# Complexidade computacional

Classifica os problemas em relação à
dificuldade de resolvê-los algoritmicamente.

CLRS 34

# Palavras

Para resolver um problema usando um computador é necessário descrever os dados do problema através de uma sequência de símbolos retirados de algum alfabeto.

# Palavras

Para resolver um problema usando um computador é necessário descrever os dados do problema através de uma sequência de símbolos retirados de algum alfabeto.

Este alfabeto pode ser, por exemplo,
o conjunto de símbolos ASCII ou o conjunto $\{0, 1\}$.

# Palavras

Para resolver um problema usando um computador é necessário descrever os dados do problema através de uma sequência de símbolos retirados de algum alfabeto.

Este alfabeto pode ser, por exemplo,
o conjunto de símbolos ASCII ou o conjunto $\{0, 1\}$.

Qualquer sequência de elementos de um alfabeto é chamada de uma palavra.

# Palavras

Para resolver um problema usando um computador é necessário descrever os dados do problema através de uma sequência de símbolos retirados de algum alfabeto.

Este alfabeto pode ser, por exemplo,
o conjunto de símbolos ASCII ou o conjunto $\{0, 1\}$.

Qualquer sequência de elementos de um alfabeto é chamada de uma palavra.

Não é difícil codificar objetos tais como racionais, vetores, matrizes, grafos e funções como palavras.

# Palavras

Para resolver um problema usando um computador é necessário descrever os dados do problema através de uma sequência de símbolos retirados de algum alfabeto.

Este alfabeto pode ser, por exemplo,
o conjunto de símbolos ASCII ou o conjunto $\{0, 1\}$.

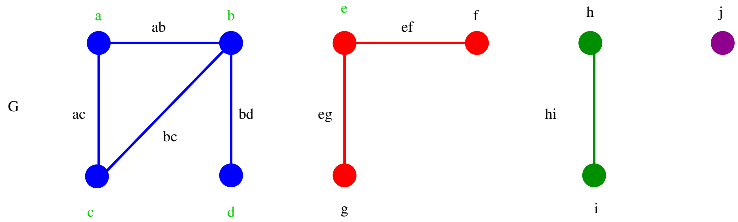
Qualquer sequência de elementos de um alfabeto é chamada de uma palavra.

Não é difícil codificar objetos tais como racionais, vetores, matrizes, grafos e funções como palavras.

O tamanho de uma palavra $w$, denotado por $\langle w \rangle$,
é o número de símbolos usados em $w$, contando multiplicidades. O tamanho do racional '123/567' é 7.

# Exemplo 1

## Grafo



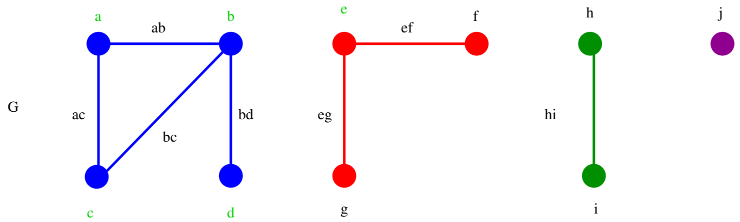

## Palavra:

$(\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}, \{\{b\,d\}, \{e\,g\}, \{a\,c\}, \{h\,i\}, \{a\,b\}, \{e\,f\}, \{b\,c\}\})$

## Tamanho da palavra: 59

# Exemplo 2

Grafo com função de peso nas arestas:




Palavra:

$$((\{bd\},2),(\{eg\},1),(\{ac\},0),(\{hi\},-3),$$
$$(\{ab\},3/2),(\{ef\},7),(\{bc,0)\}\})$$

Tamanho da palavra: 67

# Tamanho de uma palavra

Para os nossos propósitos,
não há mal em subestimar o tamanho de um objeto.

# Tamanho de uma palavra

Para os nossos propósitos,
não há mal em subestimar o tamanho de um objeto.

Não é necessário contar rigorosamente os caracteres
'{', '}', '(', ')' e ',' dos exemplos anteriores.

# Tamanho de uma palavra

Para os nossos propósitos,
não há mal em subestimar o tamanho de um objeto.

Não é necessário contar rigorosamente os caracteres
'{', '}', '(', ')' e ',' dos exemplos anteriores.

Tamanho de um inteiro $p$ é essencialmente $\lg|p|$.

Tamanho do racional $p/q$ é essencialmente $\lg|p| + \lg|q|$.

# Tamanho de uma palavra

Para os nossos propósitos,
não há mal em subestimar o tamanho de um objeto.

Não é necessário contar rigorosamente os caracteres
'{', '}', '(', ')' e ',' dos exemplos anteriores.

Tamanho de um inteiro $p$ é essencialmente $\lg|p|$.

Tamanho do racional $p/q$ é essencialmente $\lg|p| + \lg|q|$.

