Introdução

CLRS 1.1, 1.2, 2.1 e 2.2
AU 3.3, 3.4 e 3.6

Ordenação

$A[1\,..\,n]$ é crescente se $A[1] \le \cdots \le A[n]$.

Problema: Rearranjar um vetor $A[1\,..\,n]$ de modo que ele fique crescente.

Entra:

1										n
33	55	33	44	33	22	11	99	22	55	77

Ordenação

$A[1\,..\,n]$ é crescente se $A[1] \leq \cdots \leq A[n]$.

Problema: Rearranjar um vetor $A[1\,..\,n]$ de modo que ele fique crescente.

Entra:

1										n
33	55	33	44	33	22	11	99	22	55	77

Sai:

1										n
11	22	22	33	33	33	44	55	55	77	99

Ordenação por inserção

$chave = 38$

1						j				n
20	25	35	40	44	55	38	99	10	65	50

Ordenação por inserção

$chave = 38$

1					i	j				n
20	25	35	40	44	55	38	99	10	65	50

Ordenação por inserção

$chave = 38$

1					i	j				n
20	25	35	40	44	55	38	99	10	65	50

1				i		j				n
20	25	35	40	44		55	99	10	65	50

Ordenação por inserção

$chave = 38$

1					i	j				n
20	25	35	40	44	55	38	99	10	65	50

1				i		j				n
20	25	35	40	44		55	99	10	65	50

1			i			j				n
20	25	35	40		44	55	99	10	65	50

Ordenação por inserção

$chave = 38$

1					i	j				n
20	25	35	40	44	55	38	99	10	65	50

1				i		j				n
20	25	35	40	44		55	99	10	65	50

1			i			j				n
20	25	35	40		44	55	99	10	65	50

1		i				j				n
20	25	35		40	44	55	99	10	65	50

Ordenação por inserção

$chave = 38$

1					i	j				n
20	25	35	40	44	55	38	99	10	65	50

1				i		j				n
20	25	35	40	44		55	99	10	65	50

1			i			j				n
20	25	35	40		44	55	99	10	65	50

1		i				j				n
20	25	35		40	44	55	99	10	65	50

1		i				j				n
20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

Ordenação por inserção

chave	1							*j*			*n*
99	20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

Ordenação por inserção

chave	1						*j*			*n*
99	20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

Ordenação por inserção

chave	1							*j*			*n*
99	20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

chave	1								*j*		*n*
10	20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

Ordenação por inserção

chave	1							*j*			*n*
99	20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

chave	1								*j*		*n*
10	10	20	25	35	38	40	44	55	99	65	50

Ordenação por inserção

chave	1							j			n
99	20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

chave	1								j		n
10	10	20	25	35	38	40	44	55	99	65	50

chave	1									j	n
65	10	20	25	35	38	40	44	55	99	65	50

Ordenação por inserção

chave	1							j			n
99	20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

chave	1								j		n
10	10	20	25	35	38	40	44	55	99	65	50

chave	1									j	n
65	10	20	25	35	38	40	44	55	65	99	50

Ordenação por inserção

chave	1							j			n
99	20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

chave	1								j		n
10	10	20	25	35	38	40	44	55	99	65	50

chave	1									j	n
65	10	20	25	35	38	40	44	55	65	99	50

chave	1										j
50	10	20	25	35	38	40	44	55	65	99	50

Ordenação por inserção

chave 99

	1							*j*			*n*
99	20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

chave 10

	1								*j*		*n*
10	10	20	25	35	38	40	44	55	99	65	50

chave 65

	1									*j*	*n*
65	10	20	25	35	38	40	44	55	65	99	50

chave 50

	1										*j*
50	10	20	25	35	38	40	44	50	55	65	99

Ordenação por inserção

Algoritmo rearranja $A[1\,..\,n]$ em ordem crescente.

```
ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)
para j ← 2 até n faça
    chave ← A[j]

    i ← j − 1
    enquanto i ≥ 1 e A[i] > chave faça
        A[i + 1] ← A[i]      ▷ desloca
        i ← i − 1

    A[i + 1] ← chave      ▷ insere
```

