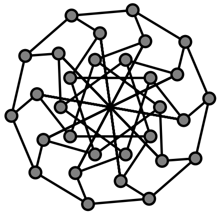
DFS e ordenação topológica

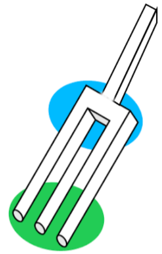
CLRS 22 Elementary Graph Algorithms

CLRS 22.3 e 22.4

Grafo conexo



Garfo sem nexo



Busca em profundidade - elementos

Vértice branco: ainda não descoberto

Vértice cinzento: descoberto, em processamento

Vértice preto: processado

DFS termina descrevendo via π uma floresta DF (Ou BP).

$u.\pi$: predecessor ou pai de u na floresta DF

Faz duas marcas de tempo:

$u.d$: momento da descoberta de u
$u.f$: momento da finalização de u

u é branco antes de $u.d$,
cinzento entre $u.d$ e $u.f$,
preto depois de $u.f$.

Busca em profundidade

```
DFS (G)
para cada u ∈ V(G) faça
    u.cor ← branco        u.π ← nil
tempo ← 0
para cada u ∈ V(G) faça
    se u.cor = branco
        então DFS-Visit(u)

DFS-Visit(u)
u.cor ← cinzento    u.d ← tempo    tempo ← tempo + 1
para cada v ∈ u.Estrela faça
    se u.cor = branco
        então v.π ← u
              DFS-Visit(v)
u.cor ← preto
u.f ← tempo          tempo ← tempo + 1
```

Consumo de tempo

Cada vértice é descoberto uma única vez, pois é branco e, ao ser descoberto, passa a ser cinzento, e depois preto.

A lista de adjacência de cada vértice descoberto é percorrida **uma única vez**.

Logo o consumo de tempo é $\mathrm{O}(n + m)$, onde $n = |V|$ e $m = |E|$, pois a inicialização custa $\Theta(n)$ e a soma do tamanho das listas de adjacências percorridas é $\mathrm{O}(m)$.

O consumo de tempo de uma DFS é linear no tamanho do grafo.

Propriedades da DFS de um grafo

Mesma estrutura que sequência válida de parênteses.

Teorema: *Para vértices u e v com $u.d < v.d$, exatamente uma das duas condições abaixo valem na floresta resultante:*

a) Os intervalos $[u.d, u.f]$ e $[v.d, v.f]$ são disjuntos, e nem u é descendente de v, nem v é descendente de u.
b) O intervalo $[v.d, v.f]$ está contido no intervalo $[u.d, u.f]$, e v é descendente de u.

Corolário: *Vértice v é um descendente próprio do vértice u na floresta resultante da DFS sse $u.d < v.d < v.f < u.f$.*

Teorema (do caminho branco): *v é descendente de u sse, no momento $u.d$ em que u é descoberto, v pode ser alcançado de u por um caminho com apenas vértices brancos.*

Classificação das arestas

Quatro tipos de arestas derivadas de uma DFS:

a) Arestas da árvore: arestas da floresta DF.
b) Arestas de retorno: de um vértice para um ascendente na floresta DF.
c) Arestas de avanço: de um vértice para um descendente na floresta DF.
d) Arestas cruzadas: todas as outras arestas.

Teorema: *Se o grafo não é dirigido, então só há arestas da árvore e arestas de retorno.*

Aplicação: ordenação topológica.

Ordenação topológica

Digrafo $G = (V, A)$

Ordenação topológica: Ordenação total de V em que u vem antes de v sempre que $(u, v) \in A$. Geralmente expressa como uma numeração de V.

Digrafo G é acíclico se não tem circuito dirigido.

Problema: Dado digrafo G acíclico, encontrar uma ordenação topológica de G.

Algoritmo:

Execute uma DFS no grafo calculando $u.f$ para cada u.

Quando cada vértice u termina, insira-o no início de uma lista ligada.

Devolva a lista ligada.

Ordenação topológica

Problema: Dado digrafo G acíclico,
encontrar uma ordenação topológica de G.

Algoritmo:

Execute uma DFS no grafo calculando $u.f$ para cada u.

Quando cada vértice u termina,
insira-o no início de uma lista ligada.

Devolva a lista ligada.

Consumo de tempo: linear no tamanho do grafo

Lema: Um digrafo é acíclico sse
a DFS não detecta nenhuma aresta de retorno.

Teorema: O algoritmo acima calcula uma ordenação topológica do grafo.