Tamanho de um vetor $A[1\,..\,n]$ é
a soma dos tamanhos de seus componentes

$$\langle A\rangle = \langle A[1]\rangle + \langle A[2]\rangle + \cdots + \langle A[n]\rangle.$$

# Problemas e instâncias

Cada conjunto específico de dados de um problema
define uma instância.

Tamanho de uma instância é o tamanho de uma palavra que
representa a instância.

# Problemas e instâncias

Cada conjunto específico de dados de um problema define uma instância.

Tamanho de uma instância é o tamanho de uma palavra que representa a instância.

Problema que pede uma resposta do tipo SIM ou NÃO é chamado de problema de decisão.

Problema que procura um elemento em um conjunto é um problema de busca.

# Problemas e instâncias

Cada conjunto específico de dados de um problema define uma instância.

Tamanho de uma instância é o tamanho de uma palavra que representa a instância.

Problema que pede uma resposta do tipo SIM ou NÃO é chamado de problema de decisão.

Problema que procura um elemento em um conjunto é um problema de busca.

Problema que procura um elemento de um conjunto de soluções viáveis que seja melhor possível em relação a algum critério é um problema de otimização.

# Máximo divisor comum

Problema: Dados dois números inteiros não-negativos $a$ e $b$, determinar $\mathrm{mdc}(a, b)$.

Exemplo:
máximo divisor comum de 30 e 24 é 6
máximo divisor comum de 514229 e 317811 é 1
máximo divisor comum de 3267 e 2893 é 11

# Máximo divisor comum

Problema: Dados dois números inteiros não-negativos $a$ e $b$, determinar $\text{mdc}(a, b)$.

Exemplo:
máximo divisor comum de 30 e 24 é 6
máximo divisor comum de 514229 e 317811 é 1
máximo divisor comum de 3267 e 2893 é 11

Problema de busca
Instância: $a$ e $b$
Tamanho da instância: $\langle a \rangle + \langle b \rangle$,

$$\lg a + \lg b.$$

# Máximo divisor comum

Problema: Dados dois números inteiros não-negativos $a$ e $b$, determinar $\mathrm{mdc}(a, b)$.

Exemplo:
máximo divisor comum de 30 e 24 é 6
máximo divisor comum de 514229 e 317811 é 1
máximo divisor comum de 3267 e 2893 é 11

Problema de busca
Instância: $a$ e $b$
Tamanho da instância: $\langle a \rangle + \langle b \rangle$,

$$\lg a + \lg b.$$

Consumo de tempo do algoritmo Café-com-Leite é $\mathrm{O}(b)$.
Consumo de tempo do algoritmo Euclides é $\mathrm{O}(\lg b)$.

# Máximo divisor comum (decisão)

Problema: Dados números inteiros não-negativos $a$, $b$ e $k$, $\text{mdc}(a, b) = k$?

Exemplo:
máximo divisor comum de 30 e 24 é 6
máximo divisor comum de 514229 e 317811 é 1
máximo divisor comum de 3267 e 2893 é 11

# Máximo divisor comum (decisão)

Problema: Dados números inteiros não-negativos $a$, $b$ e $k$, $\mathrm{mdc}(a,b) = k$?

Exemplo:
máximo divisor comum de 30 e 24 é 6
máximo divisor comum de 514229 e 317811 é 1
máximo divisor comum de 3267 e 2893 é 11

Problema de decisão: resposta SIM ou NÃO
Instância: $a$, $b$, $k$
Tamanho da instância: $\langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle k \rangle$, essencialmente

$$\lg a + \lg b + \lg k$$

# Subsequência comum máxima

Problema: Encontrar uma ssco máxima de $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$.

Exemplos: $X$ = A B C B D A B

$Y$ = B D C A B A

ssco máxima = B C A B

# Subsequência comum máxima

Problema: Encontrar uma ssco máxima de $X[1\,.\,.\,m]$ e $Y[1\,.\,.\,n]$.

Exemplos: $X$ = A B C B D A B

$Y$ = B D C A B A

ssco máxima = B C A B

Problema de otimização

Instância: $X[1\,.\,.\,m]$ e $Y[1\,.\,.\,n]$

Tamanho da instância: $\langle X\rangle + \langle Y\rangle$, essencialmente

$$m + n$$

Consumo de tempo REC-LCS-LENGTH é $\Omega(2^{\min\{m,n\}})$.
Consumo de tempo LCS-LENGTH é $\Theta(mn)$.

# Subsequência comum máxima (decisão)

Problema: $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$ possuem uma ssco $\geq k$?

Exemplo: $X =$ A B C B D A B

$Y =$ B D C A B A

ssco máxima = B C A B

# Subsequência comum máxima (decisão)

Problema: $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$ possuem uma ssco $\geq k$?

