Análise de Algoritmos

CLRS 3.1 e 3.2

Notação O

Intuitivamente...

$O(f(n))$ $\approx$ funções que não crescem mais rápido que $f(n)$

$\approx$ funções menores ou iguais a um múltiplo de $f(n)$

n^2 $(3/2)n^2$ $9999n^2$ $n^2/1000$ etc.

crescem todas com a mesma velocidade

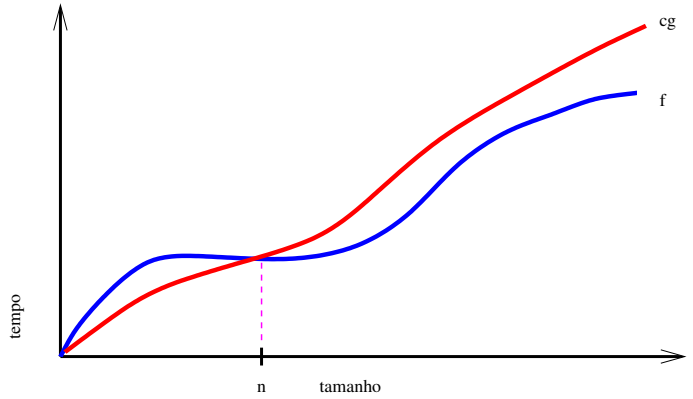
- $n^2 + 99n$ é $O(n^2)$
- $33n^2$ é $O(n^2)$
- $9n + 2$ é $O(n^2)$
- $0{,}00001n^3 - 200n^2$ não é $O(n^2)$

Definição

Sejam $T(n)$ e $f(n)$ funções dos inteiros nos reais.
Dizemos que $T(n)$ é $O(f(n))$ se existem constantes positivas c e n_0 tais que

$$T(n) \leq c\, f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

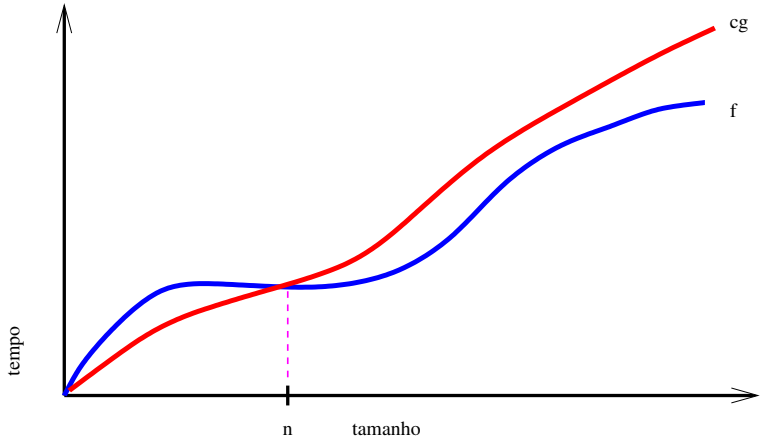


Mais informal

$T(n)$ é $O(f(n))$ se existe $c > 0$ tal que

$$T(n) \leq c\, f(n)$$

para todo n suficientemente GRANDE.



Ordenação por inserção

```
ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)
1  para j ← 2 até n faça
2      chave ← A[j]      i ← j − 1
3      enquanto i ≥ 1 e A[i] > chave faça
4          A[i + 1] ← A[i]    ▷ desloca
5          i ← i − 1
6      A[i + 1] ← chave    ▷ insere
```

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	?
2	?
3	?
4	?
5	?
6	?
total	?

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$O(n)$
2	$O(n)$
3	$O(n^2)$
4	$O(n^2)$
5	$O(n^2)$

Conclusão

O algoritmo ORDENA-POR-INSERÇÃO consome $O(n^2)$ unidades de tempo.

Também escreve-se

O algoritmo ORDENA-POR-INSERÇÃO consome tempo $O(n^2)$.

Cuidado 1

Algo que não foi mencionado:

> *Quais são as instâncias do problema, ou seja, quais são os dados a que o algoritmo será aplicado.*

A análise de ORDENA-POR-INSERÇÃO considerou implicitamente todos os vetores possíveis como entrada. É o que se faz, normalmente.

Mas, se aplicarmos esse algoritmo só a vetores em que cada elemento está no máximo 10 posições distante da posição certa, teremos que o **enquanto** roda no máximo 10 vezes para cada j,

e o tempo fica $O(n)$.

