Análise de Algoritmos

CLRS 7

QuickSort

Rearranja $A[p \,..\, r]$ em ordem crescente.

QuickSort (A, p, r)
se $p < r$
    então $q \leftarrow$ Particione(A, p, r)
            QuickSort$(A, p, q-1)$
            QuickSort$(A, q+1, r)$

Partição

Problema: Rearranjar um dado vetor $A[p\,..\,r]$ e devolver um índice q tal que $p \leq q \leq r$ e

$$A[p\,..\,q-1] \leq A[q] < A[q+1\,..\,r]$$

Entra:

	p									r
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Partição

Problema: Rearranjar um dado vetor $A[p \mathinner{.\,.} r]$ e devolver um índice q tal que $p \le q \le r$ e

$$A[p \mathinner{.\,.} q-1] \le A[q] < A[q+1 \mathinner{.\,.} r]$$

Entra:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} & p & & & & & & & & & r \\ \cline{2-11} A & 99 & 33 & 55 & 77 & 11 & 22 & 88 & 66 & 33 & 44 \\ \cline{2-11} \end{array}$$

Sai:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} & p & & & & q & & & & & r \\ \cline{2-11} A & 33 & 11 & 22 & 33 & 44 & 55 & 99 & 66 & 77 & 88 \\ \cline{2-11} \end{array}$$

Particione

	p									r
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Particione

	i	j									x
A		99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Particione

	i		j								x
A		99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

Particione

	i	j								x
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

		i	j							x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

Particione

	i	j								x
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i		j							x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

	i			j						x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

Particione

	i		j							x
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

		i		j						x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

		i				j				x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

Particione

	i		j							x
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j							x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

		i				j				x
A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

Particione

i		j								x
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i		j							x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

		i				j				x
A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

			i				j			x
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

Particione

	i		j							x
A		99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

		i		j						x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

		i				j				x
A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

			i				j			x
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

			i					j		x
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

Particione

i		j								x
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i		j							x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

		i				j				x
A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

			i				j			x
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

			i						j	x
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

Particione

	i	j								x
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i	j								x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

		i				j				x
A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

			i				j			x
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

				i						j
A	33	11	22	33	99	55	88	66	77	44

Particione

i		j								x
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

	i		j							x
A	33	99	55	77	11	22	88	66	33	44

		i				j				x
A	33	11	55	77	99	22	88	66	33	44

			i				j			x
A	33	11	22	77	99	55	88	66	33	44

				i						j
A	33	11	22	33	99	55	88	66	77	44

	p				q					r
A	33	11	22	33	44	55	88	66	77	99

Particione

Rearranja $A[p\,..\,r]$ de modo que $p \le q \le r$ e
$A[p\,..\,q{-}1] \le A[q] < A[q{+}1\,..\,r]$

PARTICIONE (A, p, r)
1 $\quad x \leftarrow A[r]$ $\qquad \rhd$ x é o "pivô"
2 $\quad i \leftarrow p{-}1$
3 $\quad$ **para** $j \leftarrow p$ **até** $r-1$ **faça**
4 $\qquad$ **se** $A[j] \le x$
5 $\qquad\quad$ **então** $i \leftarrow i+1$
6 $\qquad\qquad A[i] \leftrightarrow A[j]$
7 $\quad A[i{+}1] \leftrightarrow A[r]$
8 $\quad$ **devolva** $i+1$

Invariantes: no começo de cada iteração de 3–6,
(i0) $A[p\,..\,i] \le x$ $\qquad$ (i1) $A[i{+}1\,..\,j{-}1] > x$ $\qquad$ (i2) $A[d] = x$

Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de $n := r - p + 1$?

linha	consumo de todas as execuções da linha
1-2	$= 2\Theta(1)$
3	$= \Theta(n)$
4	$= \Theta(n)$
5-6	$= 2\mathrm{O}(n)$
7-8	$= 2\Theta(1)$
total	$= \Theta(2n+4) + \mathrm{O}(2n) \qquad = \Theta(n)$

Conclusão:

> O algoritmo PARTICIONE consome tempo $\Theta(n)$.