Exemplo: $X$ = A B C B D A B

$Y$ = B D C A B A

ssco máxima = B C A B

Problema de decisão: resposta SIM ou NÃO
Instância: $X[1\,..\,m]$, $Y[1\,..\,n]$, $k$
Tamanho da instância: $\langle X\rangle + \langle Y\rangle + \langle k\rangle$, essencialmente

$$n + m + \lg k$$

# Problema booleano da mochila

Problema (Knapsack Problem): Dados $n$, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$ e $W$, encontrar uma mochila booleana ótima.

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $w$ | 40 | 30 | 20 | 10 |
| $v$ | 840 | 600 | 400 | 100 |
| $x$ | 0 | 1 | 1 | 0 |

valor $= 1000$

# Problema booleano da mochila

Problema (Knapsack Problem): Dados $n$, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$ e $W$, encontrar uma mochila booleana ótima.

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $w$ | 40 | 30 | 20 | 10 | |
| $v$ | 840 | 600 | 400 | 100 | |
| $x$ | 0 | 1 | 1 | 0 | valor = 1000 |

Problema de otimização

Instância: $n$, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$ e $W$

Tamanho da instância: $\langle n\rangle + \langle w\rangle + \langle v\rangle + \langle W\rangle$, essencialmente $\lg n + n \lg W + n \lg V + \lg W$

Consumo de tempo MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$.

# Problema booleano da mochila (decisão)

Problema (Knapsack Problem): Dados $n$, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$ e $W$ e $k$, existe uma mochila booleana de valor $\geq k$.

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$, $k = 1010$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $w$ | 40 | 30 | 20 | 10 |
| $v$ | 840 | 600 | 400 | 100 |
| $x$ | 0 | 1 | 1 | 0 |

valor $= 1000$

# Problema booleano da mochila (decisão)

Problema (Knapsack Problem): Dados $n$, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$ e $W$ e $k$, existe uma mochila booleana de valor $\geq k$.

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$, $k = 1010$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $w$ | 40 | 30 | 20 | 10 |
| $v$ | 840 | 600 | 400 | 100 |
| $x$ | 0 | 1 | 1 | 0 |

valor $= 1000$

Problema de decisão: resposta SIM ou NÃO

Instância: $n$, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$, $W$ e $k$

Tamanho da instância: $\langle n\rangle + \langle w\rangle + \langle v\rangle + \langle W\rangle + \lg k$, essencialmente $\lg n + n \lg W + n \lg V + \lg W + \lg k$.

# Problema fracionário da mochila

Problema: Dados $n$, $w[1\,.\,.\,n]$ $v[\,.\,.\,n]$ e $W$, encontrar uma mochila ótima.

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $w$ | 40 | 30 | 20 | 10 |
| $v$ | 840 | 600 | 400 | 100 |
| $x$ | 1 | 1/3 | 0 | 0 |

valor $= 1040$

# Problema fracionário da mochila

Problema: Dados $n$, $w[1\,..\,n]$ $v[\,..\,n]$ e $W$, encontrar uma mochila ótima.

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $w$ | 40 | 30 | 20 | 10 |
| $v$ | 840 | 600 | 400 | 100 |
| $x$ | 1 | 1/3 | 0 | 0 |

valor $= 1040$

Problema de otimização

Instância: $n$, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$ e $W$

Tamanho da instância: $\langle n\rangle + \langle w\rangle + \langle v\rangle + \langle W\rangle$, essencialmente $\lg n + n \lg W + n \lg V + \lg W$

Consumo de tempo MOCHILA-FRACIONÁRIA é $\Theta(n \lg n)$.

# Problema fracionário da mochila (decisão)

Problema: Dados $n$, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$, $W$ e $k$,
existe uma mochila de valor $\geq k$?

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$, $k = 1010$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $w$ | 40 | 30 | 20 | 10 |
| $v$ | 840 | 600 | 400 | 100 |
| $x$ | 1 | 1/3 | 0 | 0 |

valor $= 1040$

# Problema fracionário da mochila (decisão)

Problema: Dados $n$, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$, $W$ e $k$, existe uma mochila de valor $\geq k$?

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$, $k = 1010$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $w$ | 40 | 30 | 20 | 10 |
| $v$ | 840 | 600 | 400 | 100 |
| $x$ | 1 | 1/3 | 0 | 0 |

valor $= 1040$

Problema de decisão: resposta SIM ou NÃO

Instância: $n$, $w[1\,..\,n]$ $v[1\,..\,n]$, $W$ e $k$
Tamanho da instância: $\langle n\rangle + \langle w\rangle + \langle v\rangle + \langle W\rangle + \langle k\rangle$, essencialmente $\lg n + n \lg W + n \lg V + \lg W + \lg k$

# Modelo de computação

É uma descrição abstrata e conceitual de um computador que será usado para executar um algoritmo.

# Modelo de computação

É uma descrição abstrata e conceitual de um computador que será usado para executar um algoritmo.

Um modelo de computação especifica as operações elementares que um algoritmo pode executar e o critério empregado para medir a quantidade de tempo que cada operação consome.

