Componentes fortemente conexas

CLRS Cap 22.5

Busca em profundidade

DFS (G)

para cada $u \in V(G)$ **faça**
  $u.\mathrm{cor} \leftarrow$ branco $u.\pi \leftarrow$ nil
tempo $\leftarrow 0$
para cada $u \in V(G)$ **faça**
  se $u.\mathrm{cor} =$ branco
    então DFS-Visit(u)

Busca em profundidade

```
DFS (G)
para cada u ∈ V(G) faça
      u.cor ← branco        u.π ← nil
tempo ← 0
para cada u ∈ V(G) faça
      se u.cor = branco
            então DFS-Visit(u)

DFS-Visit(u)
u.cor ← cinzento     u.d ← tempo    tempo ← tempo + 1
para cada v ∈ u.Estrela faça
      se u.cor = branco
            então v.π ← u
                  DFS-Visit(v)
u.cor ← preto
u.f ← tempo            tempo ← tempo + 1
```

A floresta DF

Cada componente da floresta DF é uma árvore enraizada, orientada a partir da raíz.

A floresta DF

Cada componente da floresta DF é uma árvore enraizada, orientada a partir da raíz.

A cada chamada de DFS-Visit no laço principal, os vértices lá processados fazem parte da componente cuja raíz é o argumento da chamada.

A floresta DF

Cada componente da floresta DF é uma árvore enraizada, orientada a partir da raíz.

A cada chamada de DFS-Visit no laço principal, os vértices lá processados fazem parte da componente cuja raíz é o argumento da chamada.

Extensão do algoritmo para capturar essas componentes...

A floresta DF

Cada componente da floresta DF é uma árvore enraizada, orientada a partir da raíz.

A cada chamada de DFS-Visit no laço principal, os vértices lá processados fazem parte da componente cuja raíz é o argumento da chamada.

Extensão do algoritmo para capturar essas componentes...

Sugestões?

Componentes fortemente conexas

Seja G um digrafo e u e v vértices de G.

Componentes fortemente conexas

Seja G um digrafo e u e v vértices de G.

Escrevemos $u \rightsquigarrow v$ se existe caminho de u para v em G.

Componentes fortemente conexas

Seja G um digrafo e u e v vértices de G.

Escrevemos $u \rightsquigarrow v$ se existe caminho de u para v em G.

Seja C um conjunto maximal de vértices de G tal que $u \rightsquigarrow v$ e $v \rightsquigarrow u$ quaisquer que sejam u e v em C.

Componentes fortemente conexas

Seja G um digrafo e u e v vértices de G.

Escrevemos $u \rightsquigarrow v$ se existe caminho de u para v em G.

Seja C um conjunto maximal de vértices de G tal que $u \rightsquigarrow v$ e $v \rightsquigarrow u$ quaisquer que sejam u e v em C.

C é uma componente fortemente conexa de G.

Componentes fortemente conexas

Seja G um digrafo e u e v vértices de G.

Escrevemos $u \rightsquigarrow v$ se existe caminho de u para v em G.

Seja C um conjunto maximal de vértices de G tal que $u \rightsquigarrow v$ e $v \rightsquigarrow u$ quaisquer que sejam u e v em C.

C é uma componente fortemente conexa de G.

Diferentes componentes fortemente conexas são disjuntas, ou seja, as componentes determinam uma partição de V_G.

Componentes fortemente conexas

Seja G um digrafo e u e v vértices de G.

Escrevemos $u \rightsquigarrow v$ se existe caminho de u para v em G.

Seja C um conjunto maximal de vértices de G tal que $u \rightsquigarrow v$ e $v \rightsquigarrow u$ quaisquer que sejam u e v em C.

C é uma componente fortemente conexa de G.

Diferentes componentes fortemente conexas são disjuntas, ou seja, as componentes determinam uma partição de V_G.

Problema: Dado digrafo G, encontrar todas as componentes fortemente conexas de G.