E o T(n)?

Para um dado algoritmo $\mathcal{A}$ e uma dada coleção de instâncias $\mathcal{I}$,

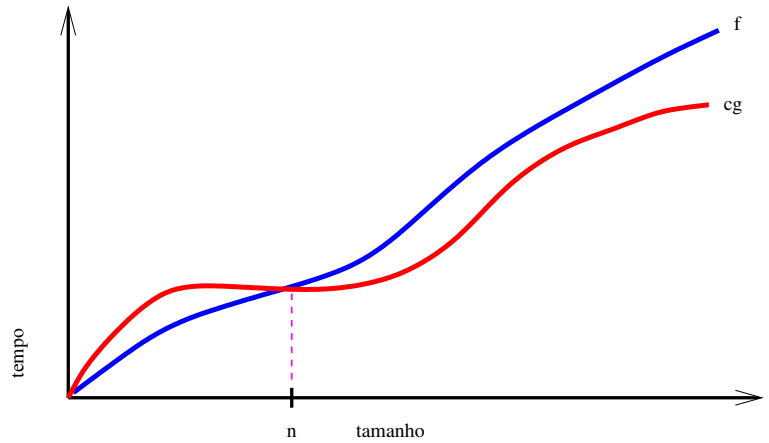
$T(n)$ = tempo máximo que $\mathcal{A}$ gasta entre todas instâncias de tamanho $\leq n$ em $\mathcal{I}$

Notação Omega

Dizemos que $T(n)$ é $\Omega(f(n))$ se existem constantes positivas c e n_0 tais que

$$c\,f(n) \;\leq\; T(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

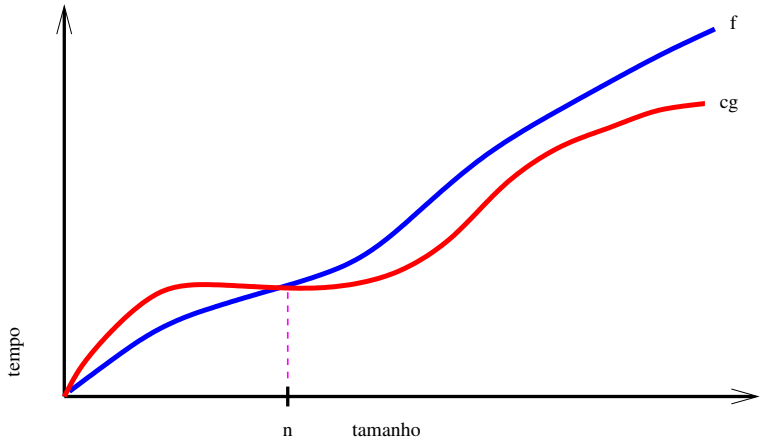


Mais informal

$T(n) = \Omega(f(n))$ se existe $c > 0$ tal que

$$c\,f(n) \leq T(n)$$

para todo n suficientemente GRANDE.



Exemplos

Exemplo 1
Se $T(n) \geq 0.001n^2$ para todo $n \geq 8$, então $T(n)$ é $\Omega(n^2)$.

Prova: Aplique a definição com $c = 0.001$ e $n_0 = 8$.

Exemplo 2

O consumo de tempo do ORDENA-POR-INSERÇÃO é $O(n^2)$ e é $\Omega(n)$.

```
ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)
1  para j ← 2 até n faça
2      chave ← A[j]
3      i ← j − 1
4      enquanto i ≥ 1 e A[i] > chave faça
5          A[i + 1] ← A[i]    ▷ desloca
6          i ← i − 1
7      A[i + 1] ← chave    ▷ insere
```

linha	todas as execuções da linha	
1	=	n
2-3	=	$n-1$
4	≥	$n-1$
5-6	≥	0

Cuidado 2

O exemplo anterior concentra a análise nos dados bons para o algoritmo.

Não dá uma boa idéia da ruindade do algoritmo.

Para isso, às vezes é preciso se concentrar numa coleção de entradas ruins.

No caso do ORDENA-POR-INSERÇÃO, podemos considerar só os vetores que entram revertidos. Em cada um deles, o tempo gasto é $\geq cn^2$.