# Modelo de computação

É uma descrição abstrata e conceitual de um computador que será usado para executar um algoritmo.

Um modelo de computação especifica as operações elementares que um algoritmo pode executar e o critério empregado para medir a quantidade de tempo que cada operação consome.

Operações elementares típicas são operações aritméticas entre números e comparações.

# Modelo de computação

É uma descrição abstrata e conceitual de um computador que será usado para executar um algoritmo.

Um modelo de computação especifica as operações elementares que um algoritmo pode executar e o critério empregado para medir a quantidade de tempo que cada operação consome.

Operações elementares típicas são operações aritméticas entre números e comparações.

No critério uniforme supõe-se que cada operação elementar consome uma quantidade de tempo constante.

# Problemas polinomiais

Análise de um algoritmo em determinado modelo de computação estima seu consumo de tempo e quantidade de espaço como função do tamanho da instância do problema.

# Problemas polinomiais

Análise de um algoritmo em determinado modelo de computação estima seu consumo de tempo e quantidade de espaço como função do tamanho da instância do problema.

Exemplo: o consumo de tempo do algoritmo EUCLIDES $(a, b)$ é expresso como uma função de $\langle a \rangle + \langle b \rangle$.

# Problemas polinomiais

Análise de um algoritmo em determinado modelo de computação estima seu consumo de tempo e quantidade de espaço como função do tamanho da instância do problema.

Exemplo: o consumo de tempo do algoritmo EUCLIDES $(a, b)$ é expresso como uma função de $\langle a \rangle + \langle b \rangle$.

Um problema é solúvel em tempo polinomial se existe um algoritmo que consome tempo $\mathrm{O}(\langle I \rangle^{\alpha})$ para resolver o problema, onde $\alpha$ é uma constante e $I$ é uma instância do problema.

# Exemplos

- Máximo divisor comum

  Tamanho da instância: $\lg a + \lg b$

  Consumo de tempo:

  Café-com-Leite é $O(b)$ (não-polinomial)

  Euclides é $O(\lg b)$ (polinomial)

# Exemplos

- Máximo divisor comum

  Tamanho da instância: $\lg a + \lg b$

  Consumo de tempo:

  Café-com-Leite é $O(b)$ (não-polinomial)

  Euclides é $O(\lg b)$ (polinomial)

- Subsequência comum máxima

  Tamanho da instância: $n + m$

  Consumo de tempo:

  REC-LCS-LENGTH é $\Omega(2^{\min\{m,n\}})$ (exponencial)

  LCS-LENGTH é $\Theta(mn)$ (polinomial)

# Mais exemplos

- Problema booleano da mochila

  Tamanho da instância: $\lg n + n \lg W + n \lg V + \lg W$

  Consumo de tempo:
  MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$ (não-polinomial).

# Mais exemplos

- Problema booleano da mochila

  Tamanho da instância: $\lg n + n \lg W + n \lg V + \lg W$

  Consumo de tempo:
  MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$ (não-polinomial).

- Problema fracionário da mochila

  Tamanho da instância: $\lg n + n \lg W + n \lg V + \lg W$

  Consumo de tempo:
  MOCHILA-FRACIONÁRIA é $\Theta(n \lg n)$ (polinomial).

# Mais exemplos

- Problema booleano da mochila

  Tamanho da instância: $\lg n + n \lg W + n \lg V + \lg W$

  Consumo de tempo:
  MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$ (não-polinomial).

- Problema fracionário da mochila

  Tamanho da instância: $\lg n + n \lg W + n \lg V + \lg W$

  Consumo de tempo:
  MOCHILA-FRACIONÁRIA é $\Theta(n \lg n)$ (polinomial).

- Ordenação de inteiros $A[1 \mathinner{.\,.} n]$

  Tamanho da instância: $n \lg M$, onde
  $M := \max\{|A[1]|, |A[2]|, \ldots, |A[n]|\} + 1$

  Consumo de tempo:
  MERGESORT é $\Theta(n \lg n)$ (polinomial).

# Classe P

Algoritmo polinomiais são uma abstração de algoritmos eficientes.

# Classe P

Algoritmo polinomiais são uma abstração de algoritmos eficientes.

Dava para ter outra?

# Classe P

Algoritmo polinomiais são uma abstração de algoritmos eficientes.

Dava para ter outra?

Seria interessante que a classe de *algoritmos eficientes* satisfizesse:

# Classe P

Algoritmo polinomiais são uma abstração de algoritmos eficientes.

Dava para ter outra?

Seria interessante que a classe de *algoritmos eficientes* satisfizesse:

- Suponha que um algoritmo $\mathcal{A}$ usa um algoritmo $\mathcal{B}$ como subrotina e, contando $\mathcal{B}$ como passo elementar $\mathcal{A}$ é relativamente eficiente. Então, se $\mathcal{B}$ é eficiente, $\mathcal{A}$ também é.