QuickSort

Rearranja $A[p \mathinner{.\,.} r]$ em ordem crescente.

QUICKSORT (A, p, r)
1 **se** $p < r$
2 **então** $q \leftarrow$ PARTICIONE(A, p, r)
3 QUICKSORT$(A, p, q-1)$
4 QUICKSORT$(A, q+1, r)$

	p									r
A	99	33	55	77	11	22	88	66	33	44

QuickSort

Rearranja $A[p\,..\,r]$ em ordem crescente.

```
QuickSort (A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← Particione(A, p, r)
3           QuickSort(A, p, q − 1)
4           QuickSort(A, q + 1, r)
```

	p				q					r
A	33	11	22	33	44	55	88	66	77	99

No começo da linha 3,

$$A[p\,..\,q{-}1] \leq A[q] \leq A[q{+}1\,..\,r]$$

QuickSort

Rearranja $A[p\,..\,r]$ em ordem crescente.

QuickSort (A, p, r)
se $p < r$
    então $q \leftarrow$ Particione (A, p, r)
        QuickSort $(A, p, q-1)$
        QuickSort $(A, q+1, r)$

	p				q					r
A	11	22	33	33	44	55	88	66	77	99

QuickSort

Rearranja $A[p\,..\,r]$ em ordem crescente.

QUICKSORT (A, p, r)
se $p < r$
  então $q \leftarrow$ PARTICIONE(A, p, r)
    QUICKSORT$(A, p, q-1)$
    QUICKSORT$(A, q+1, r)$

	p				q					r
A	11	22	33	33	44	55	66	77	88	99

QuickSort

Rearranja $A[p\,..\,r]$ em ordem crescente.

```
QUICKSORT (A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← PARTICIONE(A, p, r)
3             QUICKSORT(A, p, q − 1)
4             QUICKSORT(A, q + 1, r)
```

No começo da linha 3,

$$A[p\,..\,q{-}1] \leq A[q] \leq A[q{+}1\,..\,r]$$

Consumo de tempo?

QuickSort

Rearranja $A[p\,..\,r]$ em ordem crescente.

```
QUICKSORT (A, p, r)
1   se p < r
2       então q ← PARTICIONE(A, p, r)
3             QUICKSORT(A, p, q − 1)
4             QUICKSORT(A, q + 1, r)
```

No começo da linha 3,

$$A[p\,..\,q{-}1] \le A[q] \le A[q{+}1\,..\,r]$$

Consumo de tempo?

$T(n)$:= consumo de tempo no pior caso sendo

$$n := r - p + 1$$

Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de $n := r - p + 1$?

linha		consumo de todas as execuções da linha
1	$=$	?
2	$=$	?
3	$=$	?
4	$=$	?
total	$=$	????

Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de $n := r - p + 1$?

linha		consumo de todas as execuções da linha
1	$=$	$\Theta(1)$
2	$=$	$\Theta(n)$
3	$=$	$T(k)$
4	$=$	$T(n-k-1)$
total	$=$	$T(k) + T(n-k-1) + \Theta(n+1)$

$$0 \le k := q - p \le n - 1$$

Recorrência

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(n) = T(k) + T(n-k-1) + \Theta(n)$$

Recorrência

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(n) = T(k) + T(n-k-1) + \Theta(n)$$

Recorrência grosseira:

$$T(n) = T(0) + T(n-1) + \Theta(n)$$

$T(n)$ é $\Theta(???)$.

Recorrência

$T(n)$:= consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(n) = T(k) + T(n-k-1) + \Theta(n)$$

Recorrência grosseira:

$$T(n) = T(0) + T(n-1) + \Theta(n)$$

$T(n)$ é $\Theta(n^2)$.

Demonstração: ... Exercício!

