

CLRS Cap 22.5

DFS ( $G$ )

```

1 para cada  $u \in V(G)$  faça
2    $u.cor \leftarrow$  branco    $u.\pi \leftarrow$  nil
3 tempo  $\leftarrow$  0
4 para cada  $u \in V(G)$  faça
5   se  $u.cor =$  branco
6     então DFS-Visit( $u$ )

```

DFS-Visit( $u$ )

```

1  $u.cor \leftarrow$  cinzento    $u.d \leftarrow$  tempo   tempo  $\leftarrow$  tempo + 1
3 para cada  $v \in u.Estrela$  faça
4   se  $u.cor =$  branco
5     então  $v.\pi \leftarrow u$ 
6           DFS-Visit( $v$ )
7  $u.cor \leftarrow$  preto
8  $u.f \leftarrow$  tempo       tempo  $\leftarrow$  tempo + 1

```

## A floresta DF

Cada componente da floresta DF é uma árvore enraizada, orientada a partir da raiz.

A cada chamada de DFS-Visit no laço principal, os vértices lá processados fazem parte da componente cuja raiz é o argumento da chamada.

Extensão do algoritmo para capturar essas componentes...

Sugestões?

## Componentes fortemente conexas

Seja  $G$  um digrafo e  $u$  e  $v$  vértices de  $G$ .

Escrevemos  $u \rightsquigarrow v$  se existe caminho de  $u$  para  $v$  em  $G$ .

Seja  $C$  um conjunto maximal de vértices de  $G$  tal que  $u \rightsquigarrow v$  e  $v \rightsquigarrow u$  quaisquer que sejam  $u$  e  $v$  em  $C$ .

$C$  é uma **componente fortemente conexa** de  $G$ .

Diferentes componentes fortemente conexas são disjuntas, ou seja, as componentes determinam uma partição de  $V_G$ .

**Problema:** Dado digrafo  $G$ , encontrar todas as componentes fortemente conexas de  $G$ .

# Algoritmo de Kosaraju-Sharir

Seja  $G = (V, E)$  um digrafo.

Seja  $G^r$  o digrafo reverso de  $G$  (todos os arcos invertidos).

## Kosaraju-Sharir( $G$ )

Execute uma DFS em  $G$  calculando  $u.f$  para cada  $u$ .

Construa  $G^r$ .

Execute uma DFS em  $G^r$  considerando os vértices de  $G^r$  em ordem decrescente do valor de  $f$  calculado acima.

Devolva as componentes da floresta DF construída para  $G^r$ .

**Consumo de tempo:** linear no tamanho de  $G$ .

# Análise

**Lema:** Sejam  $C$  e  $C'$  componentes fortemente conexas distintas de um digrafo  $G$  e vértices  $u, v \in C$  e  $u', v' \in C'$ . Se existe um caminho de  $u$  a  $u'$  em  $G$ , então não existe caminho em  $G$  de  $v'$  a  $v$ .

$d$  e  $f$  como calculados na primeira DFS do algoritmo.

Para um conjunto  $U$  de vértices,

sejam  $d(U) := \min\{u.d : u \in U\}$

e  $f(U) := \max\{u.f : u \in U\}$ .

$d(U)$ : instante em que o primeiro vértice de  $U$  foi descoberto

$f(U)$ : instante em que o último vértice de  $U$  terminou

**Lema:** Sejam  $C$  e  $C'$  componentes fortemente conexas distintas de um digrafo  $G$ . Se existe um arco  $(u, u')$  em  $G$ , com  $u \in C$  e  $u' \in C'$ , então  $f(C) > f(C')$ .

# Análise

$d$  e  $f$  como calculados na primeira DFS do algoritmo.

Para um conjunto  $U$  de vértices,

seja  $d(U) := \min\{u.d : u \in U\}$  e  $f(U) := \max\{u.f : u \in U\}$ .

**Lema:** Sejam  $C$  e  $C'$  componentes fortemente conexas distintas de um digrafo  $G$ . Se existe um arco  $(u, u')$  em  $G^r$ , então  $f(C) < f(C')$ .

Isso implica que a ordenação por  $f$  decrescente na segunda DFS percorre as componentes fortemente conexas

**Teorema:** Kosaraju-Sharir( $G$ ) calcula corretamente as componentes fortemente conexas de  $G$ .

# Condensação de um digrafo

Dado um digrafo  $G$ , sua **condensação** é o digrafo cujos vértices são (ou estão em correspondência com) as componentes conexas de  $G$ , com arco de  $C$  a  $C'$  sse existe em  $G$  arco de um vértice em  $C$  a um de  $C'$ .

**TEOREMA:** A condensação de um digrafo é um digrafo acíclico.

**PROBLEMA:** Adaptar Kosaraju-Sharir para devolver uma ordenação topológica da condensação de  $G$ .