Ordenação por inserção

Algoritmo rearranja $A[1\,..\,n]$ em ordem crescente

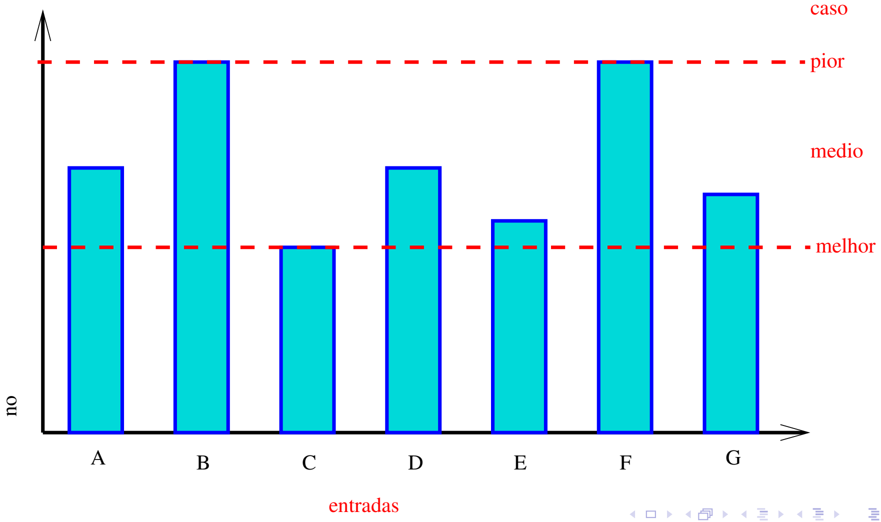
```
ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)
j ← 2
enquanto j ≤ n faça
    chave ← A[j]

    i ← j − 1
    enquanto i ≥ 1 e A[i] > chave faça
        A[i + 1] ← A[i]      ▷ desloca
        i ← i − 1

    A[i + 1] ← chave      ▷ insere
    j ← j + 1
```

Quantas atribuições ($\leftarrow$) algoritmo faz?

Quantas atribuições (←) algoritmo faz?

Número mínimo, médio ou máximo?

Melhor caso, caso médio, pior caso?



Quantas atribuições ($\leftarrow$) algoritmo faz?

LINHAS 3–6 $(A, j, chave)$

```
3    i ← j − 1          ▷ 2 ≤ j ≤ n
4    enquanto i ≥ 1 e A[i] > chave faça
5        A[i + 1] ← A[i]
6        i ← i − 1
```

linha	atribuições (número máximo)
3	?
4	?
5	?
6	?

total ?

Quantas atribuições ($\leftarrow$) algoritmo faz?

LINHAS 3–6 $(A, j, chave)$

```
3   i ← j − 1                  ▷ 2 ≤ j ≤ n
4   enquanto i ≥ 1 e A[i] > chave faça
5       A[i + 1] ← A[i]
6       i ← i − 1
```

linha	atribuições (número máximo)
3	= 1
4	= 0
5	?
6	?

total ?

Quantas atribuições (←) algoritmo faz?

LINHAS 3–6 $(A, j, chave)$

3 $\quad i \leftarrow j-1 \qquad \triangleright\ 2 \leq j \leq n$

4 $\quad$ **enquanto** $i \geq 1$ **e** $A[i] > chave$ **faça**

5 $\qquad A[i+1] \leftarrow A[i]$

6 $\qquad i \leftarrow i-1$

linha	atribuições (número máximo)
3	$= \ 1$
4	$= \ 0$
5	$\leq \ j-1$
6	?

total ?

Quantas atribuições ($\leftarrow$) algoritmo faz?

LINHAS 3–6 $(A, j, chave)$

```
3    i ← j − 1                  ▷ 2 ≤ j ≤ n
4    enquanto i ≥ 1 e A[i] > chave faça
5        A[i + 1] ← A[i]
6        i ← i − 1
```

linha	atribuições (número máximo)
3	$= 1$
4	$= 0$
5	$\leq j - 1$
6	$\leq j - 1$

total $\leq 2j - 1 \leq 2n - 1$

Quantas atribuições ($\leftarrow$) algoritmo faz?