Recorrência cuidadosa

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(n) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{T(k) + T(n-k-1)\} + \Theta(n)$$

Recorrência cuidadosa

$T(n)$:= consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(n) = \max_{0 \le k \le n-1} \{T(k) + T(n-k-1)\} + \Theta(n)$$

Versão simplificada:

$$T(0) = 1$$
$$T(1) = 1$$
$$T(n) = \max_{0 \le k \le n-1} \{T(k) + T(n-k-1)\} + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

n	0	1	2	3	4	5
$T(n)$	1	1	$2+2$	$5+3$	$9+4$	$14+5$

Recorrência cuidadosa

$T(n)$:= consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(n) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{T(k) + T(n-k-1)\} + \Theta(n)$$

Versão simplificada:

$$T(0) = 1$$
$$T(1) = 1$$
$$T(n) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{T(k) + T(n-k-1)\} + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

n	0	1	2	3	4	5
$T(n)$	1	1	$2+2$	$5+3$	$9+4$	$14+5$

Vamos mostrar que $T(n) \leq n^2 + 1$ para $n \geq 0$.

Demonstração

Prova: Trivial para $n \leq 1$. Se $n \geq 2$ então

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \max_{0 \leq k \leq n-1} \left\{ T(k) + T(n-k-1) \right\} + n \\
&\overset{\text{hi}}{\leq} \max_{0 \leq k \leq n-1} \left\{ k^2 + 1 + (n-k-1)^2 + 1 \right\} + n \\
&= \cdots \\
&= n^2 - n + 3 \\
&\leq n^2 + 1 \,.
\end{aligned}
$$

Prove que $T(n) \geq \frac{1}{2} n^2$ para $n \geq 1$.

Algumas conclusões

$T(n)$ é $\Theta(n^2)$.

O consumo de tempo do QUICKSORT no pior caso é $O(n^2)$.

O consumo de tempo do QUICKSORT é $O(n^2)$.

QuickSort no melhor caso

$M(n) :=$ consumo de tempo mínimo quando $n = r - p + 1$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n-k-1)\} + \Theta(n)$$

QuickSort no melhor caso

$M(n) :=$ consumo de tempo mínimo quando $n = r - p + 1$

$$M(n) = \min_{0 \le k \le n-1} \{M(k) + M(n-k-1)\} + \Theta(n)$$

Versão simplificada:

$$M(0) = 1$$
$$M(1) = 1$$
$$M(n) = \min_{0 \le k \le n-1} \{M(k) + M(n-k-1)\} + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

QuickSort no melhor caso

$M(n) :=$ consumo de tempo mínimo quando $n = r - p + 1$

$$M(n) = \min_{0 \le k \le n-1} \{M(k) + M(n-k-1)\} + \Theta(n)$$

Versão simplificada:

$$M(0) = 1$$
$$M(1) = 1$$
$$M(n) = \min_{0 \le k \le n-1} \{M(k) + M(n-k-1)\} + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Mostre que $M(n) \ge (n+1)\lg(n+1)$ para $n \ge 1$.

QuickSort no melhor caso

$M(n) :=$ consumo de tempo mínimo quando $n = r - p + 1$

$$M(n) = \min_{0 \le k \le n-1} \{M(k) + M(n-k-1)\} + \Theta(n)$$

Versão simplificada:

$$M(0) = 1$$
$$M(1) = 1$$
$$M(n) = \min_{0 \le k \le n-1} \{M(k) + M(n-k-1)\} + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Mostre que $M(n) \ge (n+1)\lg(n+1)$ para $n \ge 1$.

Isto implica que no melhor caso o QuickSort é $\Omega(n \lg n)$,

QuickSort no melhor caso

$M(n) :=$ consumo de tempo mínimo quando $n = r - p + 1$

$$M(n) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n-k-1)\} + \Theta(n)$$

Versão simplificada:

$$
\begin{aligned}
M(0) &= 1 \\
M(1) &= 1 \\
M(n) &= \min_{0 \leq k \leq n-1} \{M(k) + M(n-k-1)\} + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots
\end{aligned}
$$

Mostre que $M(n) \geq (n+1)\lg(n+1)$ para $n \geq 1$.

Isto implica que no melhor caso o QuickSort é $\Omega(n \lg n)$, que é o mesmo que dizer que o QuickSort é $\Omega(n \lg n)$.