Ω no pior caso

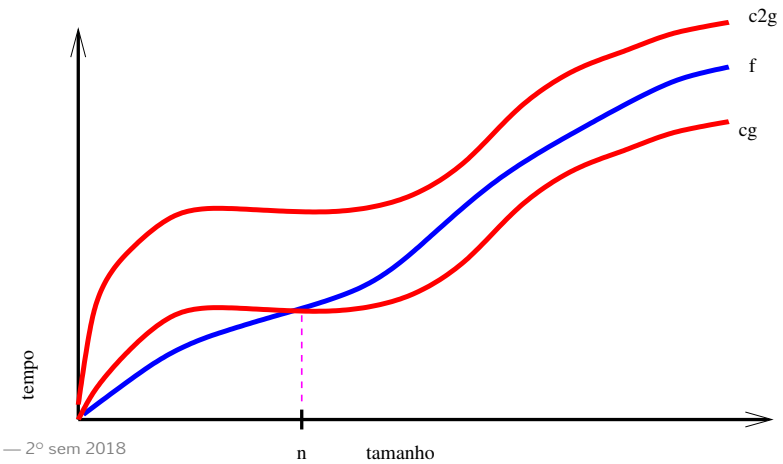
Um algoritmo é $\Omega(f(n))$ no pior caso se existe uma coleção de instâncias tal que o tempo $T(n)$ para essas instâncias satisfaz

$$T(n) = \Omega(f(n)).$$

Notação Theta

Sejam $T(n)$ e $f(n)$ funções dos inteiros no reais.
Dizemos que $T(n)$ é $\Theta(f(n))$ se

$T(n)$ é $O(f(n))$ e $T(n)$ é $\Omega(f(n))$.

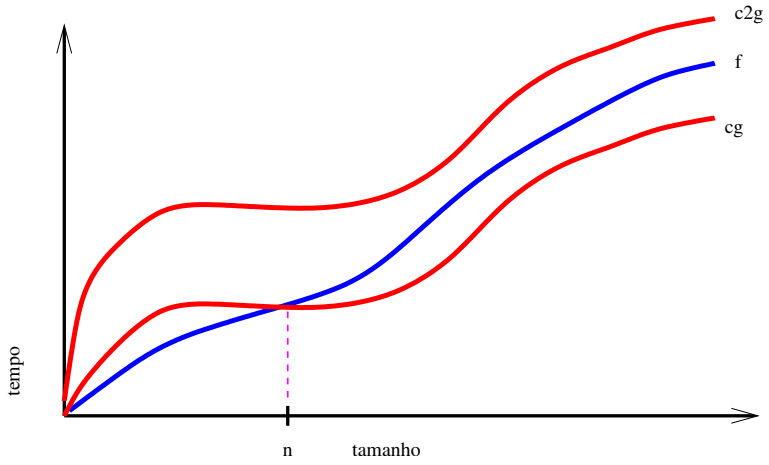


Notação Theta

Dizemos que $T(n)$ é $\Theta(f(n))$ se se existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que

$$c_1 f(n) \leq T(n) \leq c_2 f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.



Intuitivamente

Comparação assintótica, ou seja, para n ENORME.

comparação	comparação assintótica
$T(n) \leq f(n)$	$T(n)$ é $O(f(n))$
$T(n) \geq f(n)$	$T(n)$ é $\Omega(f(n))$
$T(n) = f(n)$	$T(n)$ é $\Theta(f(n))$

Tamanho máximo de problemas

Suponha que cada operação consome 1 microsegundo ($1\mu s$).

consumo de tempo (μs)	Tamanho máximo de problemas (n)		
	1 segundo	1 minuto	1 hora
$400n$	2500	150000	9000000
$20\,n\,\lceil \lg n \rceil$	4096	166666	7826087
$2n^2$	707	5477	42426
n^4	31	88	244
2^n	19	25	31

Michael T. Goodrich e Roberto Tamassia, *Projeto de Algoritmos*, Bookman.