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

1 **para** $j \leftarrow 2$ **até** n **faça** $\triangleright$ $j \leftarrow j + 1$ escondido
2 $\quad$ $chave \leftarrow A[j]$
3 $\quad$ LINHAS 3–6 $(A, j, chave)$
7 $\quad$ $A[i+1] \leftarrow chave$

linha	atribuições (número máximo)
1	?
2	?
3–6	?
7	?
total	?

Quantas atribuições ($\leftarrow$) algoritmo faz?

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

```
1   para j ← 2 até n faça      ▷ j ← j + 1 escondido
2       chave ← A[j]
3       LINHAS 3–6 (A, j, chave)
7       A[i + 1] ← chave
```

linha	atribuições (número máximo)
1	$= n - 1 + 1$
2	$= n - 1$
3–6	$\leq (n-1)(2n-1)$
7	$= n - 1$

total $\leq 2n^2 - 1$

Análise mais fina

linha	atribuições (número máximo)
1	$= n-1+1$
2	$= n-1$
3-6	$\leq 3+5+\cdots+(2n-1) = (n+1)(n-1) = n^2-1$
7	$= n-1$

total $\leq n^2+3n-3$

$n^2 + 3n - 3$ **versus** n^2

n	$n^2 + 3n - 3$	n^2
1	1	1
2	7	4

$n^2 + 3n - 3$ **versus** n^2

n	$n^2 + 3n - 3$	n^2
1	1	1
2	7	4
3	15	9
10	127	100

$n^2 + 3n - 3$ **versus** n^2

n	$n^2 + 3n - 3$	n^2
1	1	1
2	7	4
3	15	9
10	127	100
100	10297	10000
1000	1002997	1000000

$n^2 + 3n - 3$ **versus** n^2

n	$n^2 + 3n - 3$	n^2
1	1	1
2	7	4
3	15	9
10	127	100
100	10297	10000
1000	1002997	1000000
10000	100029997	100000000
100000	10000299997	10000000000

n^2 domina os outros termos

Exercício 1.B

Se a execução de cada linha de código consome
1 unidade de tempo, qual o consumo total?

```
ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)
para j ← 2 até n faça
      chave ← A[j]

      i ← j − 1
      enquanto i ≥ 1 e A[i] > chave faça
            A[i + 1] ← A[i]      ▷ desloca
            i ← i − 1

      A[i + 1] ← chave      ▷ insere
```

Solução

linha	todas as execuções da linha	
1	$=$	n
2	$=$	$n-1$
3	$=$	$n-1$
4	$\leq$	$2+3+\cdots+n \ = \ (n-1)(n+2)/2$
5	$\leq$	$1+2+\cdots+(n-1) \ = \ n(n-1)/2$
6	$\leq$	$1+2+\cdots+(n-1) \ = \ n(n-1)/2$
7	$=$	$n-1$
total	$\leq$	$(3/2)n^2+(7/2)n-4$

Exercício 1.C

Se a execução da linha i consome t_i unidades de tempo, para $i = 1, \ldots, 7$, qual o consumo total?

ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)

```
1   para j ← 2 até n faça
2       chave ← A[j]

3       i ← j − 1
4       enquanto i ≥ 1 e A[i] > chave faça
5           A[i + 1] ← A[i]      ▷ desloca
6           i ← i − 1

7       A[i + 1] ← chave      ▷ insere
```

Solução para $t_i = 1$

linha	todas as execuções da linha	
1	$=$	n
2	$=$	$n-1$
3	$=$	$n-1$
4	$\leq$	$2+3+\cdots+n \;=\; (n-1)(n+2)/2$
5	$\leq$	$1+2+\cdots+(n-1) \;=\; n(n-1)/2$
6	$\leq$	$1+2+\cdots+(n-1) \;=\; n(n-1)/2$
7	$=$	$n-1$
total	$\leq$	$(3/2)n^2+(7/2)n-4$

Solução

linha	todas as execuções da linha		
1	$=$	n	$\times t_1$
2	$=$	$n-1$	$\times t_2$
3	$=$	$n-1$	$\times t_3$
4	$\leq$	$2+3+\cdots+n \;=\; (n-1)(n+2)/2$	$\times t_4$
5	$\leq$	$1+2+\cdots+(n-1) \;=\; n(n-1)/2$	$\times t_5$
6	$\leq$	$1+2+\cdots+(n-1) \;=\; n(n-1)/2$	$\times t_6$
7	$=$	$n-1$	$\times t_7$
total	$\leq$	?	