Mais algumas conclusões

$M(n)$ é $\Theta(n \lg n)$.

O consumo de tempo do QuickSort no melhor caso é $\Omega(n \log n)$.

Na verdade . . .

O consumo de tempo do QuickSort no melhor caso é $\Theta(n \log n)$.

Apesar do consumo de tempo de pior caso do QUICKSORT ser $\Theta(n^2)$, sua performance na prática é comparável (e em geral melhor) a de outros algoritmos cujo consumo de tempo no pior caso é $\mathrm{O}(n \lg n)$.
Tanto que é usado na prática:

Apesar do consumo de tempo de pior caso do QUICKSORT ser $\Theta(n^2)$, sua performance na prática é comparável (e em geral melhor) a de outros algoritmos cujo consumo de tempo no pior caso é $\mathrm{O}(n \lg n)$. Tanto que é usado na prática:

```
NAME
       qsort, qsort_r - sort an array

SYNOPSIS
       #include <stdlib.h>

       void qsort(void *base, size_t nmemb, size_t size,
                  int (*compar)(const void *, const void *
```

Apesar do consumo de tempo de pior caso do QUICKSORT ser $\Theta(n^2)$, sua performance na prática é comparável (e em geral melhor) a de outros algoritmos cujo consumo de tempo no pior caso é $O(n \lg n)$.
Tanto que é usado na prática:

```
NAME
       qsort, qsort_r - sort an array

SYNOPSIS
       #include <stdlib.h>

       void qsort(void *base, size_t nmemb, size_t size,
                  int (*compar)(const void *, const void *
```

Por que isso acontece?

QuickSort é bom na média!

Apesar do consumo de tempo de pior caso do QuickSort ser $\Theta(n^2)$, sua performance na prática é comparável (e em geral melhor) a de outros algoritmos cujo consumo de tempo no pior caso é $O(n \lg n)$.
Tanto que é usado na prática:

```
NAME
       qsort, qsort_r - sort an array

SYNOPSIS
       #include <stdlib.h>

       void qsort(void *base, size_t nmemb, size_t size,
                  int (*compar)(const void *, const void *
```

Por que isso acontece?

Exercício

Considere a recorrência

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$

Solução assintótica: $T(n)$ é $\mathrm{O}(???)$, $T(n)$ é $\Theta(???)$

Exercício

Considere a recorrência

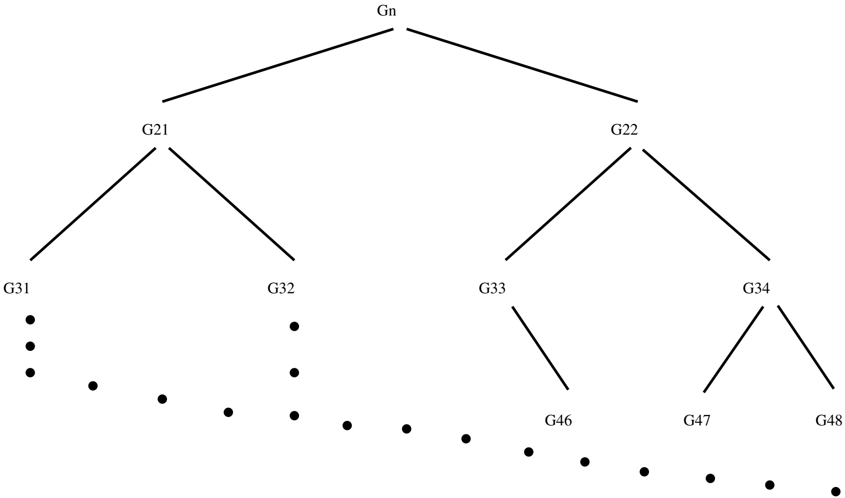
$$T(1) = 1$$
$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$

Solução assintótica: $T(n)$ é $\mathrm{O}(???)$, $T(n)$ é $\Theta(???)$

Vamos olhar a árvore da recorrência.