# Classe P

Algoritmo polinomiais são uma abstração de algoritmos eficientes.

Dava para ter outra?

Seria interessante que a classe de *algoritmos eficientes* satisfizesse:

- Suponha que um algoritmo $\mathcal{A}$ usa um algoritmo $\mathcal{B}$ como subrotina e, contando $\mathcal{B}$ como passo elementar $\mathcal{A}$ é relativamente eficiente. Então, se $\mathcal{B}$ é eficiente, $\mathcal{A}$ também é.
- Algoritmos lineares são eficientes.

# Classe P

Algoritmo polinomiais são uma abstração de algoritmos eficientes.

Dava para ter outra?

Seria interessante que a classe de *algoritmos eficientes* satisfizesse:

- Suponha que um algoritmo $\mathcal{A}$ usa um algoritmo $\mathcal{B}$ como subrotina e, contando $\mathcal{B}$ como passo elementar $\mathcal{A}$ é relativamente eficiente. Então, se $\mathcal{B}$ é eficiente, $\mathcal{A}$ também é.
- Algoritmos lineares são eficientes.

Isso leva à classe dos polinomiais como a menor que é *eficiente*.

# Classe P

Algoritmo polinomiais são uma abstração de algoritmos eficientes.

Dava para ter outra?

Seria interessante que a classe de *algoritmos eficientes* satisfizesse:

- Suponha que um algoritmo $\mathcal{A}$ usa um algoritmo $\mathcal{B}$ como subrotina e, contando $\mathcal{B}$ como passo elementar $\mathcal{A}$ é relativamente eficiente. Então, se $\mathcal{B}$ é eficiente, $\mathcal{A}$ também é.
- Algoritmos lineares são eficientes.

Isso leva à classe dos polinomiais como a menor que é *eficiente*.

Lucro: fazer transformações polinomiais nos dados "é permitido".

# Classe P

Algoritmo polinomiais são uma abstração de algoritmos eficientes.

# Classe P

Algoritmo polinomiais são uma abstração de algoritmos eficientes.

A classe de todos os problemas de decisão que podem ser resolvidos por algoritmos polinomiais é denotada por P (classe de complexidade).

# Classe P

Algoritmo polinomiais são uma abstração de algoritmos eficientes.

A classe de todos os problemas de decisão que podem ser resolvidos por algoritmos polinomiais é denotada por P (classe de complexidade).

Exemplo: As versões de decisão dos problemas:

> *máximo divisor comum, subsequência comum máxima e mochila fracionária*

estão em P.

# Classe P

Algoritmo polinomiais são uma abstração de algoritmos eficientes.

A classe de todos os problemas de decisão que podem ser resolvidos por algoritmos polinomiais é denotada por P (classe de complexidade).

Exemplo: As versões de decisão dos problemas:

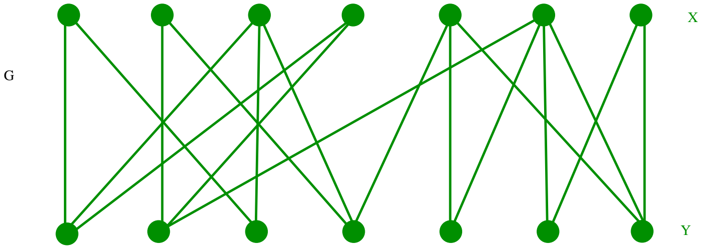
> *máximo divisor comum, subsequência comum máxima e mochila fracionária*

estão em P.

Para muitos problemas, não se conhece algoritmo essencialmente melhor que "testar todas as possibilidades". Em geral, isso não está em P.

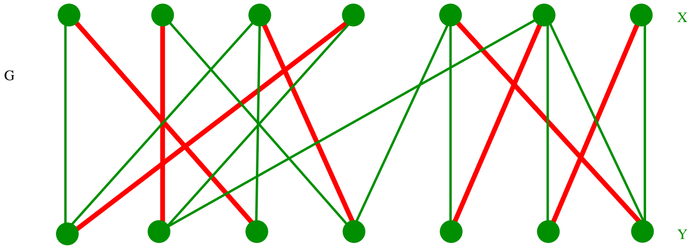
# Emparelhamentos

Problema: Dado um grafo bipartido, encontrar um emparelhamento perfeito.



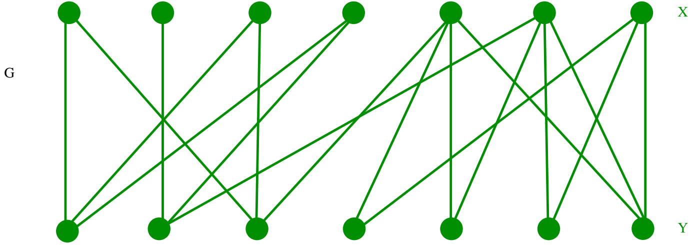
# Emparelhamentos

Problema: Dado um grafo bipartido, encontrar um emparelhamento perfeito.