Solução

linha	todas as execuções da linha		
1	$=$	n	$\times t_1$
2	$=$	$n-1$	$\times t_2$
3	$=$	$n-1$	$\times t_3$
4	$\leq$	$2+3+\cdots+n \;=\; (n-1)(n+2)/2$	$\times t_4$
5	$\leq$	$1+2+\cdots+(n-1) \;=\; n(n-1)/2$	$\times t_5$
6	$\leq$	$1+2+\cdots+(n-1) \;=\; n(n-1)/2$	$\times t_6$
7	$=$	$n-1$	$\times t_7$

$$
\begin{array}{lll}
\text{total} & \leq & ((t_4+t_5+t_6)/2)\times n^2 \\
 & + & (t_1+t_2+t_3+t_4/2-t_5/2-t_6/2+t_7)\times n \\
 & - & (t_2+t_3+t_4+t_7)
\end{array}
$$

Solução

linha	todas as execuções da linha		
1	$=$	n	$\times t_1$
2	$=$	$n-1$	$\times t_2$
3	$=$	$n-1$	$\times t_3$
4	$\leq$	$2+3+\cdots+n \;=\; (n-1)(n+2)/2$	$\times t_4$
5	$\leq$	$1+2+\cdots+(n-1) \;=\; n(n-1)/2$	$\times t_5$
6	$\leq$	$1+2+\cdots+(n-1) \;=\; n(n-1)/2$	$\times t_6$
7	$=$	$n-1$	$\times t_7$
total	$\leq$	$c_2 \times n^2 + c_1 \times n + c_0$	

c_2, c_1, c_0 são constantes que dependem da máquina.

n^2 é para sempre! Está nas entranhas do algoritmo!

Notação O

Intuitivamente...

$\mathrm{O}(f(n)) \approx$ funções que não crescem mais rápido que $f(n)$

$\approx$ funções menores ou iguais a um múltiplo de $f(n)$

n^2 $\quad (3/2)n^2 \quad 9999n^2 \quad n^2/1000 \quad$ etc.

crescem todas com a mesma velocidade

Notação O

Intuitivamente...

$\mathrm{O}(f(n))$ $\approx$ funções que não crescem mais rápido que $f(n)$

$\approx$ funções menores ou iguais a um múltiplo de $f(n)$

n^2 $\quad (3/2)n^2$ $\quad 9999n^2$ $\quad n^2/1000$ $\quad$ etc.

crescem todas com a mesma velocidade

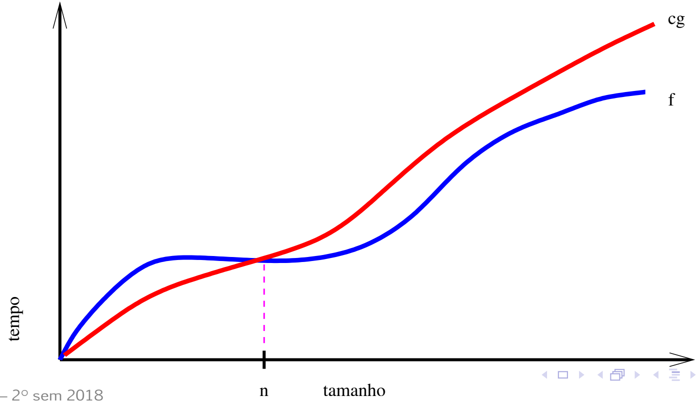
- $n^2 + 99n$ é $\mathrm{O}(n^2)$
- $33n^2$ é $\mathrm{O}(n^2)$
- $9n + 2$ é $\mathrm{O}(n^2)$
- $0{,}00001n^3 - 200n^2$ não é $\mathrm{O}(n^2)$