Árvore da recorrência



total de níveis $\leq \log_{3/2} n$

Árvore da recorrência

soma em cada horizontal $\leq n$

número de "níveis" $\leq \log_{3/2} n$

$T(n) =$ a soma de tudo

$$T(n) \;\leq\; n \log_{3/2} n \;+\; \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\log_{3/2} n}$$

$T(n)$ é $\mathrm{O}(n \lg n)$.

De volta a recorrência

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

n	$T(n)$
1	1
2	$1 + 1 + 2 = 4$
3	$1 + 4 + 3 = 8$
4	$4 + 4 + 4 = 12$

De volta a recorrência

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

n	$T(n)$
1	1
2	$1 + 1 + 2 = 4$
3	$1 + 4 + 3 = 8$
4	$4 + 4 + 4 = 12$

Vamos mostrar que $T(n) \leq 20\, n \lg n$ para $n = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

De volta a recorrência

$T(1) = 1$

$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$

n	$T(n)$
1	1
2	$1+1+2=4$
3	$1+4+3=8$
4	$4+4+4=12$

Vamos mostrar que $T(n) \le 20\, n \lg n$ para $n = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ Para $n = 2$ temos $T(2) = 4 < 20 \cdot 2 \cdot \lg 2$.
Para $n = 3$ temos $T(3) = 8 < 20 \cdot 3 \cdot \lg 3$.
Suponha agora que $n > 3$. Então...

Continuação da prova

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor\right) + n \\
&\overset{\text{hi}}{\leq} 20\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 20\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor + n \\
&\leq 20\frac{n+2}{3}\left\lceil \lg \frac{n}{3} \right\rceil + 20\frac{2n}{3}\lg\frac{2n}{3} + n \\
&< 20\frac{n+2}{3}\left(\lg \frac{n}{3} + 1\right) + 20\frac{2n}{3}\lg\frac{2n}{3} + n \\
&= 20\frac{n+2}{3}\lg\frac{2n}{3} + 20\frac{2n}{3}\lg\frac{2n}{3} + n \\
&= 20\frac{n}{3}\lg\frac{2n}{3} + 20\frac{2}{3}\lg\frac{2n}{3} + 20\frac{2n}{3}\lg\frac{2n}{3} + n
\end{aligned}
$$

Continuação da continuação da prova

$$
\begin{aligned}
&< 20n\lg\frac{2n}{3} + 14\lg\frac{2n}{3} + n \\
&= 20n\lg n + 20n\lg\frac{2}{3} + 14\lg n + 14\lg\frac{2}{3} + n \\
&< 20n\lg n + 20n\,(-0.58) + 14\lg n + 14\,(-0.58) + n \\
&< 20n\lg n - 11n + 14\lg n - 8 + n \\
&= 20n\lg n - 10n + 14\lg n - 8 \\
&< 20n\lg n - 10n + 7n - 8 \\
&< 20n\lg n
\end{aligned}
$$

Iiiéééééssss!

De volta à intuição

Certifique-se que a conclusão seria a mesma qualquer que fosse a proporção fixa que tomássemos. Por exemplo, resolva o seguinte...

De volta à intuição

Certifique-se que a conclusão seria a mesma qualquer que fosse a proporção fixa que tomássemos. Por exemplo, resolva o seguinte...

Exercício: Considere a recorrência

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = T(\lceil n/10 \rceil) + T(\lfloor 9n/10 \rfloor) + n$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$ e mostre que $T(n)$ é $\mathrm{O}(n \lg n)$.

De volta à intuição

Certifique-se que a conclusão seria a mesma qualquer que fosse a proporção fixa que tomássemos. Por exemplo, resolva o seguinte...

Exercício: Considere a recorrência

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = T(\lceil n/10 \rceil) + T(\lfloor 9n/10 \rfloor) + n$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$ e mostre que $T(n)$ é $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Note que, se o QuickSort fizer uma "boa" partição a cada, digamos, 5 níveis da recursão, o efeito geral é o mesmo, assintoticamente, que ter feito uma boa partição em todos os níveis.

Próxima aula

Análise probabilística

CLRS 5.1, 5.2, C.1 a C.3, 7.1 e 7.2