# Emparelhamentos

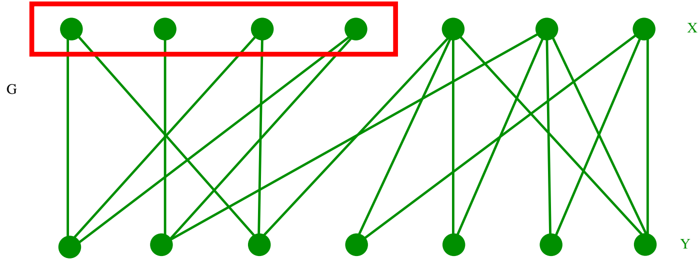
Problema: Dado um grafo bipartido, encontrar um emparelhamento perfeito.




NÃO existe! Certificado?

# Emparelhamentos

Problema: Dado um grafo bipartido, encontrar um emparelhamento bipartido.

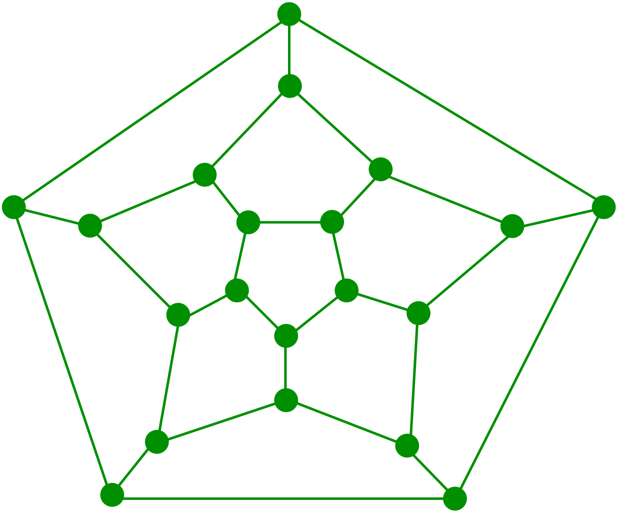



NÃO existe! Certificado: $S \subseteq X$ tal que $|S| > |\text{vizinhos}(S)|$.

# Grafos hamiltonianos

Problema: Dado um grafo, encontrar um ciclo hamiltoniano.

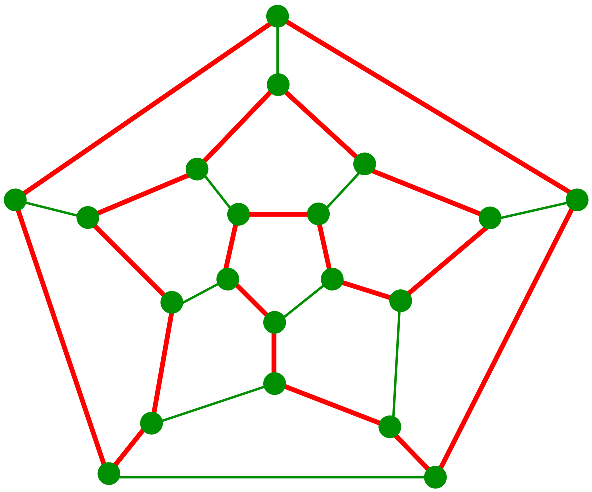
G



# Grafos hamiltonianos

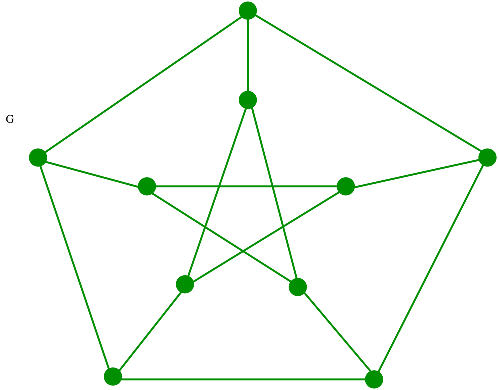
Problema: Dado um grafo, encontrar um ciclo hamiltoniano.

G



# Grafos hamiltonianos

Problema: Dado um grafo, encontrar um ciclo hamiltoniano.




NÃO existe! Certificado? Hmmm ...