Algoritmo de Kosaraju-Sharir

Seja $G = (V, E)$ um digrafo.

Seja G^r o digrafo reverso de G (todos os arcos invertidos).

Algoritmo de Kosaraju-Sharir

Seja $G = (V, E)$ um digrafo.

Seja G^r o digrafo reverso de G (todos os arcos invertidos).

Kosaraju-Sharir(G)

Algoritmo de Kosaraju-Sharir

Seja $G = (V, E)$ um digrafo.

Seja G^r o digrafo reverso de G (todos os arcos invertidos).

Kosaraju-Sharir(G)

Execute uma DFS em G calculando $u.f$ para cada u.

Algoritmo de Kosaraju-Sharir

Seja $G = (V, E)$ um digrafo.

Seja G^r o digrafo reverso de G (todos os arcos invertidos).

Kosaraju-Sharir(G)

Execute uma DFS em G calculando $u.f$ para cada u.

Construa G^r.

Algoritmo de Kosaraju-Sharir

Seja $G = (V, E)$ um digrafo.

Seja G^r o digrafo reverso de G (todos os arcos invertidos).

Kosaraju-Sharir(G)

Execute uma DFS em G calculando $u.f$ para cada u.

Construa G^r.

Execute uma DFS em G^r considerando os vértices de G^r em ordem decrescente do valor de f calculado acima.

Algoritmo de Kosaraju-Sharir

Seja $G = (V, E)$ um digrafo.

Seja G^r o digrafo reverso de G (todos os arcos invertidos).

Kosaraju-Sharir(G)

Execute uma DFS em G calculando $u.f$ para cada u.

Construa G^r.

Execute uma DFS em G^r considerando os vértices de G^r em ordem decrescente do valor de f calculado acima.

Devolva as componentes da floresta DF construída para G^r.

Algoritmo de Kosaraju-Sharir

Seja $G = (V, E)$ um digrafo.

Seja G^r o digrafo reverso de G (todos os arcos invertidos).

Kosaraju-Sharir(G)

> Execute uma DFS em G calculando $u.f$ para cada u.
>
> Construa G^r.
>
> Execute uma DFS em G^r considerando os vértices de G^r em ordem decrescente do valor de f calculado acima.
>
> Devolva as componentes da floresta DF construída para G^r.

Algoritmo de Kosaraju-Sharir

Seja $G = (V, E)$ um digrafo.

Seja G^r o digrafo reverso de G (todos os arcos invertidos).

Kosaraju-Sharir(G)

> Execute uma DFS em G calculando $u.f$ para cada u.
>
> Construa G^r.
>
> Execute uma DFS em G^r considerando os vértices de G^r em ordem decrescente do valor de f calculado acima.
>
> Devolva as componentes da floresta DF construída para G^r.

Consumo de tempo: linear no tamanho de G.

Análise

Lema: Sejam C e C' componentes fortemente conexas distintas de um digrafo G e vértices u, $v \in C$ e u', $v' \in C'$. Se existe um caminho de u a u' em G, então não existe caminho em G de v' a v.

Análise

Lema: Sejam C e C' componentes fortemente conexas distintas de um digrafo G e vértices $u, v \in C$ e $u', v' \in C'$. Se existe um caminho de u a u' em G, então não existe caminho em G de v' a v.

d e f como calculados na primeira DFS do algoritmo.

Análise

Lema: Sejam C e C' componentes fortemente conexas distintas de um digrafo G e vértices u, $v \in C$ e u', $v' \in C'$. Se existe um caminho de u a u' em G, então não existe caminho em G de v' a v.

d e f como calculados na primeira DFS do algoritmo.

Para um conjunto U de vértices,
sejam $d(U) := \min\{u.d : u \in U\}$
e $f(U) := \max\{u.f : u \in U\}$.