Definição

Sejam $T(n)$ e $f(n)$ funções dos inteiros nos reais.
Dizemos que $T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ se existem constantes positivas c e n_0 tais que

$$T(n) \leq c\,f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

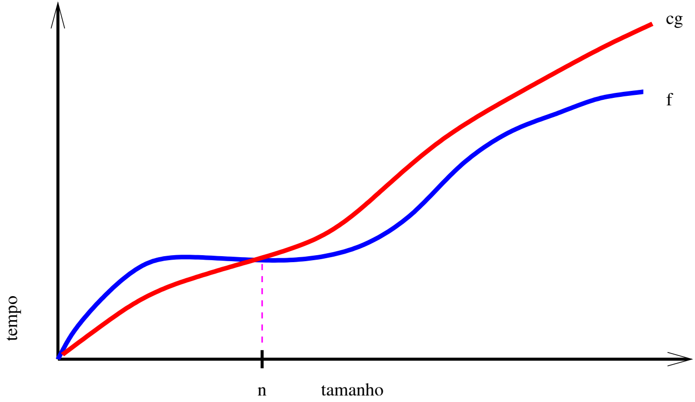


Mais informal

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ se existe $c > 0$ tal que

$$T(n) \le c\,f(n)$$

para todo n suficientemente GRANDE.



Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplo 1

$10n^2$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplo 1

$10n^2$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 0$, temos que $0 \leq 10n^2 \leq 10\,n^3$.

Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplo 1

$10n^2$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 0$, temos que $0 \leq 10n^2 \leq 10\, n^3$.

Outra prova: Para $n \geq 10$, temos $0 \leq 10n^2 \leq n \times n^2 = 1\, n^3$.

Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplo 1

$10n^2$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 0$, temos que $0 \leq 10n^2 \leq 10\, n^3$.

Outra prova: Para $n \geq 10$, temos $0 \leq 10n^2 \leq n \times n^2 = 1\, n^3$.

Exemplo 2

$\lg n$ é $\mathrm{O}(n)$.

Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplo 1

$10n^2$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 0$, temos que $0 \leq 10n^2 \leq 10\, n^3$.

Outra prova: Para $n \geq 10$, temos $0 \leq 10n^2 \leq n \times n^2 = 1\, n^3$.

Exemplo 2

$\lg n$ é $\mathrm{O}(n)$.

Prova: Para $n \geq 1$, tem-se que $\lg n \leq 1\, n$.

Mais exemplos

Exemplo 3

$20n^3 + 10n \lg n + 5$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Mais exemplos

Exemplo 3

$20n^3 + 10n\lg n + 5$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 1$, tem-se que

$$20n^3 + 10n\lg n + 5 \leq 20n^3 + 10n^3 + 5n^3 = 35\,n^3.$$

Mais exemplos

Exemplo 3

$20n^3 + 10n \lg n + 5$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 1$, tem-se que

$$20n^3 + 10n \lg n + 5 \leq 20n^3 + 10n^3 + 5n^3 = 35\, n^3.$$

Outra prova: Para $n \geq 10$, tem-se que

$$20n^3 + 10n \lg n + 5 \leq 20n^3 + n\, n \lg n + n \leq 20n^3 + n^3 + n^3 = 22\, n^3.$$

Uso da notação O

$\mathrm{O}(f(n)) = \{T(n) : \text{existem } c \text{ e } n_0 \text{ tq } T(n) \leq cf(n), n \geq n_0\}$

"$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$" deve ser entendido como "$T(n) \in \mathrm{O}(f(n))$".

"$T(n) = \mathrm{O}(f(n))$" deve ser entendido como "$T(n) \in \mathrm{O}(f(n))$".

"$T(n) \leq \mathrm{O}(f(n))$" é feio.

"$T(n) \geq \mathrm{O}(f(n))$" não faz sentido!

"$T(n)$ é $g(n) + \mathrm{O}(f(n))$" significa que existe constantes positivas c e n_0 tais que

$$T(n) \leq g(n) + c\,f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

Nomes de classes O

classe	nome
$\mathrm{O}(1)$	constante
$\mathrm{O}(\lg n)$	logarítmica
$\mathrm{O}(n)$	linear
$\mathrm{O}(n \lg n)$	$n \log n$
$\mathrm{O}(n^2)$	quadrática
$\mathrm{O}(n^3)$	cúbica
$\mathrm{O}(n^k)$ com $k \geq 1$	polinomial
$\mathrm{O}(2^n)$	exponencial
$\mathrm{O}(a^n)$ com $a > 1$	exponencial