# Verificador polinomial para SIM

Um verificador polinomial para a resposta SIM a um problema $\Pi$ é um algoritmo polinomial ALG que recebe

> *uma instância $I$ de $\Pi$ e um objeto $C$,*
> *tal que $\langle C \rangle$ é $\mathrm{O}(\langle I \rangle^{\alpha})$ para alguma constante $\alpha$*

# Verificador polinomial para SIM

Um verificador polinomial para a resposta SIM a um problema $\Pi$ é um algoritmo polinomial ALG que recebe

> *uma instância $I$ de $\Pi$ e um objeto $C$,*
> *tal que $\langle C \rangle$ é $\mathrm{O}(\langle I \rangle^{\alpha})$ para alguma constante $\alpha$*

e devolve

> SIM *para algum $C$ se a resposta a $\Pi(I)$ é* SIM*;*
> NÃO *para todo $C$ se a resposta a $\Pi(I)$ é* NÃO*.*

# Verificador polinomial para SIM

Um verificador polinomial para a resposta SIM a um problema $\Pi$ é um algoritmo polinomial ALG que recebe

> *uma instância $I$ de $\Pi$ e um objeto $C$,*
> *tal que $\langle C \rangle$ é $\mathrm{O}(\langle I \rangle^{\alpha})$ para alguma constante $\alpha$*

e devolve

> SIM *para algum $C$ se a resposta a $\Pi(I)$ é* SIM;
> NÃO *para todo $C$ se a resposta a $\Pi(I)$ é* NÃO.

No caso de resposta SIM, o objeto $C$ é dito um certificado polinomial ou certificado curto da resposta SIM a $\Pi(I)$.

# Exemplos

- Se $G$ é hamiltoniano, então um ciclo hamiltoniano de $G$ é um certificado polinomial:

  > *dados um grafo $G$ e $C$, pode-se verificar em tempo $\mathrm{O}(\langle G \rangle)$ se $C$ é um ciclo hamiltoniano.*

# Exemplos

- Se $G$ é hamiltoniano, então um ciclo hamiltoniano de $G$ é um certificado polinomial:

  *dados um grafo $G$ e $C$, pode-se verificar em tempo $\mathrm{O}(\langle G \rangle)$ se $C$ é um ciclo hamiltoniano.*

- se $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$ possuem uma ssco $\geq k$, então uma subsequência comum $Z[1\,..\,k]$ é um certificado polinomial:

  *dados $X[1\,..\,m], Y[1\,..\,n]$ e $Z[1\,..\,k]$, pode-se verificar em tempo $\mathrm{O}(m+n)$ se $Z$ é ssco de $X$ e $Y$.*

# Exemplos

- Se $G$ é hamiltoniano, então um ciclo hamiltoniano de $G$ é um certificado polinomial:

  *dados um grafo $G$ e $C$, pode-se verificar em tempo $\mathrm{O}(\langle G \rangle)$ se $C$ é um ciclo hamiltoniano.*

- se $X[1\,..\,m]$ e $Y[1\,..\,n]$ possuem uma ssco $\geq k$, então uma subsequência comum $Z[1\,..\,k]$ é um certificado polinomial:

  *dados $X[1\,..\,m]$, $Y[1\,..\,n]$ e $Z[1\,..\,k]$, pode-se verificar em tempo $\mathrm{O}(m+n)$ se $Z$ é ssco de $X$ e $Y$.*

- se $n$ é um número composto, então um divisor próprio $d > 1$ de $n$ é um certificado polinomial.

# Verificado polinomial para NÃO

Um verificador polinomial para a resposta NÃO de um problema $\Pi$ é um algoritmo polinomial ALG que recebe

> *uma instância $I$ de $\Pi$ e um objeto $C$,*
> *tal que $\langle C\rangle$ é $\mathrm{O}(\langle I\rangle^{\alpha})$ para alguma constante $\alpha$*

e devolve

> SIM *para algum $C$ se a resposta a $\Pi(I)$ é* NÃO*;*
> NÃO *para todo $C$ se a resposta a $\Pi(I)$ é* SIM.

No caso de resposta SIM, o objeto $C$ é dito um certificado polinomial ou certificado curto da resposta NÃO a $\Pi(I)$.

# Classe NP

Formada pelos problemas de decisão que possuem um verificador polinomial para a resposta SIM.

# Classe NP

Formada pelos problemas de decisão que possuem um verificador polinomial para a resposta SIM.

Em outras palavras, a classe NP é formada pelos problemas de decisão $\Pi$ para os quais existe um problema $\Pi'$ em P e uma função polinomial $p(n)$ tais que, para cada instância $I$ do problema $\Pi$, existe um objeto $C$ com $\langle C \rangle \leq p(\langle I \rangle)$ tal que

> *a resposta a* $\Pi(I)$ *é* SIM *se e somente se*
> *a resposta a* $\Pi'(I, C)$ *é* SIM.

# Classe NP

Formada pelos problemas de decisão que possuem um verificador polinomial para a resposta SIM.

Em outras palavras, a classe NP é formada pelos problemas de decisão $\Pi$ para os quais existe um problema $\Pi'$ em P e uma função polinomial $p(n)$ tais que, para cada instância $I$ do problema $\Pi$, existe um objeto $C$ com $\langle C \rangle \leq p(\langle I \rangle)$ tal que

> *a resposta a* $\Pi(I)$ *é* SIM *se e somente se*
> *a resposta a* $\Pi'(I, C)$ *é* SIM.