Crescimento de algumas funções

n	$\lg n$	$\sqrt{n}$	$n \lg n$	n^2	n^3	2^n
2	1	1,4	2	4	8	4
4	2	2	8	16	64	16
8	3	2,8	24	64	512	256
16	4	4	64	256	4096	65536
32	5	5,7	160	1024	32768	4294967296
64	6	8	384	4096	262144	$1{,}8\,10^{19}$
128	7	11	896	16384	2097152	$3{,}4\,10^{38}$
256	8	16	1048	65536	16777216	$1{,}1\,10^{77}$
512	9	23	4608	262144	134217728	$1{,}3\,10^{154}$
1024	10	32	10240	1048576	$1{,}1\,10^{9}$	$1{,}7\,10^{308}$

Nomes de classes Θ

classe	nome
$\Theta(1)$	constante
$\Theta(\log n)$	logarítmica
$\Theta(n)$	linear
$\Theta(n \log n)$	$n \log n$
$\Theta(n^2)$	quadrática
$\Theta(n^3)$	cúbica
$\Theta(n^k)$ com $k \geq 1$	polinomial
$\Theta(2^n)$	exponencial
$\Theta(a^n)$ com $a > 1$	exponencial

Palavras de Cautela

Suponha que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são algoritmos para um mesmo problema.
Suponha que o consumo de tempo de $\mathcal{A}$ é "essencialmente" $100\,n$ e que o consumo de tempo de $\mathcal{B}$ é "essencialmente" $n \log_{10} n$.

$100\,n$ é $\Theta(n)$ e $n \log_{10} n$ é $\Theta(n \lg n)$.
Logo, $\mathcal{A}$ é assintoticamente mais eficiente que $\mathcal{B}$.

$\mathcal{A}$ é mais eficiente que $\mathcal{B}$ para $n \geq 10^{100}$.

10^{100} = um *googol*
$\approx$ número de átomos no universo observável
= número ENORME

Palavras de Cautela

Conclusão:

> Lembre das constantes e termos de baixa ordem que estão "escondidos" na notação assintótica.

Em geral um algoritmo que consome tempo $\Theta(n \lg n)$, e com fatores constantes razoáveis, é bem eficiente.

Um algoritmo que consome tempo $\Theta(n^2)$ pode, algumas vezes, ser satisfatório.

Um algoritmo que consome tempo $\Theta(2^n)$ é dificilmente aceitável.

Do ponto de vista de AA, eficiente = polinomial.

Análise do caso médio

Consideremos que a entrada do algoritmo é uma permutação de 1 a n escolhida com probabilidade uniforme.

Qual é o número esperado de execuções da linha 4?

```
ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)
1  para j ← 2 até n faça
2      chave ← A[j]
3      i ← j − 1
4      enquanto i ≥ 1 e A[i] > chave faça
5          A[i + 1] ← A[i]    ▷ desloca
6          i ← i − 1
7      A[i + 1] ← chave    ▷ insere
```


Análise do caso médio

```
ORDENA-POR-INSERÇÃO (A, n)
1  para j ← 2 até n faça
2      chave ← A[j]
3      i ← j − 1
4      enquanto i ≥ 1 e A[i] > chave faça
5          A[i + 1] ← A[i]    ▷ desloca
6          i ← i − 1
7      A[i + 1] ← chave    ▷ insere
```

Para cada valor de j, a linha 4 é executada de 1 a j vezes.

Qual é a probabilidade dela ser executada t vezes?

Esta probabilidade é $1/j$. (Explicação na aula.)

Análise do caso médio

Para cada valor de j, a linha 4 é executada de 1 a j vezes.

Qual é a probabilidade dela ser executada t vezes?

Esta probabilidade é $1/j$.

Portanto o número esperado de execuções da linha 4 é

$$\sum_{t=1}^{j} t\,\frac{1}{j} \;=\; \frac{1}{j}\sum_{t=1}^{j} t \;=\; \frac{1}{j}\,\frac{(j+1)j}{2} \;=\; \frac{j+1}{2}.$$

E o número esperado de execuções da linha 4 no total é

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{j+1}{2} \;=\; \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}(j+1) \;=\; \frac{(n+4)(n-1)}{4} \;=\; \Theta(n^2).$$

Ordenação

$A[1..n]$ é crescente se $A[1] \le \cdots \le A[n]$.

Problema: Rearranjar um vetor $A[1..n]$ de modo que ele fique crescente.

ORDENA-POR-INSERÇÃO consome tempo $O(n^2)$ no pior caso e $\Theta(n^2)$ no caso médio.

Conseguimos fazer melhor?

Sim! Usando divisão e conquista!

CLRS 2.3, 4.1 e 4.2