Análise

Lema: Sejam C e C' componentes fortemente conexas distintas de um digrafo G e vértices u, $v \in C$ e u', $v' \in C'$. Se existe um caminho de u a u' em G, então não existe caminho em G de v' a v.

d e f como calculados na primeira DFS do algoritmo.

Para um conjunto U de vértices,
sejam $d(U) := \min\{u.d : u \in U\}$
e $f(U) := \max\{u.f : u \in U\}$.

$d(U)$: instante em que o primeiro vértice de U foi descoberto

Análise

Lema: Sejam C e C' componentes fortemente conexas distintas de um digrafo G e vértices u, $v \in C$ e u', $v' \in C'$. Se existe um caminho de u a u' em G, então não existe caminho em G de v' a v.

d e f como calculados na primeira DFS do algoritmo.

Para um conjunto U de vértices,
sejam $d(U) := \min\{u.d : u \in U\}$
e $f(U) := \max\{u.f : u \in U\}$.

$d(U)$: instante em que o primeiro vértice de U foi descoberto

$f(U)$: instante em que o último vértice de U terminou

Análise

Lema: Sejam C e C' componentes fortemente conexas distintas de um digrafo G e vértices u, $v \in C$ e u', $v' \in C'$. Se existe um caminho de u a u' em G, então não existe caminho em G de v' a v.

d e f como calculados na primeira DFS do algoritmo.

Para um conjunto U de vértices,
sejam $d(U) := \min\{u.d : u \in U\}$
e $f(U) := \max\{u.f : u \in U\}$.

$d(U)$: instante em que o primeiro vértice de U foi descoberto

$f(U)$: instante em que o último vértice de U terminou

Lema: Sejam C e C' componentes fortemente conexas distintas de um digrafo G. Se existe um arco (u, u') em G, com $u \in C$ e $u' \in C'$, então $f(C) > f(C')$.

Análise

d e f como calculados na primeira DFS do algoritmo.

Para um conjunto U de vértices,
seja $d(U) := \min\{u.d : u \in U\}$ e $f(U) := \max\{u.f : u \in U\}$.

Lema: Sejam C e C' componentes fortemente conexas distintas de um digrafo G. Se existe um arco (u, u') em G^r, então $f(C) < f(C')$.

Análise

d e f como calculados na primeira DFS do algoritmo.

Para um conjunto U de vértices,
seja $d(U) := \min\{u.d : u \in U\}$ e $f(U) := \max\{u.f : u \in U\}$.

Lema: Sejam C e C' componentes fortemente conexas distintas de um digrafo G. Se existe um arco (u, u') em G^r, então $f(C) < f(C')$.

Isso implica que a ordenação por f decrescente na segunda DFS percorre as componentes fortemente conexas

Análise

d e f como calculados na primeira DFS do algoritmo.

Para um conjunto U de vértices,
seja $d(U) := \min\{u.d : u \in U\}$ e $f(U) := \max\{u.f : u \in U\}$.

Lema: Sejam C e C' componentes fortemente conexas distintas de um digrafo G. Se existe um arco (u, u') em G^r, então $f(C) < f(C')$.

Isso implica que a ordenação por f decrescente na segunda DFS percorre as componentes fortemente conexas

Teorema: Kosaraju-Sharir(G) calcula corretamente as componentes fortemente conexas de G.

Condensação de um digrafo

Dado um digrafo G, sua condensação é o digrafo cujos vértices são (ou estão em correspondência com) as componentes conexas de G, com arco de C a C' sse existe em G arco de um vértice em C a um de C'.

TEOREMA: *A condensação de um digrafo é um digrafo acíclico.*

Condensação de um digrafo

Dado um digrafo G, sua condensação é o digrafo cujos vértices são (ou estão em correspondência com) as componentes conexas de G, com arco de C a C' sse existe em G arco de um vértice em C a um de C'.

TEOREMA: *A condensação de um digrafo é um digrafo acíclico.*

PROBLEMA: Adaptar Kosaraju-Sharir para devolver uma ordenação topológica da condensação de G.