O objeto $C$ é dito um certificado polinomial ou certificado curto da resposta SIM a $\Pi(I)$.

# Exemplos

Problemas de decisão com certificado polinomial para SIM:

- existe subsequência crescente $\geq k$?
- existe subcoleção disjunta $\geq k$ de intervalos?
- existe mochila booleana de valor $\geq k$?
- existe mochila de valor $\geq k$?
- existe subsequência comum $\geq k$?
- grafo tem ciclo de comprimento $\geq k$?
- grafo tem ciclo hamiltoniano?
- grafo tem emparelhamento (casamento) perfeito?

Todos esses problemas estão em NP.

# $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$

Prova:

se $\Pi$ é um problema em P, então pode-se tomar a sequência de instruções realizadas por um algoritmo polinomial para resolver $\Pi(I)$ como certificado polinomial da resposta SIM a $\Pi(I)$.

# $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$

Prova:

se $\Pi$ é um problema em P, então pode-se tomar a sequência de instruções realizadas por um algoritmo polinomial para resolver $\Pi(I)$ como certificado polinomial da resposta SIM a $\Pi(I)$.

Outra prova:

Pode-se construir um verificador polinomial para a resposta SIM a $\Pi$ utilizando-se um algoritmo polinomial para $\Pi$ como subrotina e ignorando-se o certificado $C$.

# $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$?

É crença de muitos que a classe NP é maior que a classe P, ainda que isso

> *não tenha sido provado até agora.*

# $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$?

É crença de muitos que a classe NP é maior que a classe P, ainda que isso

*não tenha sido provado até agora.*

Este é o intrigante problema matemático conhecido pelo rótulo "$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$?"

# $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$?

É crença de muitos que a classe NP é maior que a classe P, ainda que isso

> *não tenha sido provado até agora.*

Este é o intrigante problema matemático conhecido pelo rótulo "P ≠ NP?"

Não confunda NP com "não-polinomial".

# A solução óbvia

Todos que tomam conhecimento desse problema pela primeira vez aparecem com a solução

$$N = 1$$

# A solução óbvia

Todos que tomam conhecimento desse problema pela primeira vez aparecem com a solução

$$N = 1$$

Não é considerada muito original:

# A solução óbvia

TODOS que tomam conhecimento desse problema pela primeira vez aparecem com a solução

$$N = 1$$

Não é considerada muito original:

A primeira ocorrência disto apareceu no rascunho da bíblia.

# Classe co-NP

A classe co-NP é definida trocando-se SIM por NÃO na definição de NP.

# Classe co-NP

A classe co-NP é definida trocando-se SIM por NÃO na definição de NP.

Um problema de decisão $\Pi$ está em co-NP se admite um certificado polinomial para a resposta NÃO.

# Classe co-NP

A classe co-NP é definida trocando-se SIM por NÃO na definição de NP.

Um problema de decisão $\Pi$ está em co-NP se admite um certificado polinomial para a resposta NÃO.

Os problemas em NP $\cap$ co-NP admitem certificados polinomiais para as respostas SIM e NÃO.

# Classe co-NP

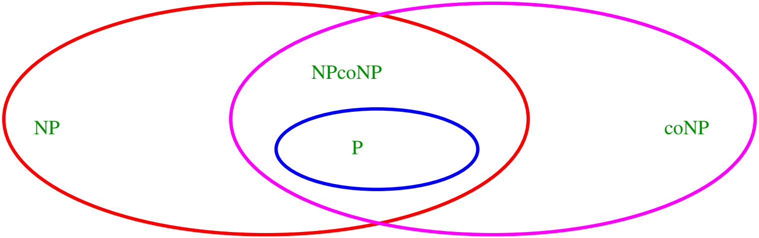
A classe co-NP é definida trocando-se SIM por NÃO na definição de NP.

Um problema de decisão $\Pi$ está em co-NP se admite um certificado polinomial para a resposta NÃO.

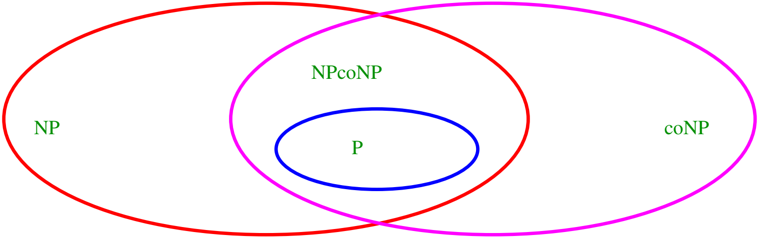
Os problemas em $\mathrm{NP} \cap \text{co-NP}$ admitem certificados polinomiais para as respostas SIM e NÃO.

Em particular, $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \cap \text{co-NP}$.

# P, NP e co-NP



# P, NP e co-NP




P $\neq$ NP?

NP $\cap$ co-NP $\neq$ P?

NP $\neq$ co-NP?