cdot w \leq Y$$

$t[0, Y] = 0$ para todo Y

$t[i, 0] = 0$ para todo i

Recorrência

$t[i, Y]$ = valor da expressão $x \cdot v$ sujeito à restrição

$$x \cdot w \leq Y$$

$t[0, Y] = 0$ para todo Y

$t[i, 0] = 0$ para todo i

$t[i, Y] = t[i-1, Y]$ se $w[i] > Y$

Recorrência

$t[i, Y]$ = valor da expressão $x \cdot v$ sujeito à restrição

$$x \cdot w \leq Y$$

$t[0, Y] = 0$ para todo Y

$t[i, 0] = 0$ para todo i

$t[i, Y] = t[i-1, Y]$ se $w[i] > Y$

$t[i, Y] = \max \{t[i-1, Y], t[i-1, Y-w[i]] + v[i]\}$ se $w[i] \leq Y$

Solução recursiva

Devolve o valor de uma mochila ótima para (w, v, n, W) .

```
REC-MOCHILA ( $w, v, n, W$ )
1  se  $n = 0$  ou  $W = 0$ 
2    então devolva 0
3  se  $w[n] > W$ 
4    então devolva REC-MOCHILA ( $w, v, n-1, W$ )
5   $a \leftarrow$  REC-MOCHILA ( $w, v, n-1, W$ )
6   $b \leftarrow$  REC-MOCHILA ( $w, v, n-1, W-w[n]$ ) +  $v[n]$ 
7  devolva  $\max\{a, b\}$ 
```

Solução recursiva

Devolve o valor de uma mochila ótima para (w, v, n, W) .

```
REC-MOCHILA ( $w, v, n, W$ )
1  se  $n = 0$  ou  $W = 0$ 
2    então devolva 0
3  se  $w[n] > W$ 
4    então devolva REC-MOCHILA ( $w, v, n-1, W$ )
5   $a \leftarrow$  REC-MOCHILA ( $w, v, n-1, W$ )
6   $b \leftarrow$  REC-MOCHILA ( $w, v, n-1, W-w[n]$ ) +  $v[n]$ 
7  devolva  $\max\{a, b\}$ 
```

Consumo de tempo no pior caso é $\Omega(2^n)$

Solução recursiva

Devolve o valor de uma mochila ótima para (w, v, n, W) .

```
REC-MOCHILA ( $w, v, n, W$ )
1  se  $n = 0$  ou  $W = 0$ 
2    então devolva 0
3  se  $w[n] > W$ 
4    então devolva REC-MOCHILA ( $w, v, n-1, W$ )
5   $a \leftarrow$  REC-MOCHILA ( $w, v, n-1, W$ )
6   $b \leftarrow$  REC-MOCHILA ( $w, v, n-1, W-w[n]$ ) +  $v[n]$ 
7  devolva  $\max\{a, b\}$ 
```

Consumo de tempo no pior caso é $\Omega(2^n)$

Por que demora tanto?

O mesmo subproblema é resolvido muitas vezes.

Programação dinâmica

Cada subproblema, valor de uma mochila ótima para

$$(w, v, i, Y),$$

é resolvido **uma só** vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela t ?

Programação dinâmica

Cada subproblema, valor de uma mochila ótima para

$$(w, v, i, Y),$$

é resolvido **uma só** vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela t ?

Olhe a recorrência e pense...

$$t[i, Y] = t[i-1, Y] \text{ se } w[i] > Y$$

$$t[i, Y] = \max \{t[i-1, Y], t[i-1, Y-w[i]] + v[i]\} \text{ se } w[i] \leq Y$$

Programação dinâmica

	0	1	2	3	4	5	6	7	Y
0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0								
2	0	*	*	*	*	*			
3	0					??			
4	0								
5	0								
6	0								
7	0								

i

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0	0	0	0	0	
1	0						
2	0						
3	0						
4	0						
i							

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0					
2	0						
3	0						
4	0						
i							

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0				
2	0						
3	0						
4	0						
i							

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0			
2	0						
3	0						
4	0						
i							

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	500		
2	0						
3	0						
4	0						
i							

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	500	500	
2	0						
3	0						
4	0						
i							

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	500	500	
2	0	0					
3	0						
4	0						
i							

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	500	500	
2	0	0	400				
3	0						
4	0						
i							

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	500	500	
2	0	0	400	400			
3	0						
4	0						
i							

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	500	500	
2	0	0	400	400	500		
3	0						
4	0						
i							

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	500	500	
2	0	0	400	400	500	500	
3	0						
4	0						
i							

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

	0	1	2	3	4	5	Y
0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	500	500	
2	0	0	400	400	500	500	
3	0	300	400	700	700	800	
4	0	300	400	700	700	850	
i							

Algoritmo de programação dinâmica

Devolve o valor de uma mochila booleana ótima para (w, v, n, W) .

