

MAC 5711 - Análise de Algoritmos

Departamento de Ciência da Computação

Segundo semestre de 2017

Lista 7

1. Seja s um vértice de um digrafo G com custos positivos nos arcos. Para cada vértice v de G , seja $v.x$ o custo de *algum* caminho de s a v em G . Escreva um algoritmo eficiente que verifique se $v.x$, para todo v , é a distância de s a v em G . Explique porque seu algoritmo está correto.
2. Mostre que o algoritmo de Dijkstra pode produzir resultados errados se o digrafo tiver arcos de custo estritamente negativo.
3. Escreva um algoritmo que recebe conjuntos S e T de vértices de um grafo e calcula a distância de S a T , ou seja, o custo de um caminho de custo mínimo que começa em algum vértice em S e termina em algum vértice em T . O algoritmo deve consumir o mesmo tempo de execução que o algoritmo de Dijkstra. Justifique que seu algoritmo está correto. *Dica:* Basta introduzir pequenas modificações no algoritmo de Dijkstra.
4. Escreva um algoritmo que encontre um arco cuja remoção causa o maior aumento na distância de um vértice s a um vértice t .
5. Suponha que trocamos a linha 4 do algoritmo do Dijkstra como segue

4. while $|Q| > 1$

Isso faz com que a execução do laço execute $|V| - 1$ vezes no lugar de $|V|$ vezes. Será que o algoritmo continua correto?

6. Dado um digrafo $G = (V, E)$ em que cada aresta $(u, v) \in E$ tem associado um valor $r(u, v)$, que é um número real no intervalo $[0, 1]$ que representa a confiança de um canal de comunicação do vértice u até o vértice v . Interpretamos $r(u, v)$ como a probabilidade de que o canal de u a v não falhe, e supomos que tais probabilidades são independentes. Dê um algoritmo eficiente (mesmo tempo de execução que o de Dijkstra) que acha um caminho mais confiável entre dois vértices dados.
7. Seja $G = (V, E)$ um digrafo com pesos $w : E \rightarrow \{0, 1, \dots, W\}$ para algum W . Modifique o algoritmo de Dijkstra para que compute os caminhos mínimos a partir de um vértice s em tempo $O(W|V| + |E|)$.
8. Seja $G = (V, E)$ um digrafo com pesos inteiros $w : E \rightarrow \{0, 1, \dots, W\}$ para algum W . Modifique o algoritmo de Dijkstra para que compute os caminhos mínimos a partir de um vértice s em tempo $O((|V| + |E|) \lg W)$. (*Dica:* Quantas estimativas distintas de caminhos mínimos podem existir em $V - S$ em cada iteração do algoritmo?)
9. **(CRLS Ex. 23.1-1)** Seja e uma aresta de custo mínimo em um grafo G com custos nas arestas. É verdade que e pertence a alguma MST de G ? É verdade que e pertence a toda MST de G ?
10. Suponha que os custos das arestas de um grafo conexo são distintos dois a dois (ou seja, não há duas arestas com o mesmo custo). Mostre que o grafo tem uma única MST.
11. Suponha que os custos das arestas de um grafo conexo são distintos dois a dois. Seja C um ciclo não trivial. É verdade que a aresta de custo mínimo em C pertence à (única) MST do grafo?
12. **(CRLS Ex. 23.1-2)** Prove ou desprove a seguinte afirmação: Dado um grafo G com pesos nas arestas, um conjunto de arestas A de G , e um corte que respeita A , toda aresta que cruza o corte e que é segura para A tem peso mínimo dentre todas as arestas desse corte.

13. **(CRLS Ex. 23.1-3)** Prove ou desprove a seguinte afirmação: Se uma aresta está contida em alguma MST, então tem peso mínimo dentre todas as arestas de algum corte no grafo.
14. **(CRLS Ex. 23.1-7)** Prove que se todos os pesos nas arestas são positivos, então qualquer subconjunto de arestas que conectam todos os vértices e tem peso total mínimo forma uma árvore. A propriedade vale se alguns pesos são negativos?
15. Seja T uma MST de um grafo com pesos positivos e distintos nas arestas. Suponha que substituimos cada peso pelo seu quadrado. Verdadeiro ou falso: T ainda é uma MST para o novo grafo.
16. Dado um grafo conexo G , dizemos que duas árvores geradoras T e T' são vizinhas se T contém exatamente uma aresta que não está em T' , e T' contém exatamente uma aresta que não está em T . Vamos construir um novo grafo (muito grande) \mathcal{H} como segue. Os vértices de \mathcal{H} são as MSTs de G , e existe uma aresta entre dois vértices em \mathcal{H} se os correspondentes MSTs são vizinhas. É verdade que \mathcal{H} é sempre conexo? Prove ou dê um contra-exemplo.
17. Seja G um grafo conexo com custos nas arestas. Uma aresta e de G é crítica se o aumento do custo de e faz com que o custo de uma MST de G também aumente. Escreva uma função que determine todas as arestas críticas de G em tempo $O(m \log n)$.
18. Mostre que depois de cada execução da linha 6 do algoritmo de Prim tem-se $u.key < \infty$.
19. Suponha que temos um grafo G com pesos nas arestas. Verdadeiro ou falso: Para qualquer MST T de G , existe uma execução válida do algoritmo de Kruskal que produz T como saída? Dê uma prova ou um contra-exemplo.
20. Seja G um grafo conexo com custos nas arestas e seja B um conjunto de arestas de G . Suponha que o grafo induzido por B não tem circuitos. Queremos encontrar uma subárvore geradora de custo mínimo dentre as que contêm B . Descreva um algoritmo eficiente para resolver o problema.
21. **(CRLS Ex. 23.2-4,5)** Suponha que todos os pesos num grafo com n vértices são inteiros no intervalo de 1 até n . Descreva como otimizar os algoritmos de Kruskal e Prim nesta situação. O que acontece se os pesos são inteiros no intervalo de 1 até W ?
22. Dado um grafo com n vértices, pesos distintos nas arestas, e no máximo $n + 8$ arestas, dê um algoritmo com complexidade $O(n)$ para achar uma MST.