MOCHILA-BOOLEANA (w, v, n, W)

```
1  para  $Y \leftarrow 0$  até  $W$  faça
2       $t[0, Y] \leftarrow 0$ 
3      para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4           $a \leftarrow t[i-1, Y]$ 
5          se  $w[i] > Y$ 
6              então  $b \leftarrow 0$ 
7              senão  $b \leftarrow t[i-1, Y-w[i]] + v[i]$ 
8           $t[i, Y] \leftarrow \max\{a, b\}$ 
9  devolva  $t[n, W]$ 
```

Algoritmo de programação dinâmica

Devolve o valor de uma mochila booleana ótima para (w, v, n, W) .

MOCHILA-BOOLEANA (w, v, n, W)

```
1  para  $Y \leftarrow 0$  até  $W$  faça
2       $t[0, Y] \leftarrow 0$ 
3      para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4           $a \leftarrow t[i-1, Y]$ 
5          se  $w[i] > Y$ 
6              então  $b \leftarrow 0$ 
7              senão  $b \leftarrow t[i-1, Y-w[i]] + v[i]$ 
8           $t[i, Y] \leftarrow \max\{a, b\}$ 
9  devolva  $t[n, W]$ 
```

Consumo de tempo é $\Theta(nW)$.

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$.

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$.

NOTA:

O consumo $\Theta(n2^{\lg W})$ é exponencial!

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$.

NOTA:

O consumo $\Theta(n2^{\lg W})$ é exponencial!

Explicação: o “tamanho” de W é $\lg W$ e não W
(tente multiplicar $w[1], \dots, w[n]$ e W por 1000)

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$.

NOTA:

O consumo $\Theta(n2^{\lg W})$ é exponencial!

Explicação: o “tamanho” de W é $\lg W$ e não W (tente multiplicar $w[1], \dots, w[n]$ e W por 1000)

Se W é $\Omega(2^n)$ o consumo de tempo é $\Omega(n2^n)$, mais lento que o algoritmo força bruta!

Obtenção da mochila

MOCHILA (w, n, W, t)

```
1   $Y \leftarrow W$ 
2  para  $i \leftarrow n$  decrescendo até 1 faça
3      se  $t[i, Y] = t[i-1, Y]$ 
4          então  $x[i] \leftarrow 0$ 
5          senão  $x[i] \leftarrow 1$ 
6               $Y \leftarrow Y - w[i]$ 
7  devolva  $x$ 
```

Obtenção da mochila

```
MOCHILA ( $w, n, W, t$ )
1   $Y \leftarrow W$ 
2  para  $i \leftarrow n$  decrescendo até 1 faça
3      se  $t[i, Y] = t[i-1, Y]$ 
4          então  $x[i] \leftarrow 0$ 
5          senão  $x[i] \leftarrow 1$ 
6               $Y \leftarrow Y - w[i]$ 
7  devolva  $x$ 
```

Consumo de tempo é $\Theta(n)$.

Versão recursiva

MEMOIZED-MOCHILA-BOOLEANA (w, v, n, W)

- 1 para $i \leftarrow 0$ até n faça
- 2 para $Y \leftarrow 0$ até W faça
- 3 $t[i, Y] \leftarrow \infty$
- 3 devolva LOOKUP-MOC (w, v, n, W)

Versão recursiva

LOOKUP-MOC (w, v, i, Y)

```
1 se  $t[i, Y] < \infty$ 
2   então devolva  $t[i, Y]$ 
3 se  $i = 0$  ou  $Y = 0$  então  $t[i, Y] \leftarrow 0$ 
   senão
4   se  $w[i] > Y$ 
       então
5      $t[i, Y] \leftarrow \text{LOOKUP-MOC}(w, v, i-1, Y)$ 
       senão
6      $a \leftarrow \text{LOOKUP-MOC}(w, v, i-1, Y)$ 
7      $b \leftarrow \text{LOOKUP-MOC}(w, v, i-1, Y - w[i]) + v[i]$ 
8      $t[i, Y] \leftarrow \max\{a, b\}$ 
9 devolva  $t[i, Y]$ 
```

Exercício das bandeiras

No dia da Bandeira na Rússia o proprietário de uma loja decidiu decorar a vitrine de sua loja com faixas de tecido das cores branca, azul e vermelha.

Ele deseja satisfazer as seguintes condições: faixas da mesma cor não podem ser colocadas uma ao lado da outra. Uma faixa azul sempre está entre uma branca e uma vermelha, ou uma vermelha e uma branca.

Escreva um programa que, dado o número n de faixas a serem colocadas na vitrine, calcule o número de maneiras de satisfazer as condições do proprietário.

Exemplo: Para $n = 3$, o resultado são as seguintes combinações: BVB, VBV, BAV, VAB.